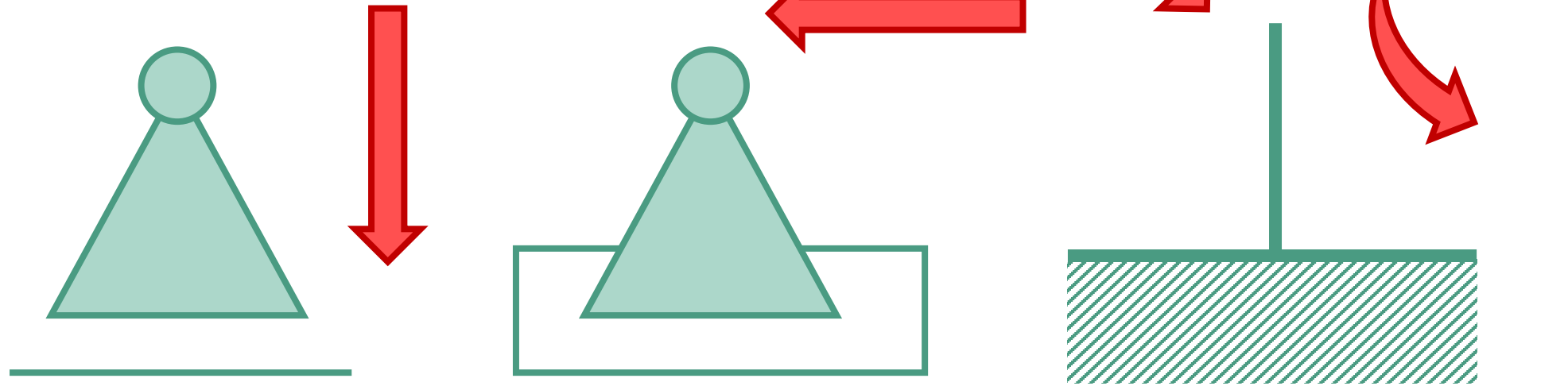


TB036 Estática – Curso 2

Reacciones de Vínculo



Estructura

➤ Definición:

Conjunto de cuerpos unidos entre sí de para poder soportar las cargas.

➤ Clasificación:

- Lineales o unidimensionales (barras): una dimensión predominante frente a las otras 2.
- Superficiales o bidimensionales (placas, chapas o membranas): 2 dimensiones predominantes frente a la tercera.
- Volumétricos o tridimensionales (cuerpos): 3 dimensiones predominantes



Pórtico

➤ Definición:

Estructura construida por una sucesión de barras, de eje rectilíneo o curvo.

➤ Elementos:

Elementos verticales: columnas.

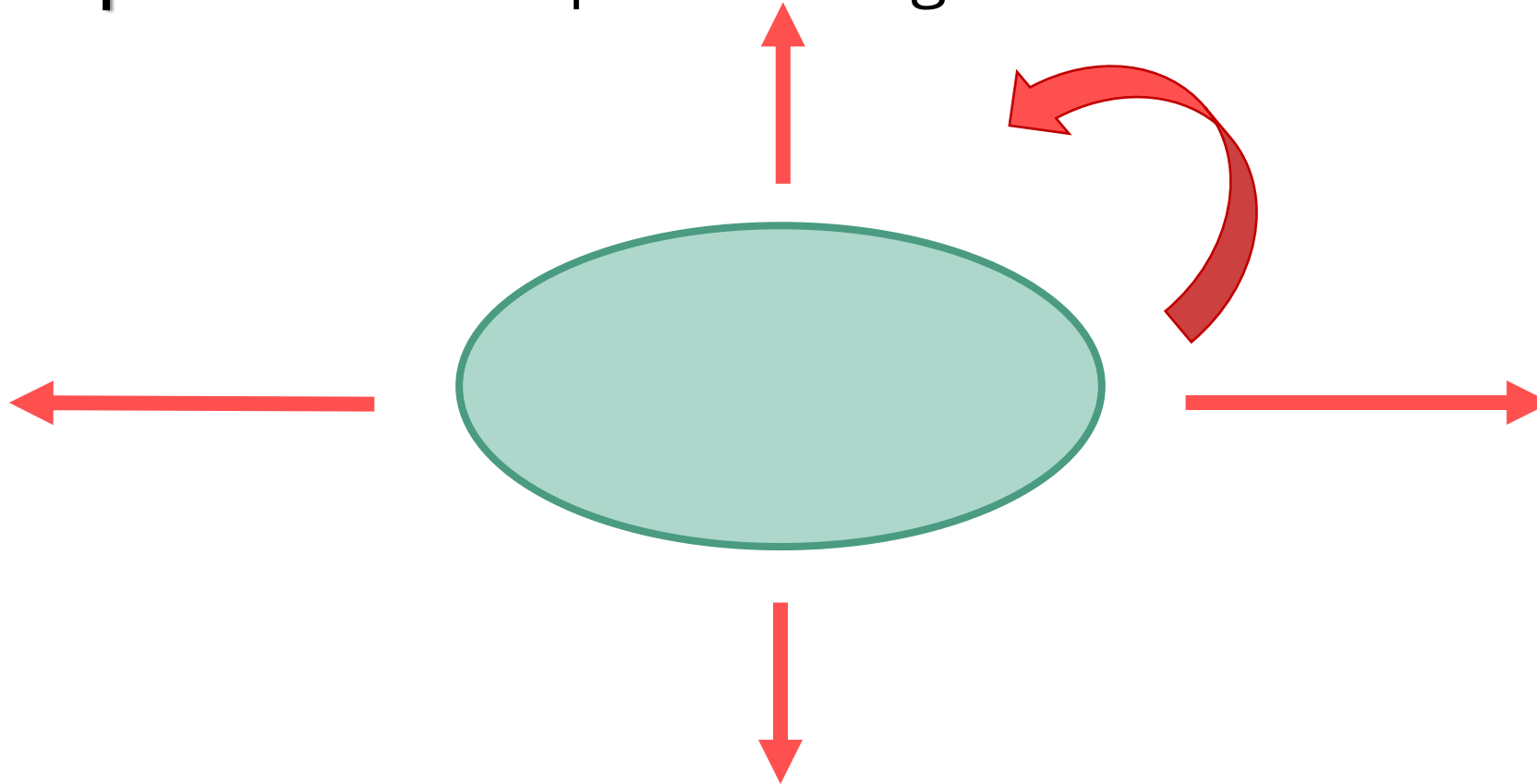
Elementos horizontales: vigas o denteles.

Pórtico plano: los ejes baricéntricos de las barras, vínculos y las cargas se encuentran todos en el mismo plano.



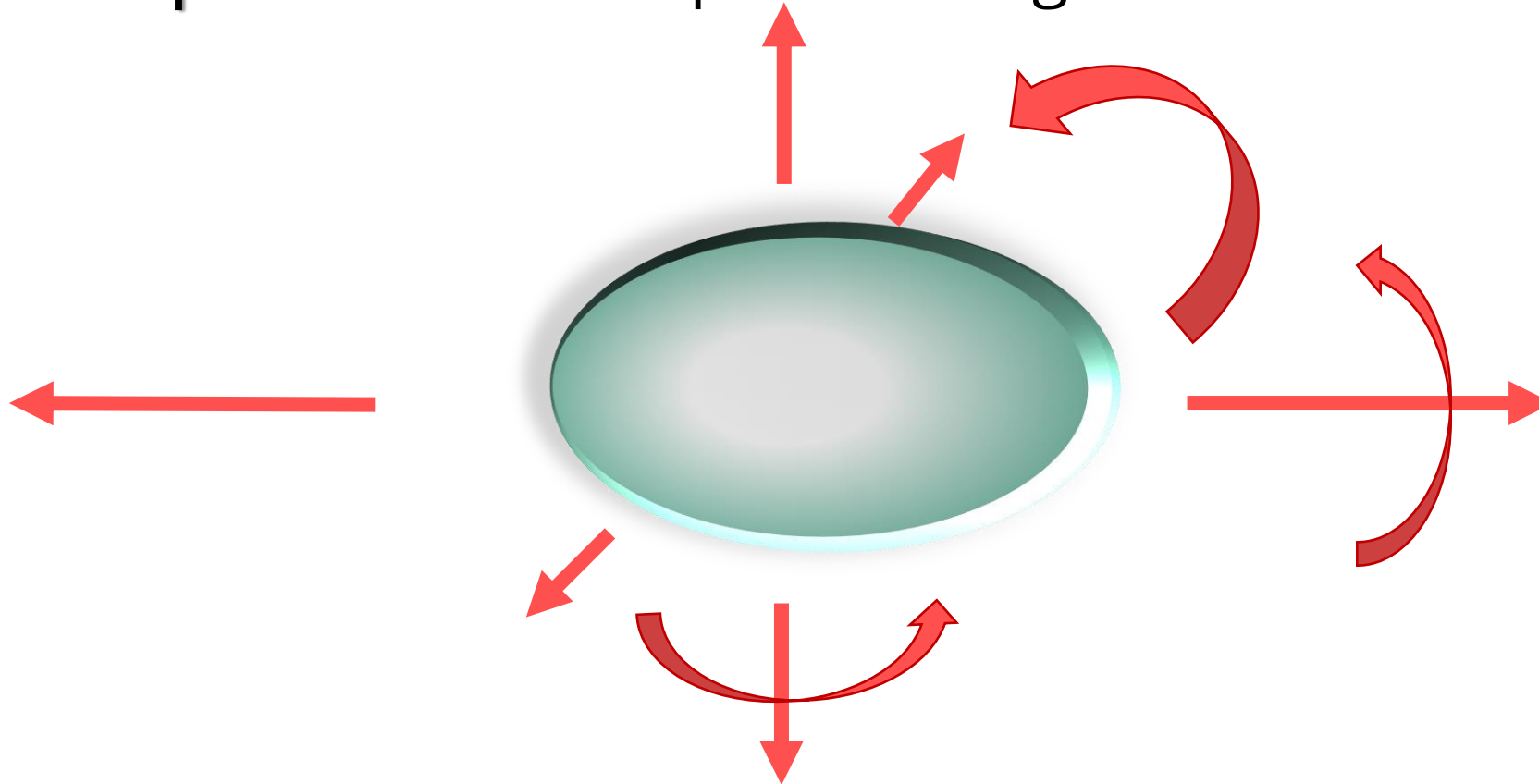
Grados de libertad

- En **sistemas planos** un cuerpo tiene 3 grados de libertad (GL):



Grados de libertad

- En **sistemas espaciales** un cuerpo tiene 6 grados de libertad (GL):



Equilibrio de Cuerpos Vinculados

- Equilibrio de una partícula:
Ecuaciones de equilibrio de fuerzas concentradas concurrentes

- Equilibrio de un cuerpo rígido:
Ecuaciones de equilibrio de sistemas de fuerzas generalizados



Vínculos y Reacciones de Vínculos

➤ Vínculo:

Condición geométrica que limita la posibilidad de movimiento de un cuerpo. Por cada movimiento limitado, se dirá que se ha impuesto 1 condición de vínculo.

➤ Reacción:

Es la Fuerza o Momento que desarrolla un vínculo cuando previene la traslación de un cuerpo en una dirección



Clasificación de Vínculos

- Externos o absolutos: imponen condiciones geométricas que limitan la posición del cuerpo respecto de la tierra, supuesta fija (conectan la estructura a la tierra).
- Internos o relativos: limitan la movilidad entre los cuerpos (conectan partes de la estructura entre sí).
- Bilaterales ó reversibles: limitan el movimiento en ambos sentidos.
- Unilaterales (ej: contacto): limitan el movimiento en un único sentido.



Tipos de apoyos:

➤ Móviles:

Restringen el movimiento en 1 dirección o sea un GL.

Realidad:



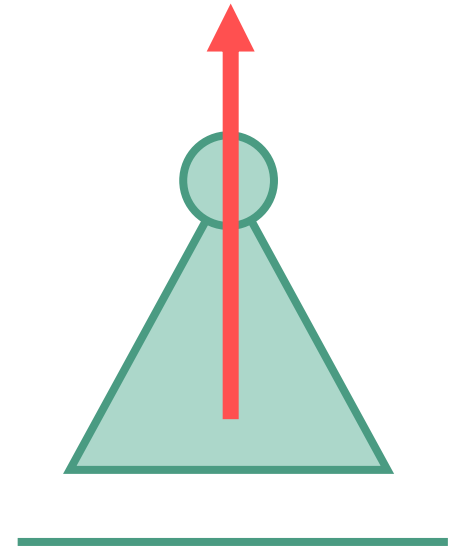
Restringe:

desplazamiento Y

Permite:

desplazamiento X
giro Z

Modelo:



Tipos de apoyos:

➤ Fijos:

Restringen el movimiento en 2 direcciones o sea 2 GL.

Realidad:

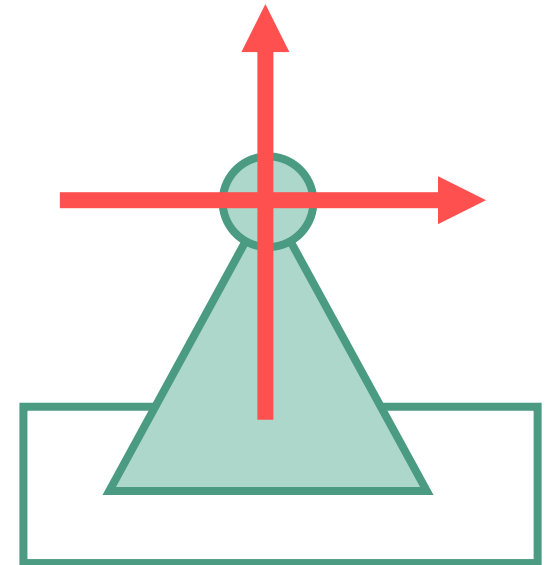


Restringe:

desplazamiento Y
desplazamiento X

Permite:
giro Z

Modelo:



Tipos de apoyos:

➤ Empotramientos:

Restringen el movimiento en 2 direcciones y el giro, o sea 3 GL.

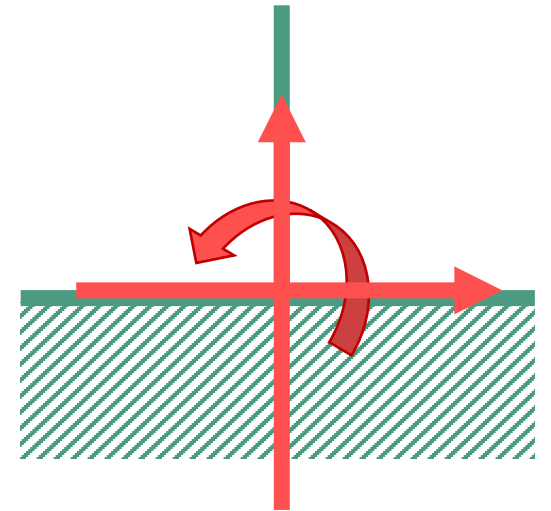
Realidad:



Restringe:

desplazamiento Y
desplazamiento X
giro Z

Modelo:



Realidad Física Vs Modelo Matemático



Cargas: Peso propio + Sobrecarga de uso + Viento + Sismo



Clasificación según vinculación

GL = Grados de Libertad

CV = Condición de Vínculo

- $GL = CV$ **Isoestáticos** (Condición necesaria pero **NO** suficiente)
- $GL < CV$ **Hiperestáticos**
- $GL > CV$ **Hipostáticos**

Nota: para casos particulares de carga las estructuras hipostáticas también pueden estar en equilibrio.



Estructura Isoestática o Estáticamente Determinada

Si se cumplen estas 2 condiciones:

$$GL = CV$$

y

No hay vinculación aparente.



Análisis cinemático

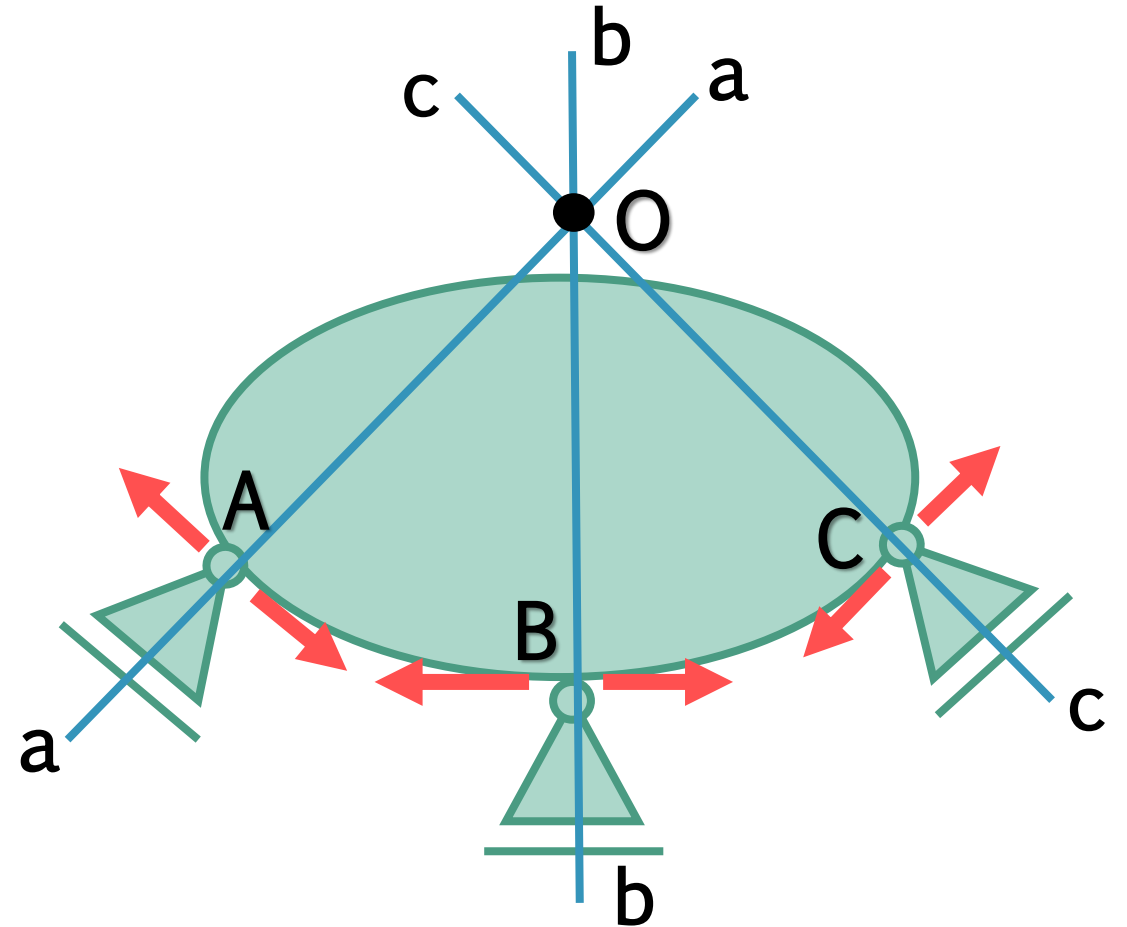
$$N^{\circ} \text{ Vínculos} = GL \quad \Rightarrow \quad 3 = 3$$

Chequeo vinculación aparente:

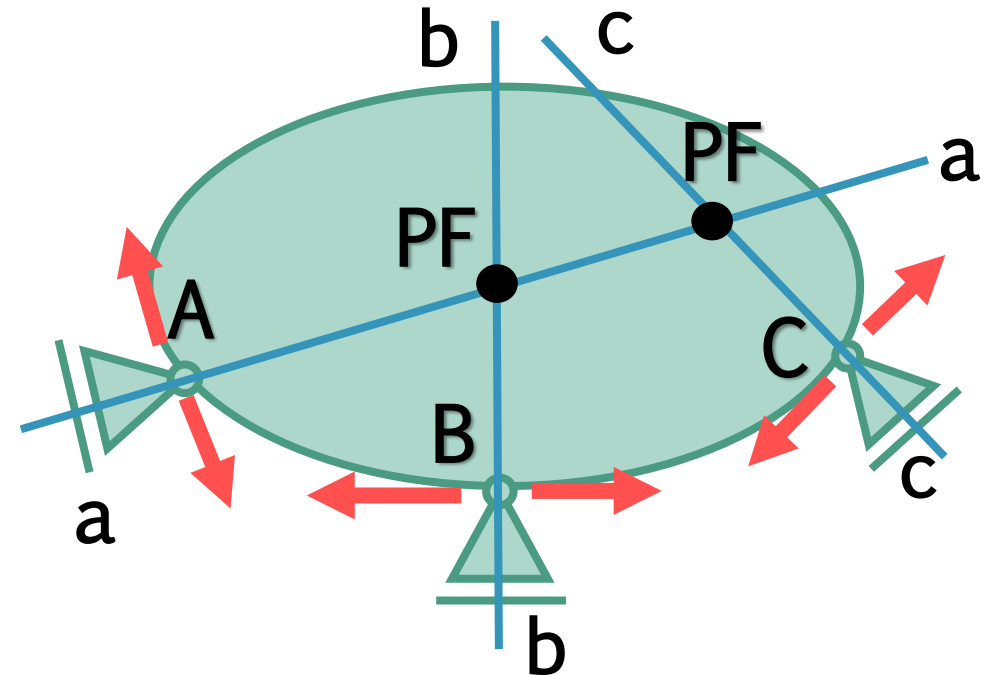
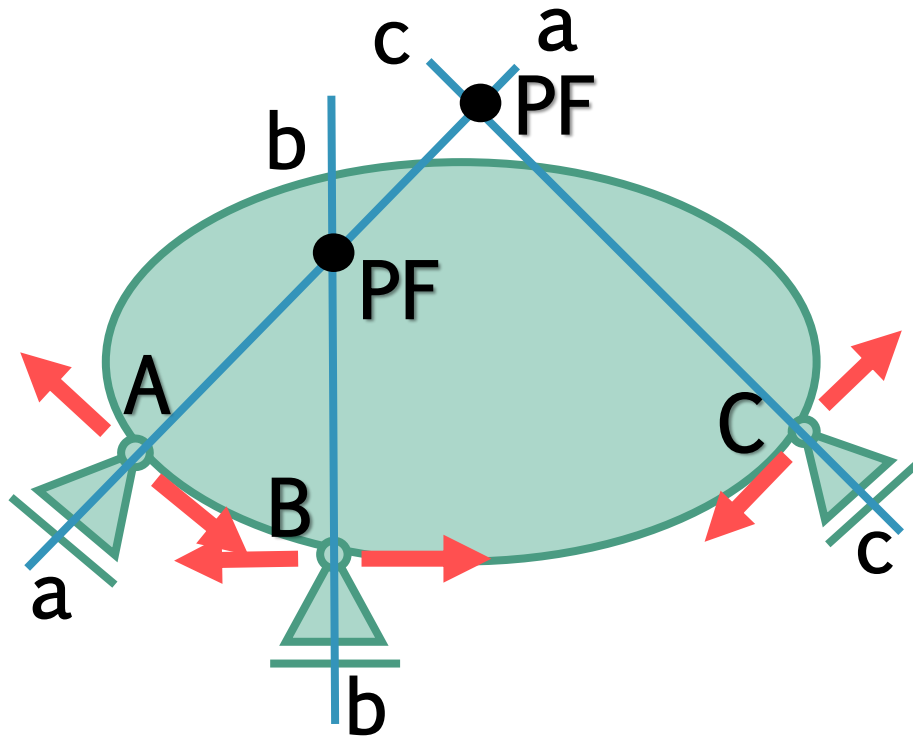
O es el único Punto Fijo \Rightarrow
Es el polo de rotación.

Hay vinculación aparente \Rightarrow

No es isoestático. Es un mecanismo.

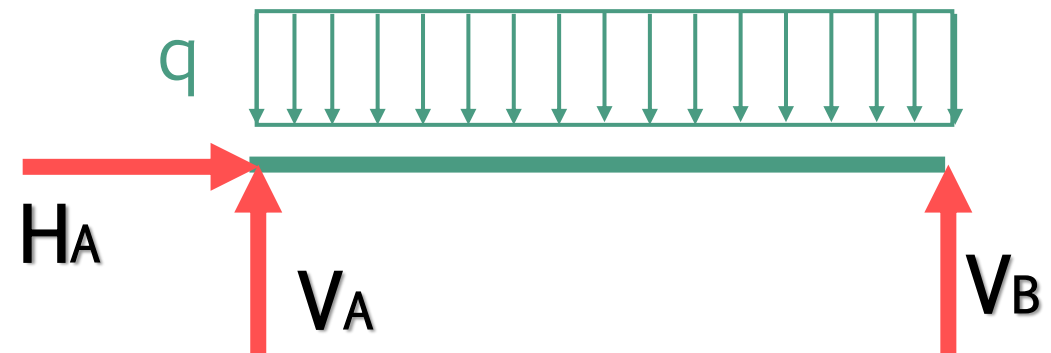
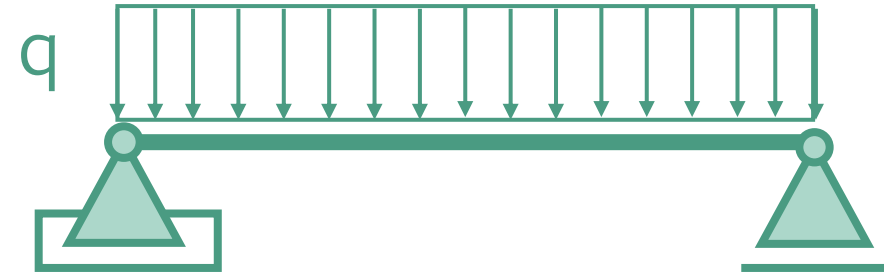


Para que no haya vinculación aparente hay que encontrar al menos 2 puntos fijos en el cuerpo rígido.



Reacciones de vínculo

- Modelo del problema físico
- Análisis cinemático
- Diagrama de cuerpo libre
 - Fuerzas Activas
 - Fuerzas Reactivas



➤ Equilibrio

$$\sum F_x = 0$$

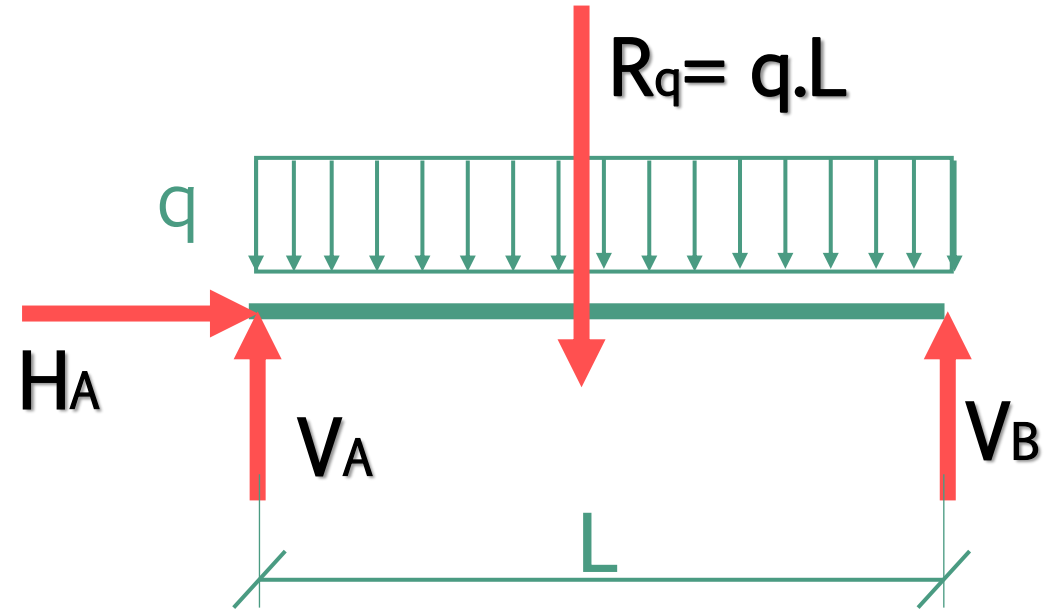
$$H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V_A + V_B - R_q = 0$$

$$\sum M^B = 0$$

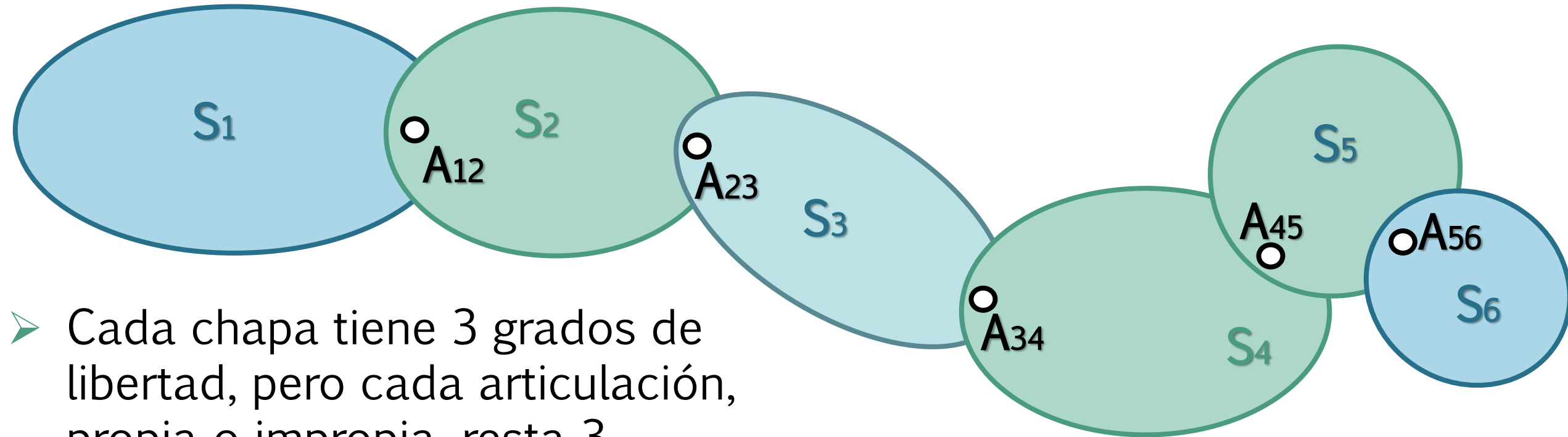
$$R_q \cdot \frac{L}{2} - V_A \cdot L = 0$$



$$V_A = \frac{qL}{2}$$

$$V_B = \frac{qL}{2}$$

Cadenas de chapas - Grados de Libertad



- Cada chapa tiene 3 grados de libertad, pero cada articulación, propia o impropia, resta 3

$$GL = 3 \cdot n - 2 \cdot (n - 1) = n_{chapas} + 2$$

 \Rightarrow

$$GL = n_{chapas} + 2$$

Cadenas de chapas - Grados de Libertad

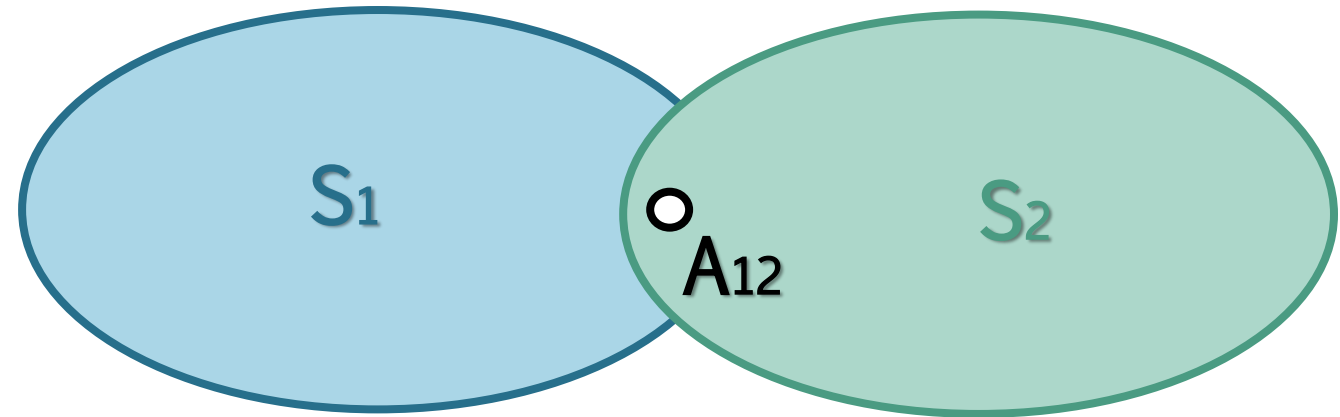
Cuántos grados de libertad tiene esta cadena?

La chapa S_1 sola tiene 3GL

La chapa S_2 sola tiene 3GL

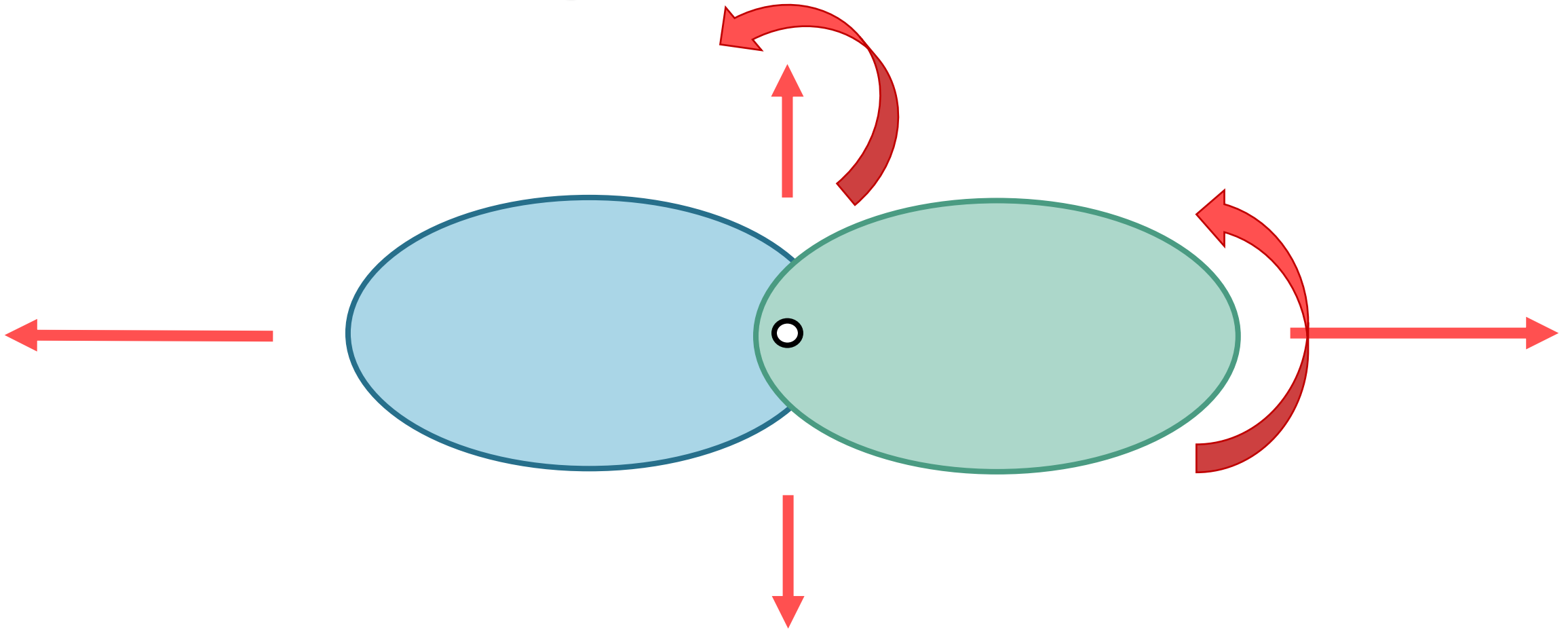
La articulación relativa A_{12} restringe 2GL

GL de la cadena: $3+3-2 = 4$

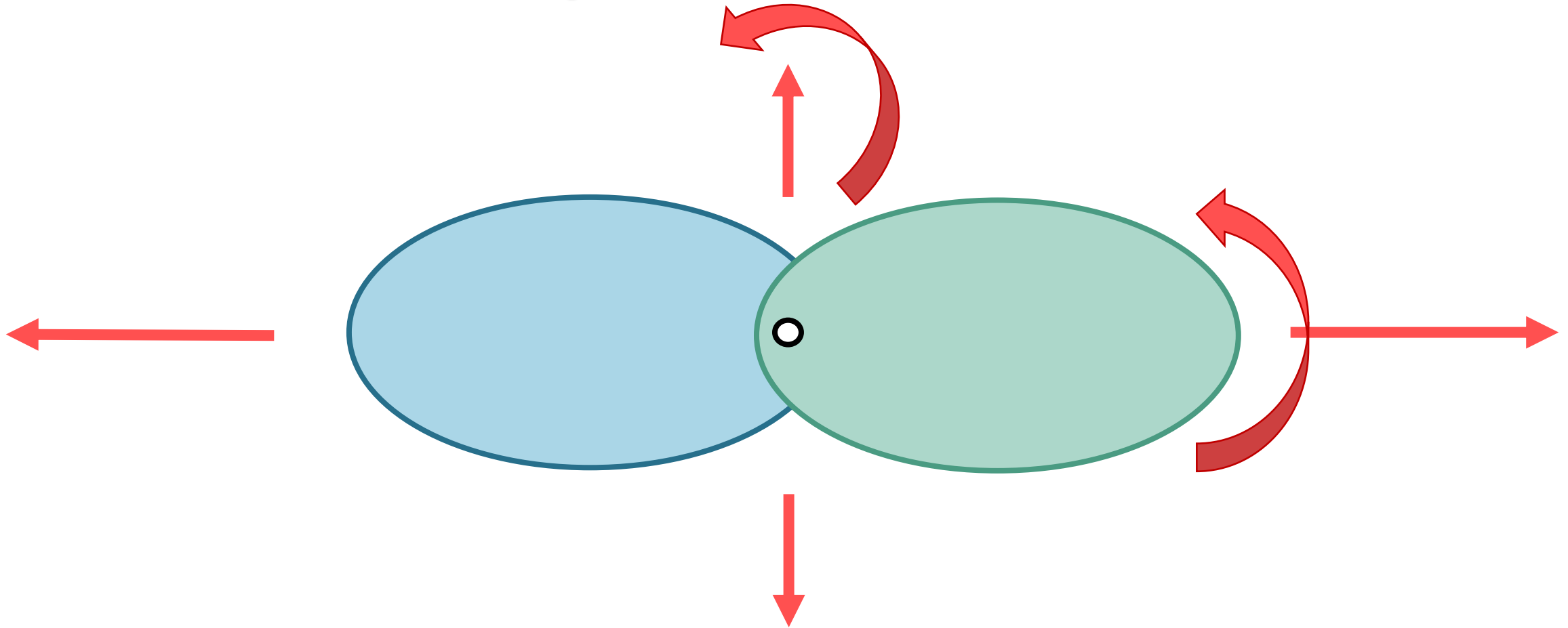


$$GL = n_{chapas} + 2$$

Cadenas de chapas - Grados de Libertad



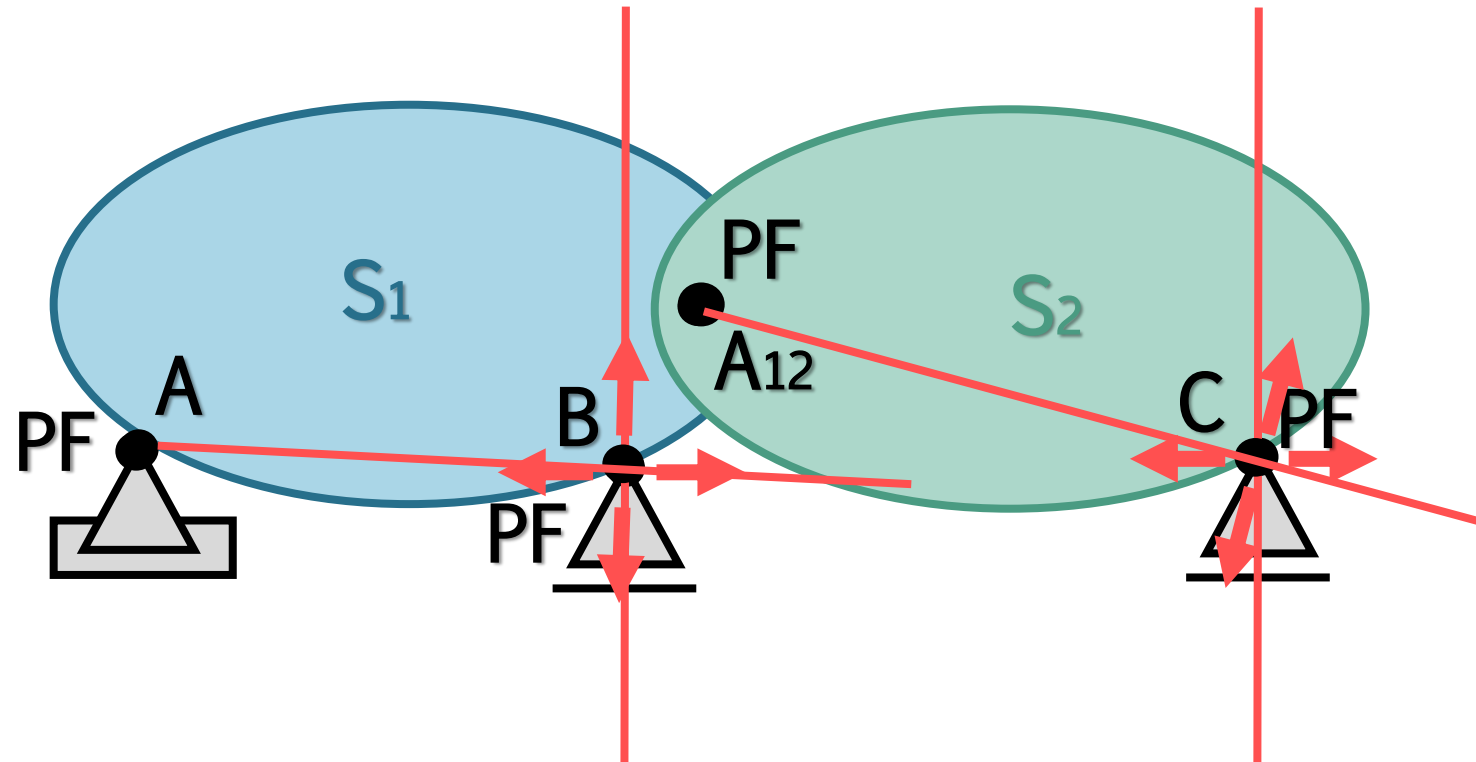
Cadenas de chapas - Grados de Libertad



Cadenas de chapas - Análisis Cinemático

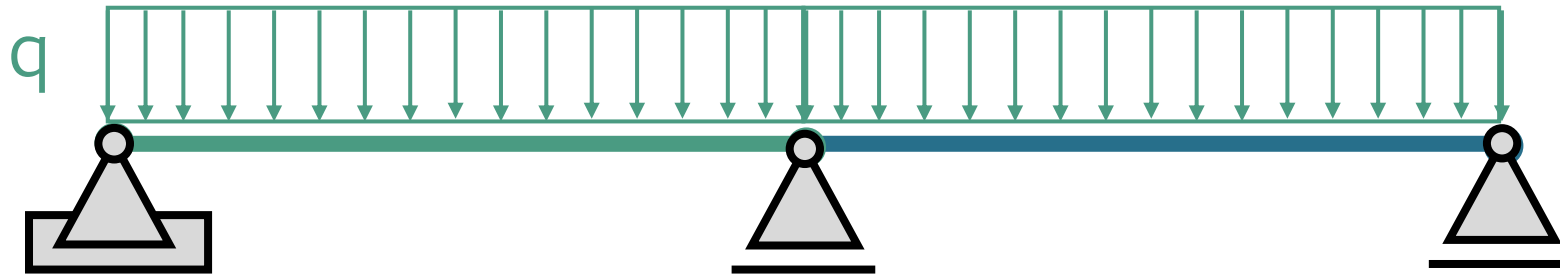
$$GL = 4$$

$$NV = 4$$

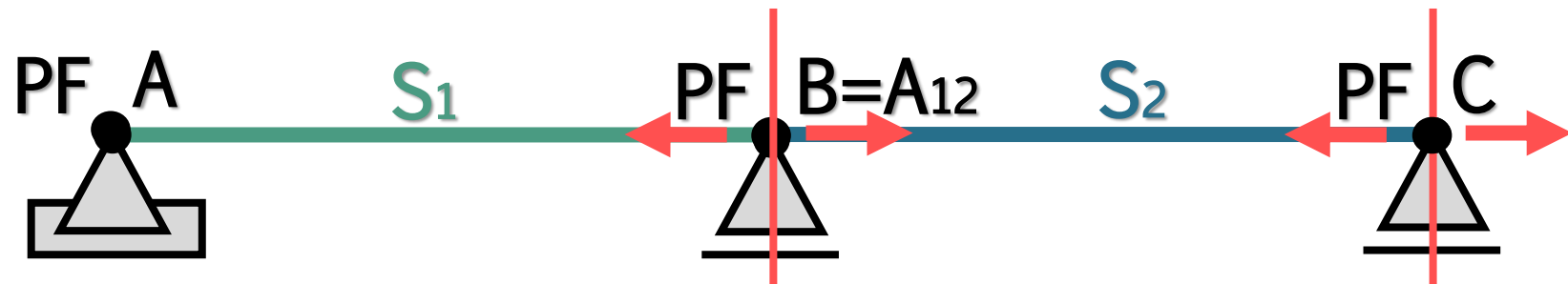


Reacciones de vínculo

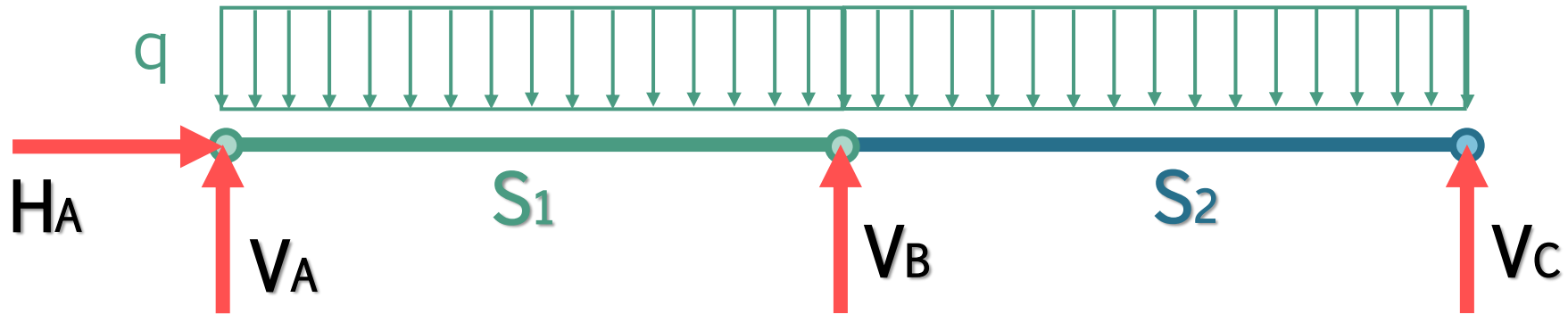
➤ Modelo del problema físico



➤ Análisis cinemático



Reacciones de vínculo



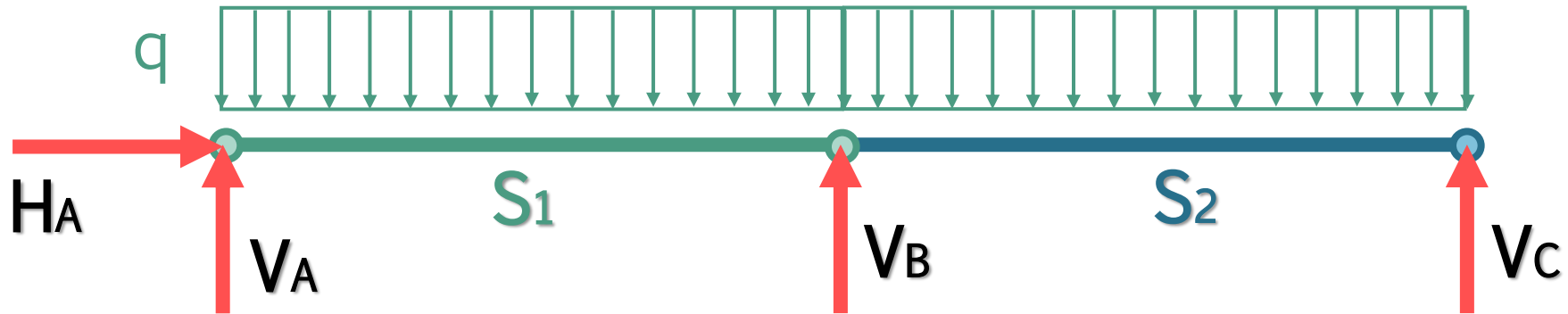
➤ Equilibrio

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M^A = 0$$

$$\sum M_{S_2}^{A_{12}} = 0$$



$$\sum F_x = 0$$

$$H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V_A + V_B + V_C - q \cdot 2L = 0$$

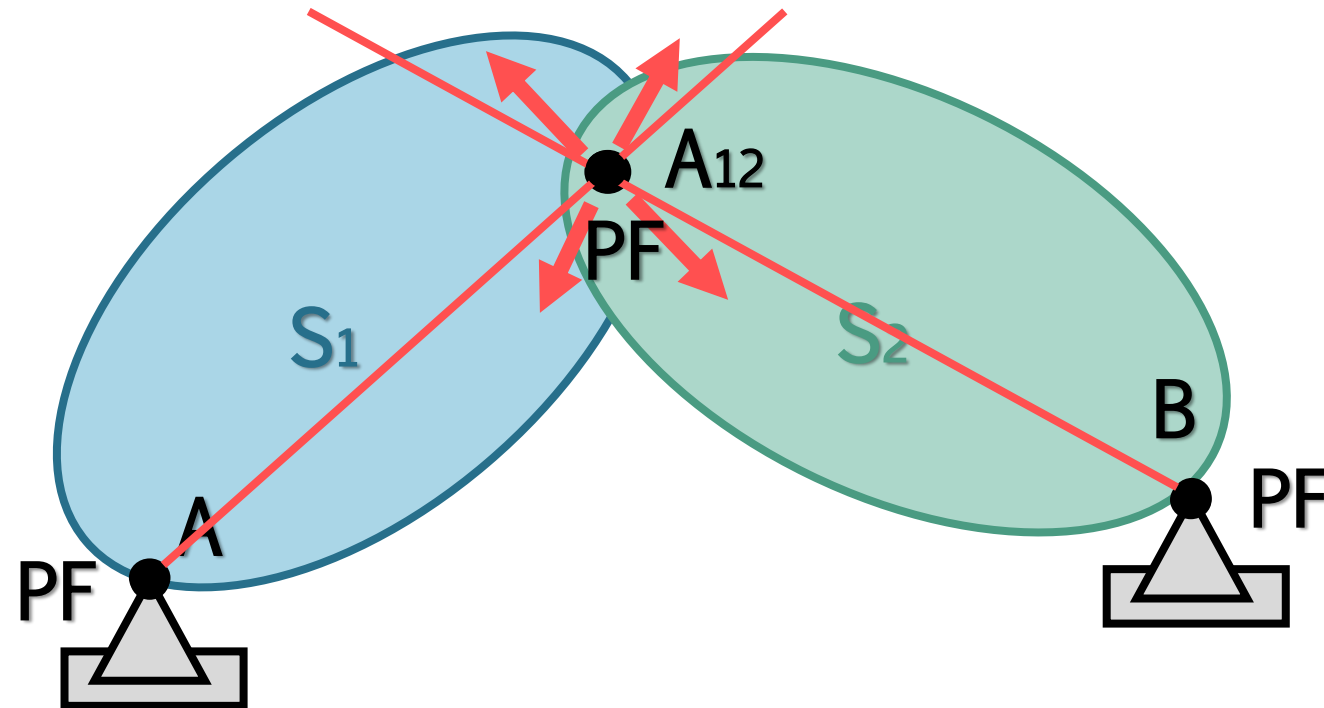
$$\sum M^A = 0$$

$$-q \cdot 2L \cdot L + V_B \cdot L + V_C \cdot 2L = 0$$

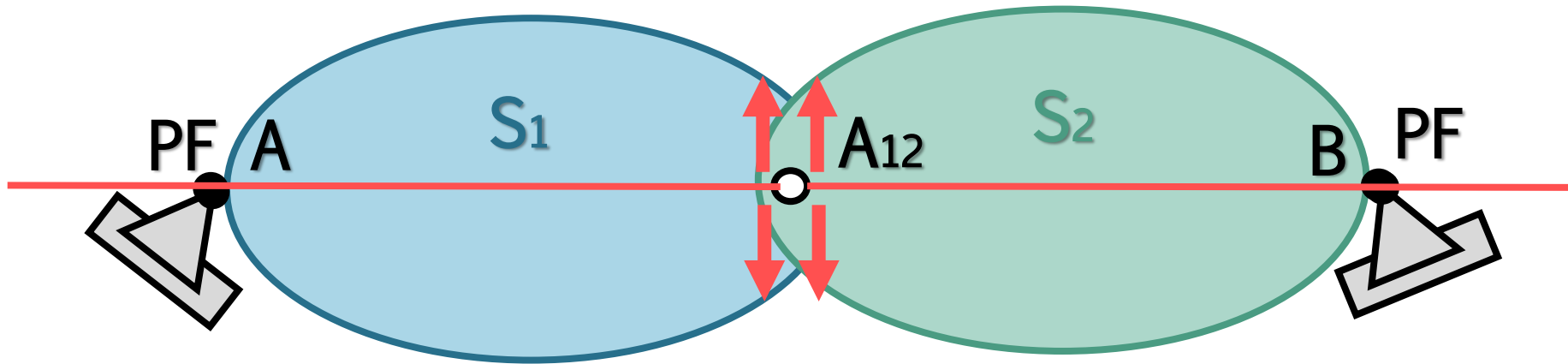
$$\sum M_{S_2}^{A_{12}} = 0$$

$$-q \cdot L \cdot \frac{L}{2} + V_C \cdot L = 0$$

Arco triarticulado



Arco triarticulado



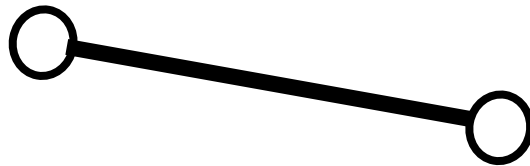
Qué pasaría en este caso?

Conclusión:

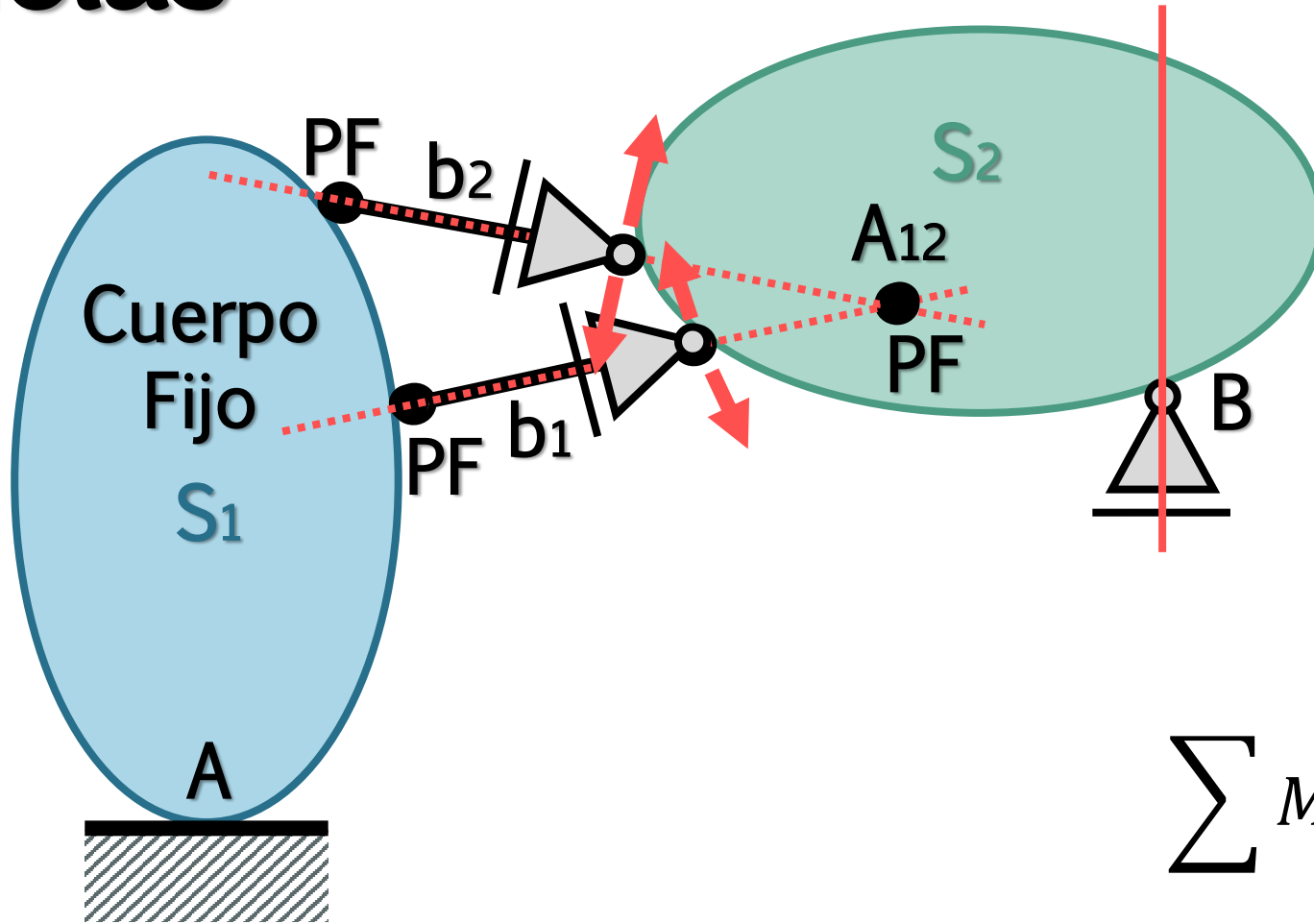
Los 3 puntos no deben estar alineados!

Bielas

- Biela: es una barra biarticulada, de eje recto, sin cargas en toda su longitud.
- Barra: es un cuerpo rígido que tiene una dimensión predominante respecto de las otras dos.
- Sólo puede transmitir esfuerzos en la dirección de su eje.



Bielas

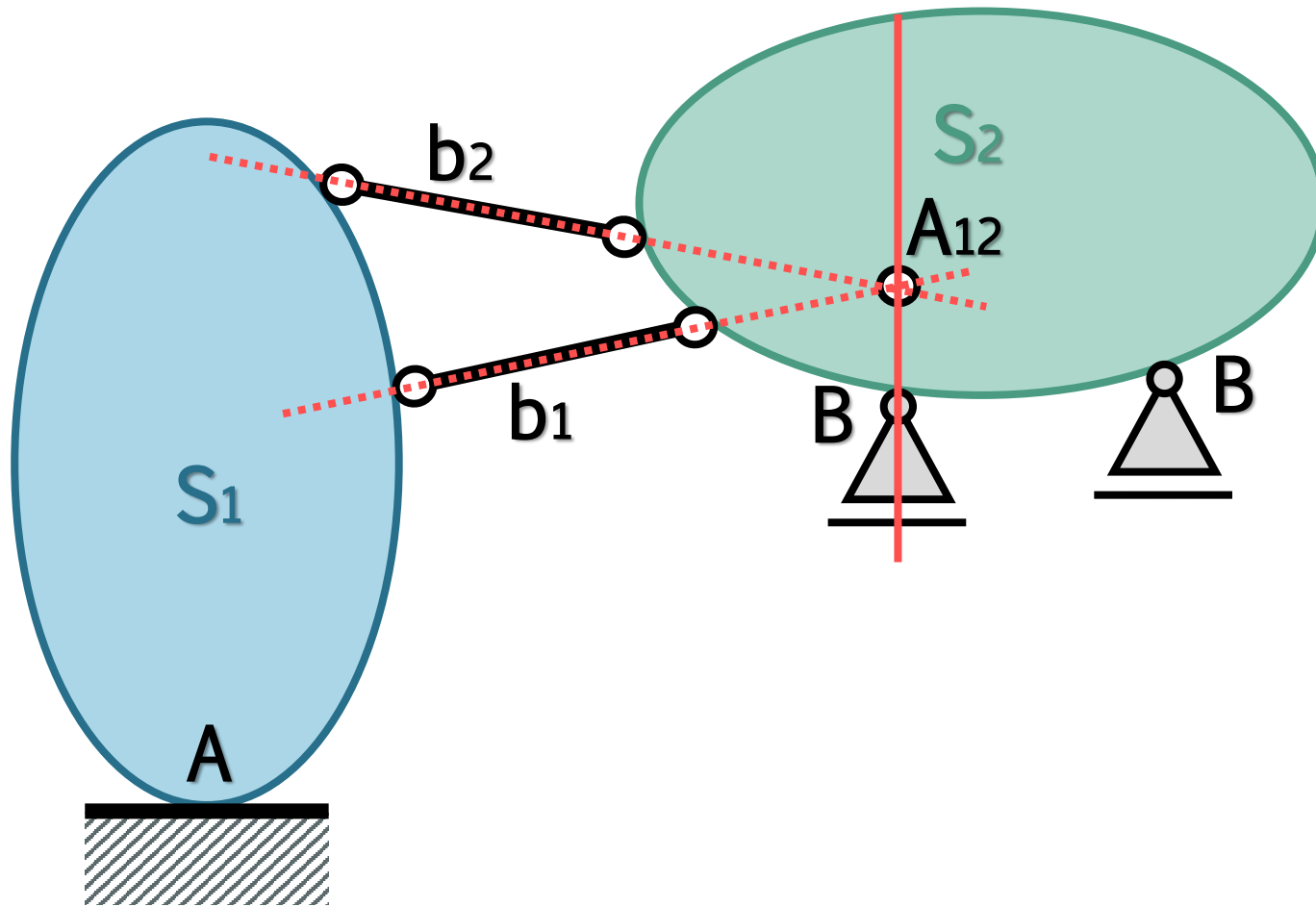


$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

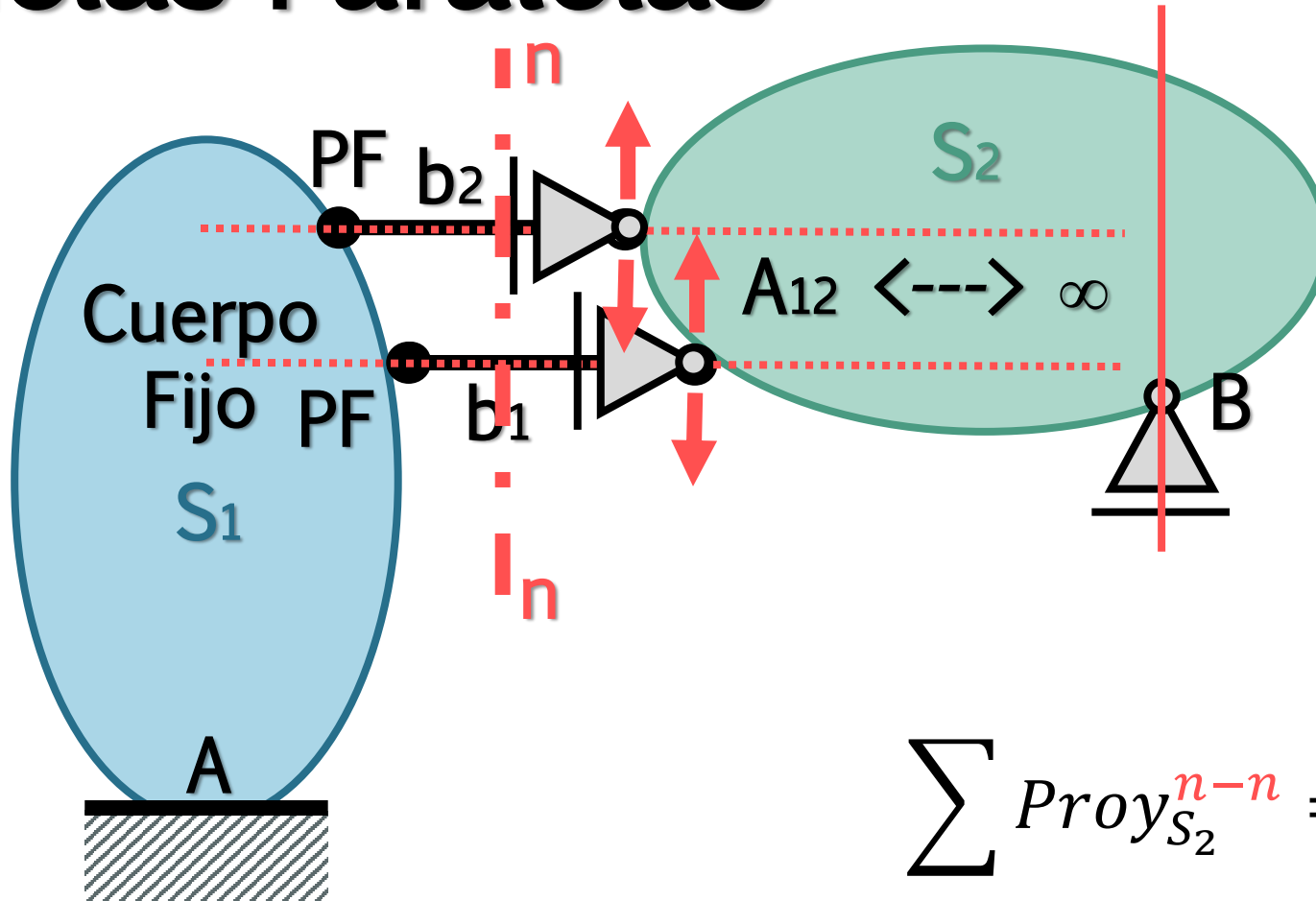
$$\sum M^A = 0$$

$$\sum M_{S_2}^{A_{12}} = 0 \quad \text{o} \quad \sum M_{S_1}^{A_{12}} = 0$$



Qué
pasaría
en este
caso?

Bielas Paralelas



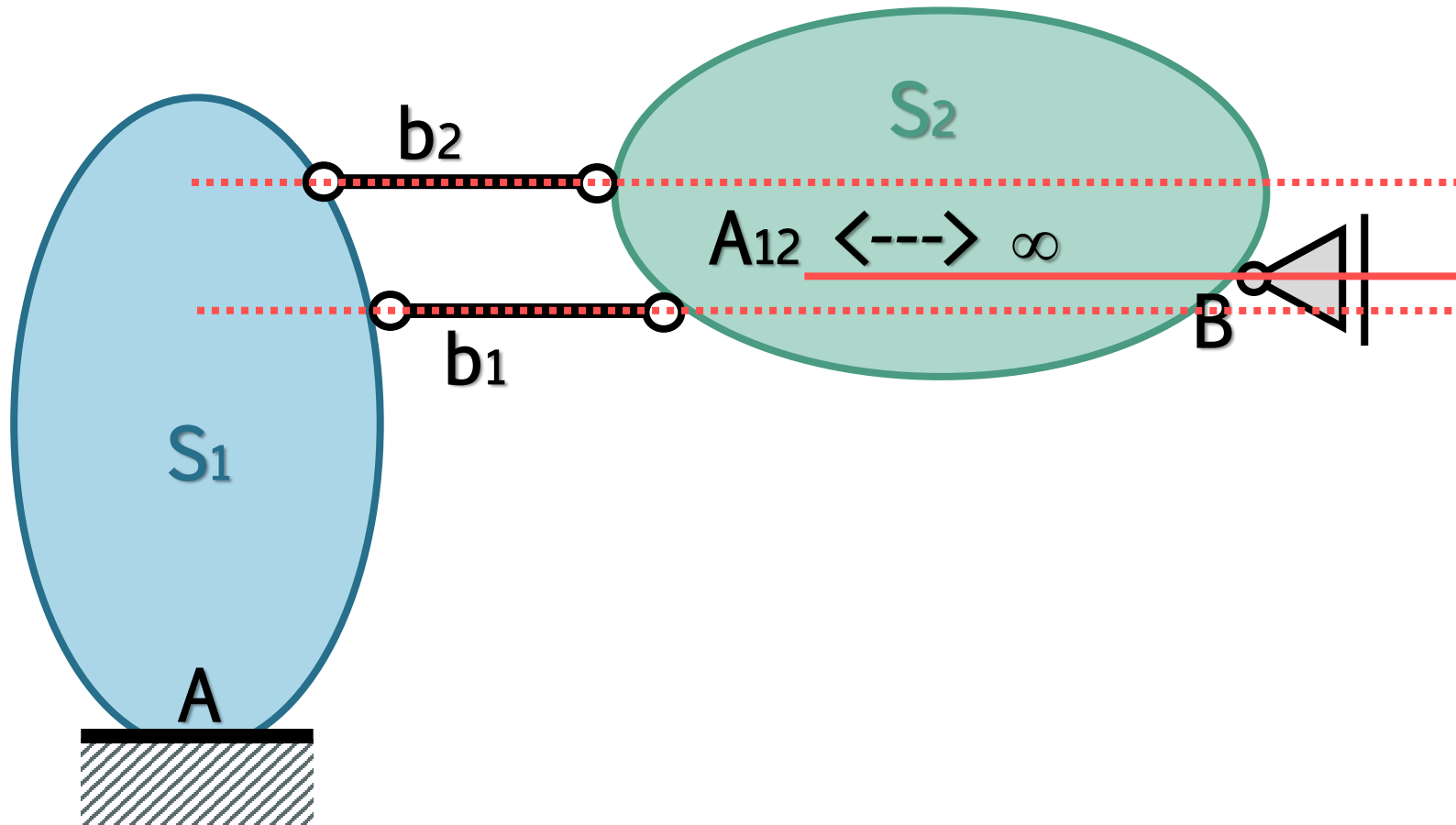
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M^A = 0$$

$$\sum \text{Proy}_{S_2}^{n-n} = 0$$

$$\circ \quad \sum \text{Proy}_{S_1}^{n-n} = 0$$

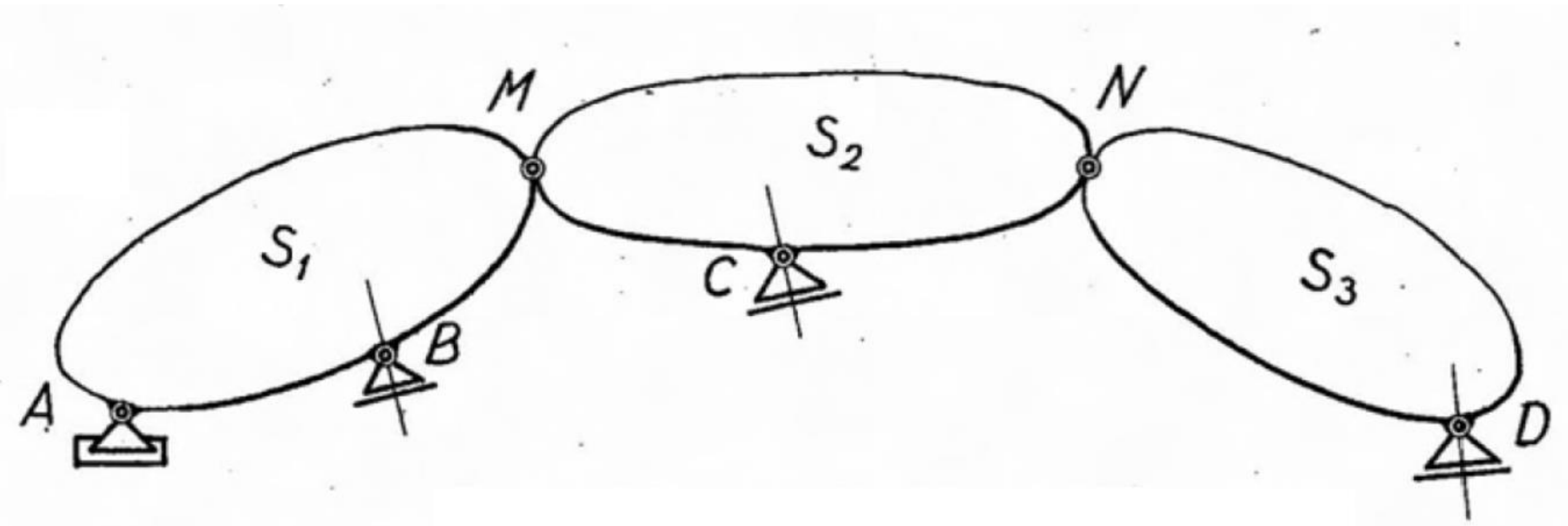


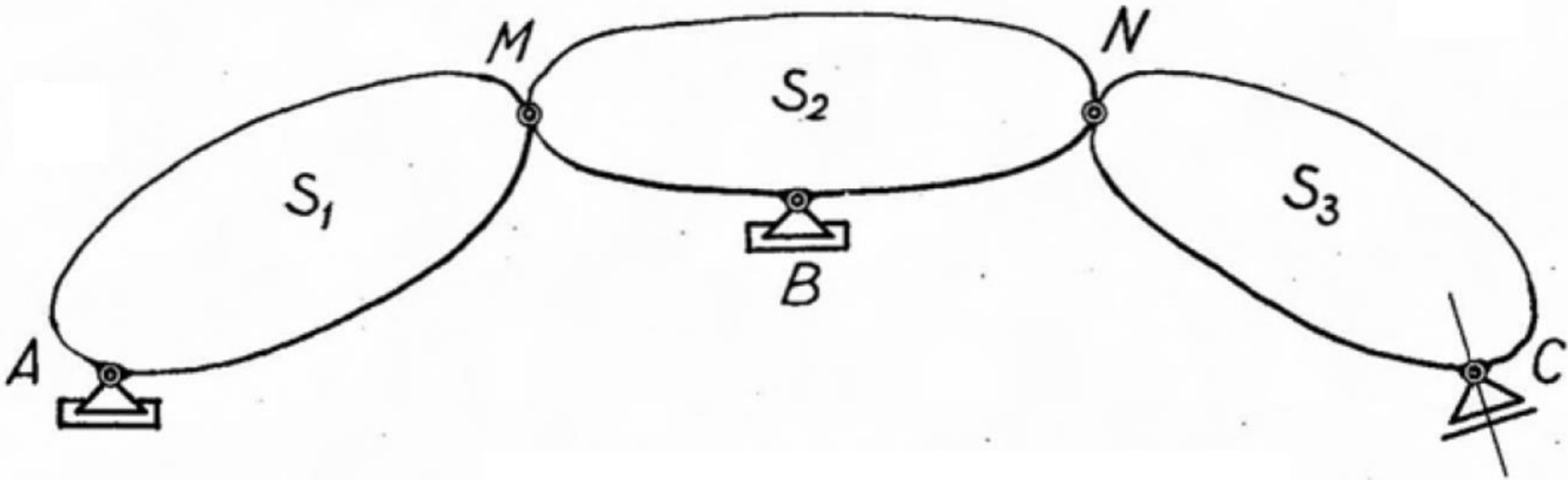
Qué pasaría en este caso?

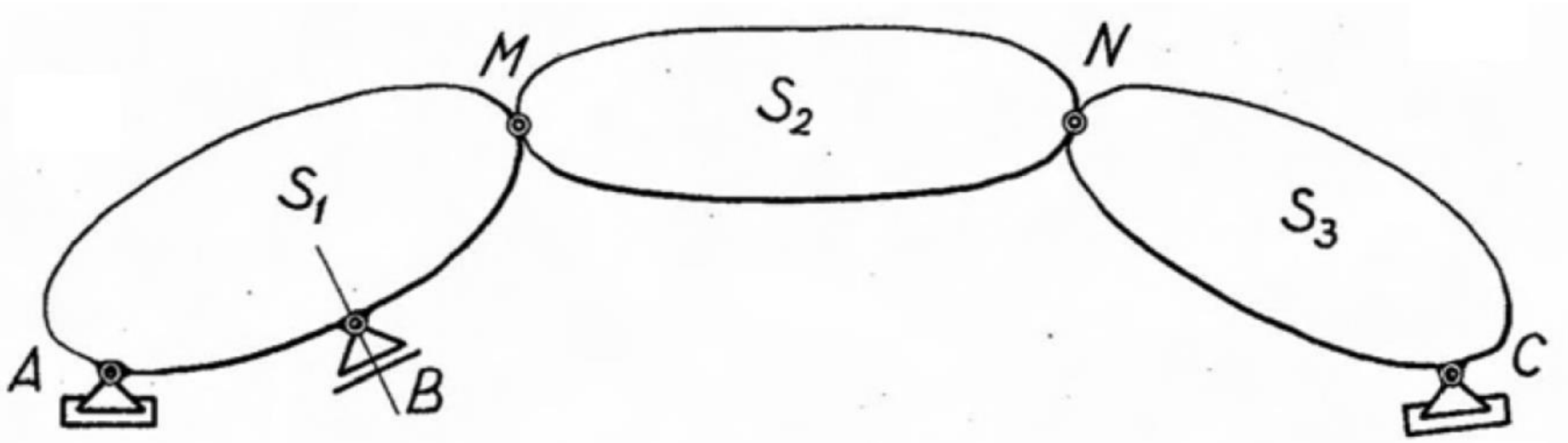
Resumen/Guía para Análisis Cinemático

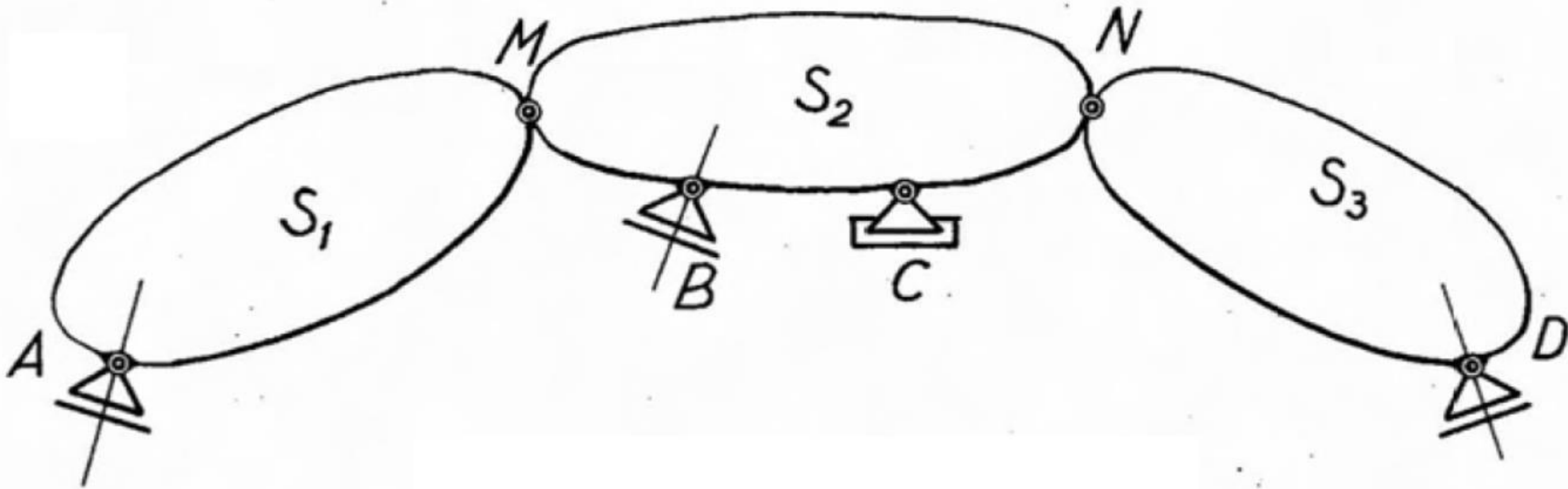
- Buscar **Cuerpos Fijos** (chapa con un empotramiento o chapa con un apoyo fijo y uno móvil cuya dirección no pase por el fijo).
- Buscar **Puntos Fijos** (apoyo fijo o punto donde se cortan las direcciones de 2 móviles).
- Unir **Puntos Fijos** a **Articulaciones Relativas** para ver qué restricción le hace una chapa a la otra. (Un cuerpo fijo le dará un punto fijo a la chapa vinculada. Un punto fijo le dará un punto móvil a la chapa adyacente.)

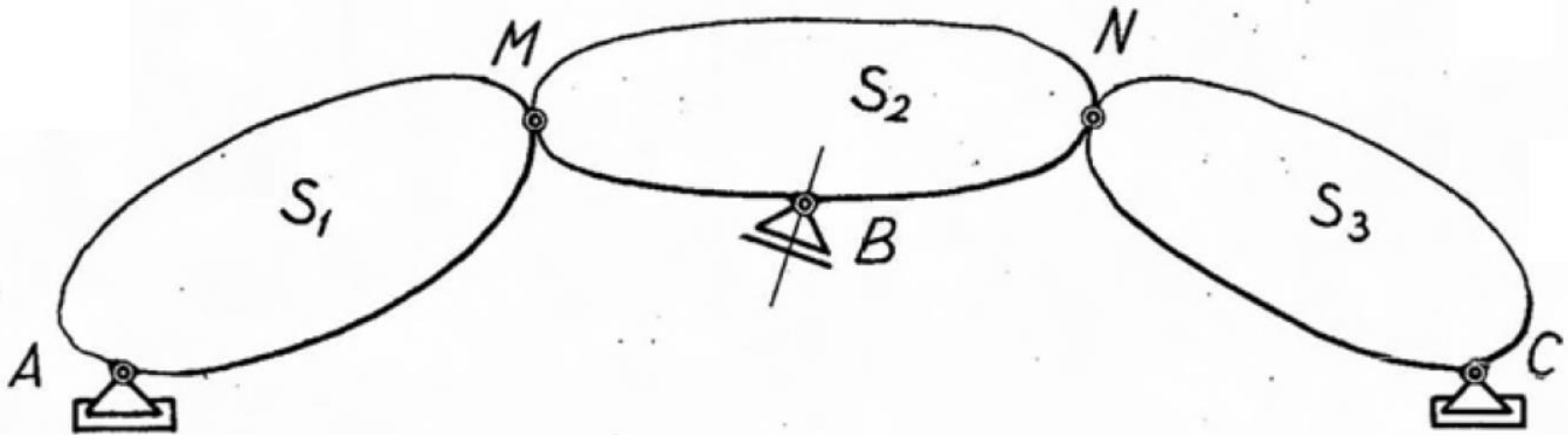




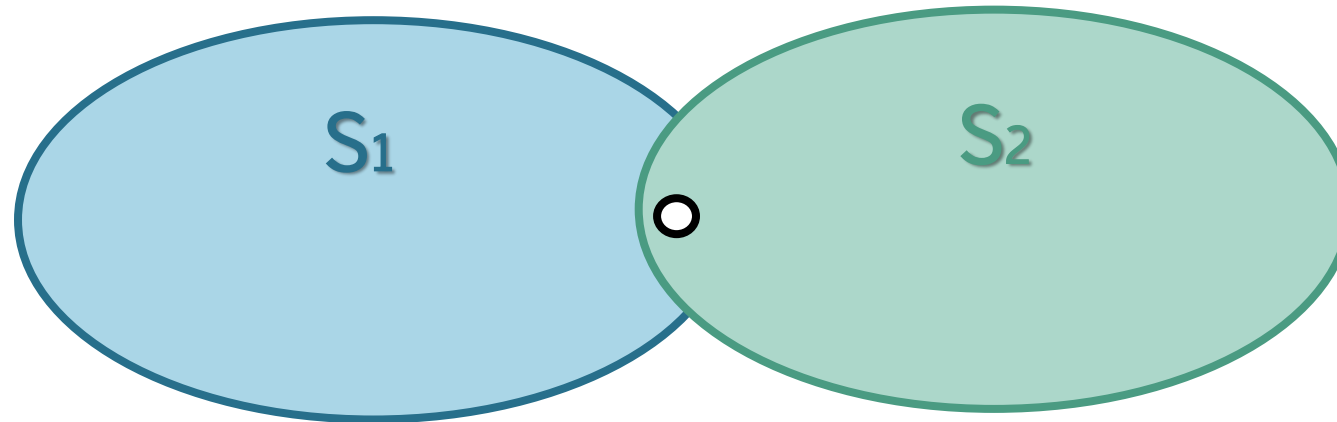






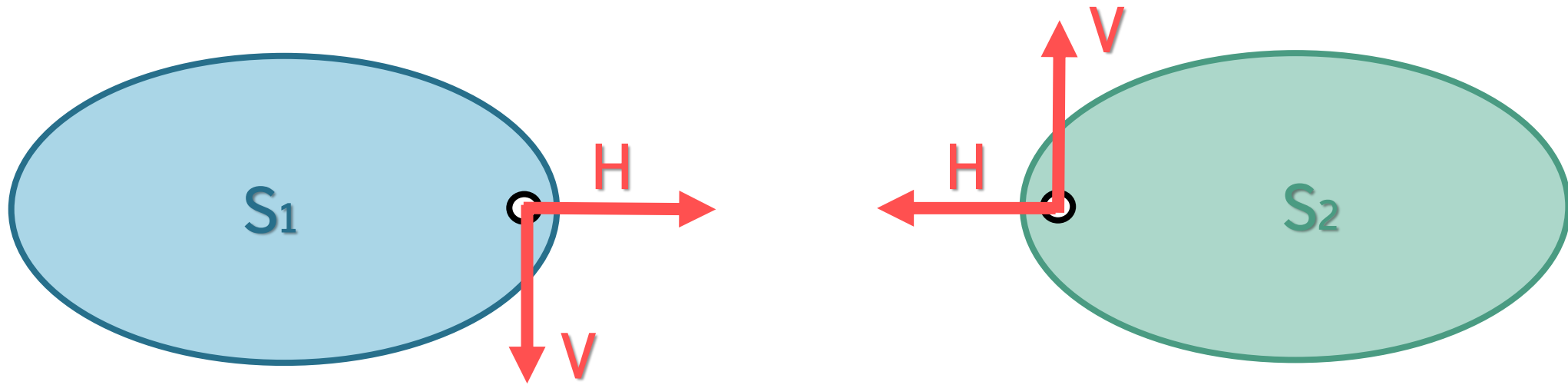


Reacciones de Vínculo Internas

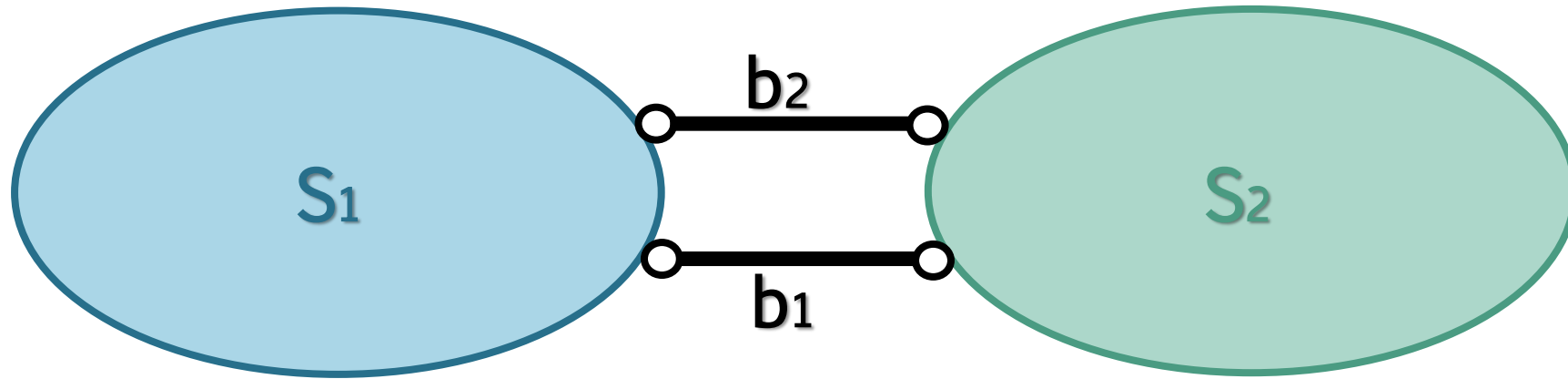


- Qué le hace una chapa a la otra?
- Pasan las fuerzas o momentos de un lado a otro?

Reacciones de Vínculo Internas

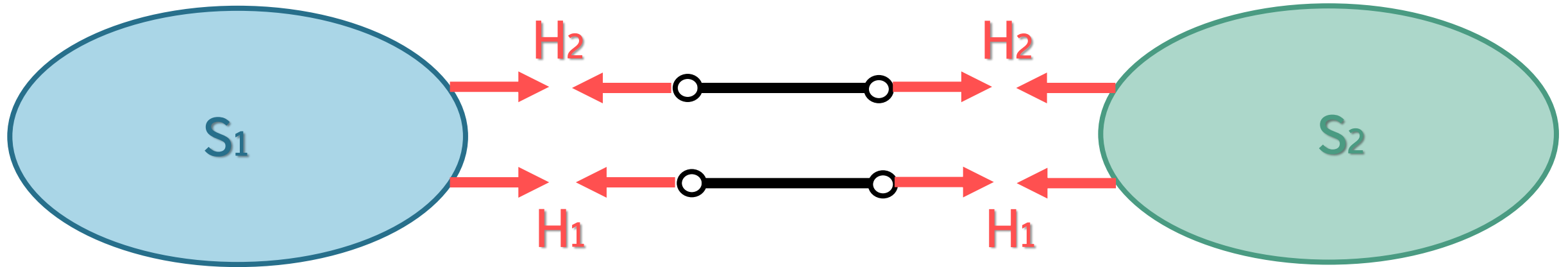


Reacciones de Vínculo Internas

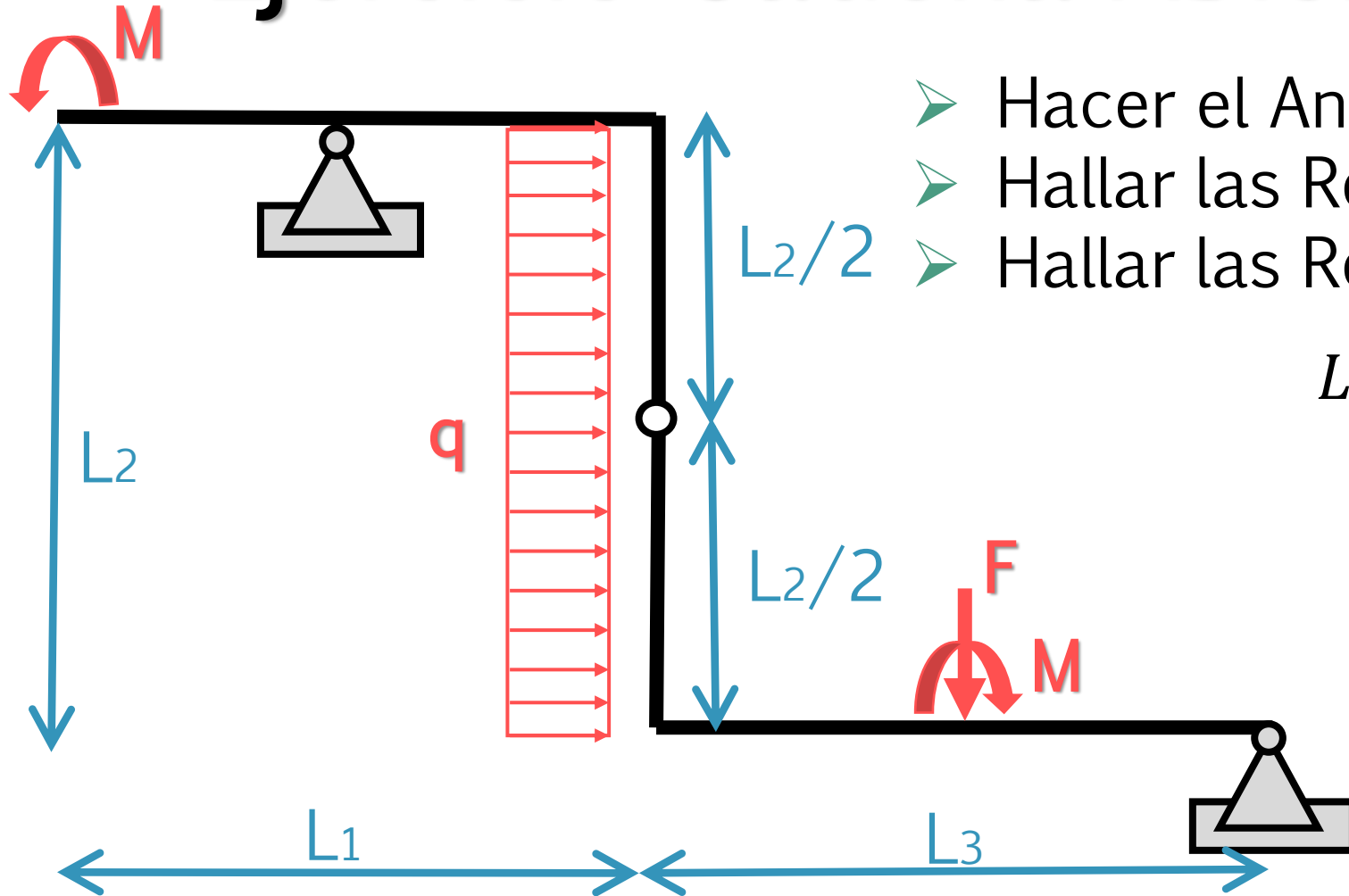


- Qué le hace una chapa a la otra?
- Pasan las fuerzas o momentos de un lado a otro?

Reacciones de Vínculo Internas



Ejercicio Cadena Abierta de 2 Chapas



- Hacer el Análisis Cinemático
- Hallar las Reacciones de Vínculo Externas
- Hallar las Reacciones de Vínculo Internas

$$L_1 = 3m \quad L_2 = 4m \quad L_3 = 3m$$

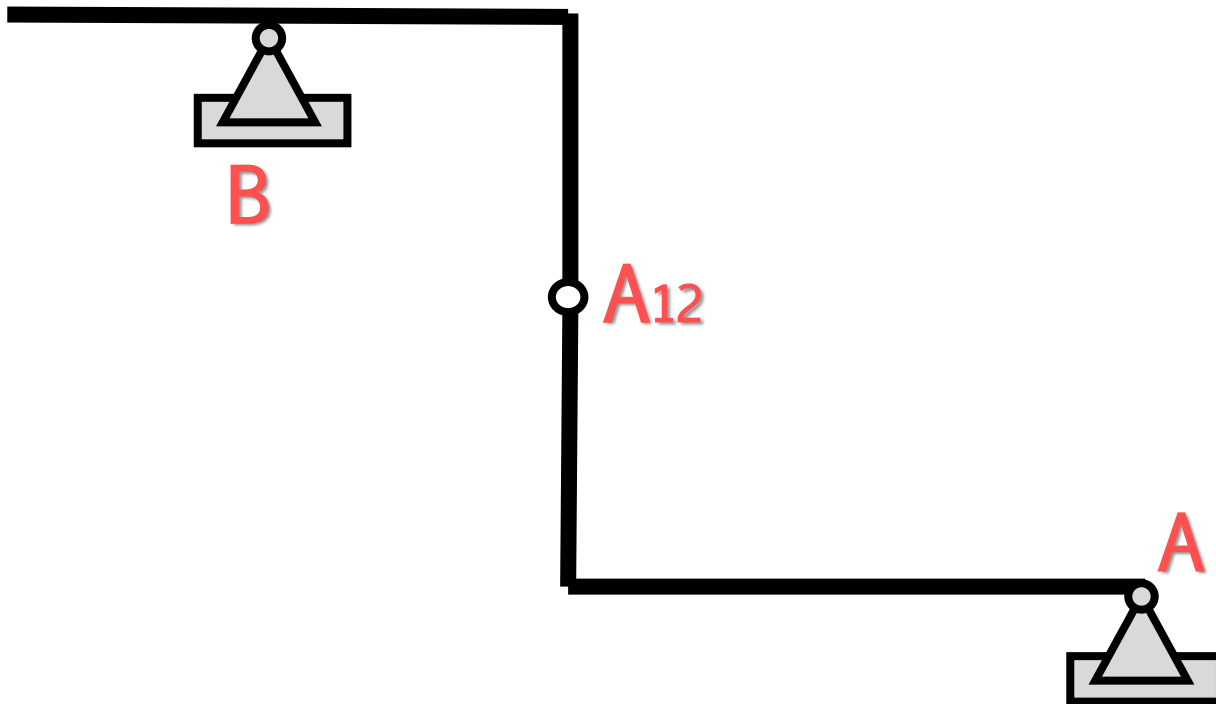
$$F = 10 \text{ kN}$$

$$M = 5 \text{ kNm}$$

$$q = 10 \text{ kN/m}$$

Análisis Cinemático

Nota: para este paso no me interesa como esta cargada la estructura.

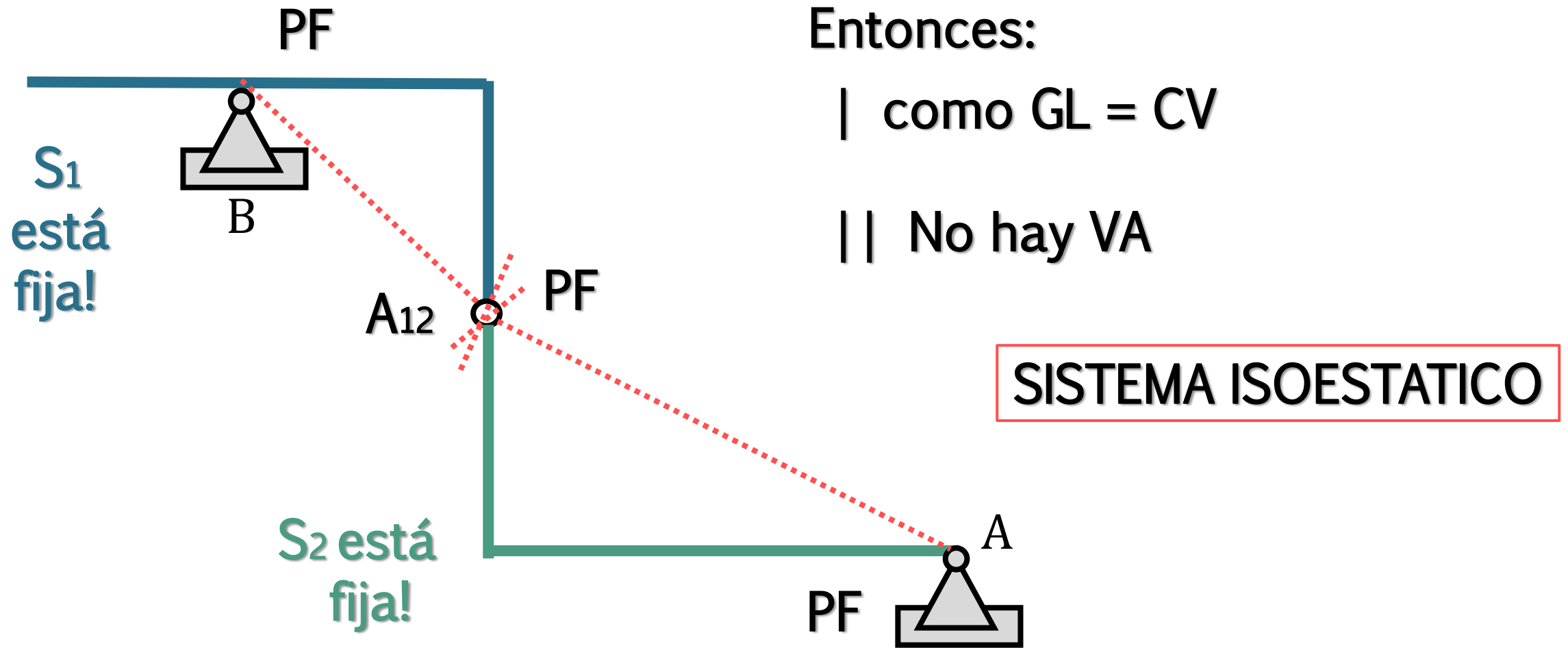


$$GL = N + 2 = 4$$

$$CV = 2 + 2 = 4$$

$GL = CV$, entonces chequeamos si no hay vinculación aparente

Chequeamos si hay vinculación aparente:



Equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M^A = 0$$

$$\sum M_{S_1}^{A_{12}} = 0 \quad y/o \quad \sum M_{S_2}^{A_{12}} = 0$$



$$\sum F_x = 0$$

$$-H_A + H_B + (q \times 4) = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V_A - V_B - F = 0$$

$$\sum M^A = 0$$

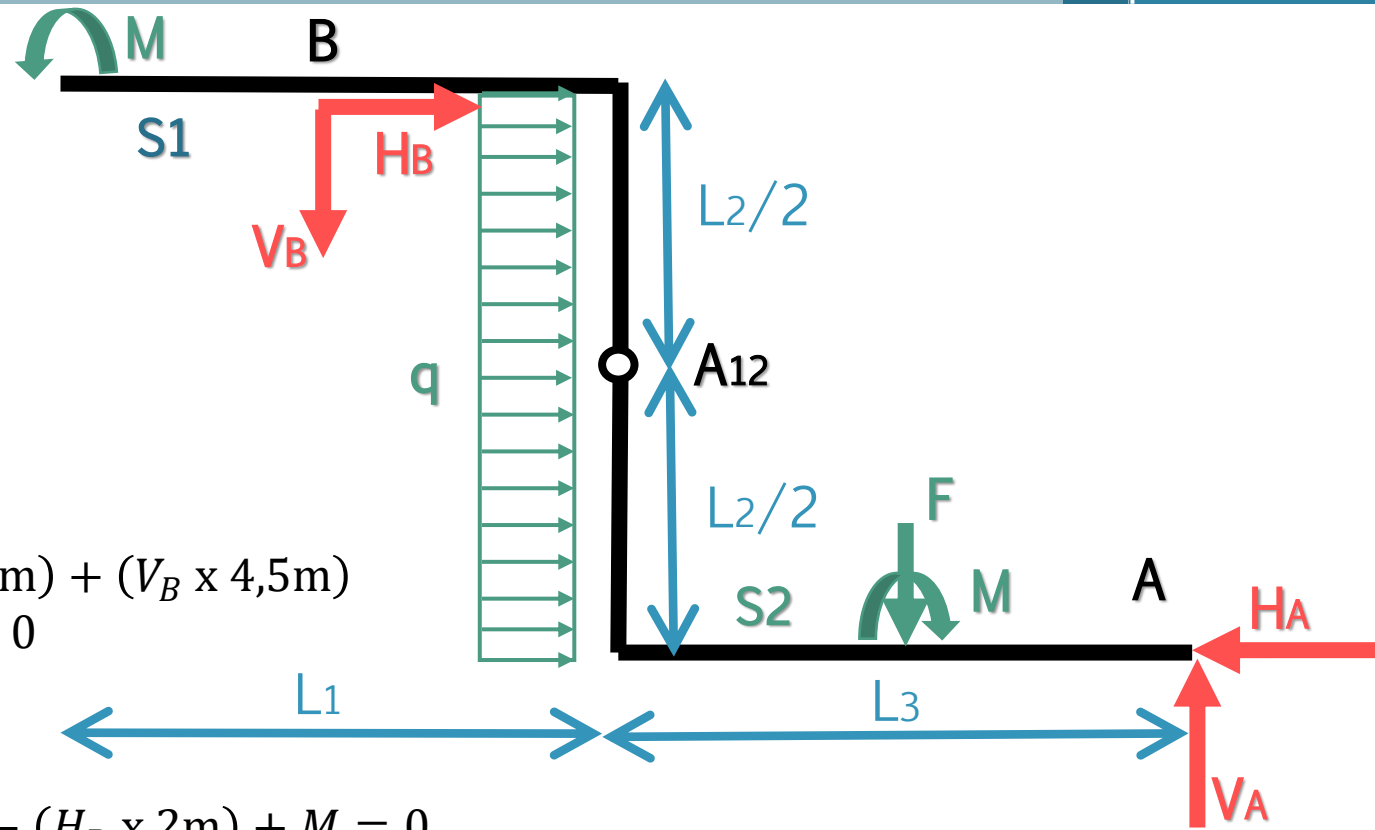
$$-M + M + (F \times 1,5m) - (q \times 4m \times 2m) + (V_B \times 4,5m) - (H_B \times 4m) = 0$$

$$\sum M_{S_1}^{A_{12}} = 0$$

$$-(q \times 2m \times 1m) + (V_B \times 1,5m) - (H_B \times 2m) + M = 0$$

$$\sum M_{S_2}^{A_{12}} = 0$$

$$+(q \times 2m \times 1m) - (F \times 1,5m) - M - (H_A \times 2m) + (V_A \times 3m) = 0$$



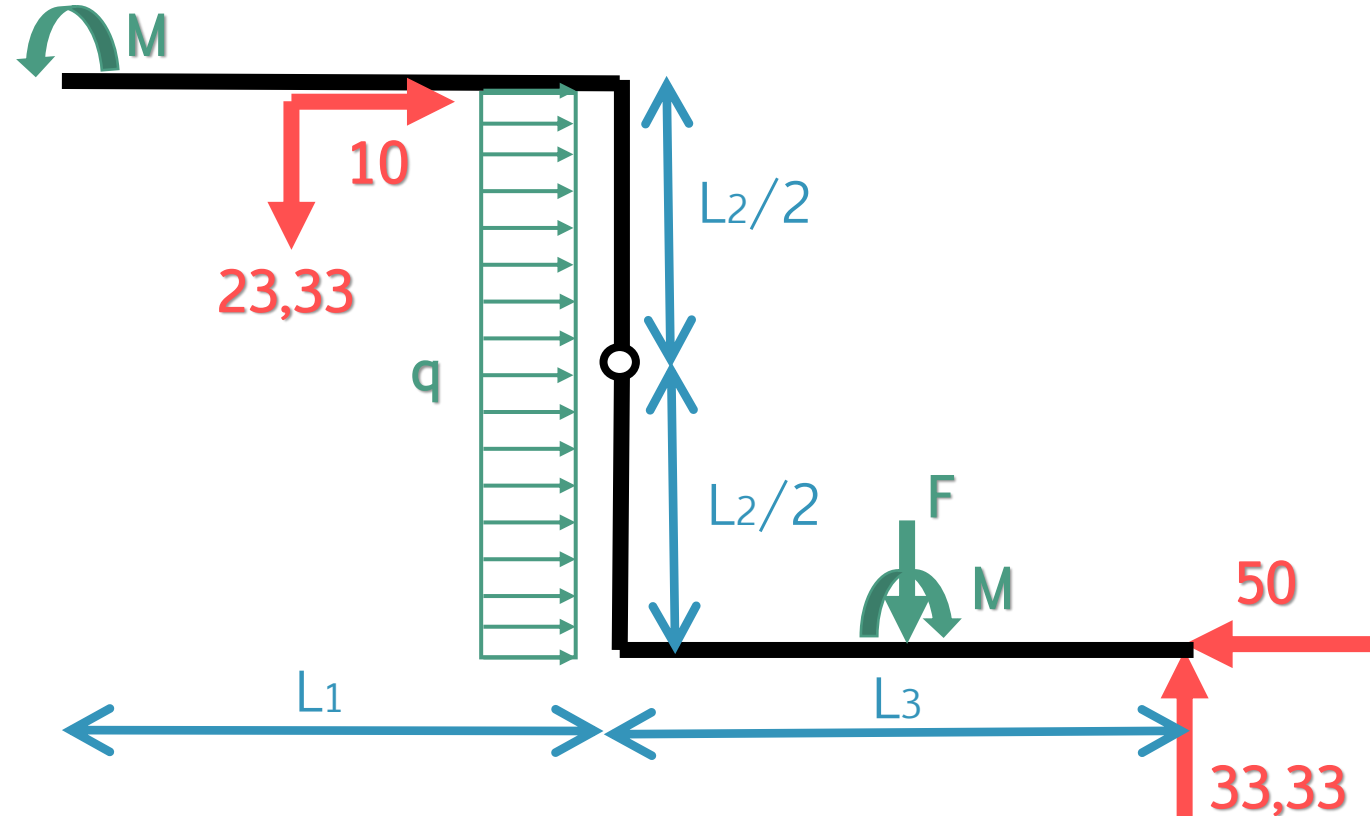
Resultados Reacciones de Vinculo Externas

$$H_A = 50$$

$$H_B = 10$$

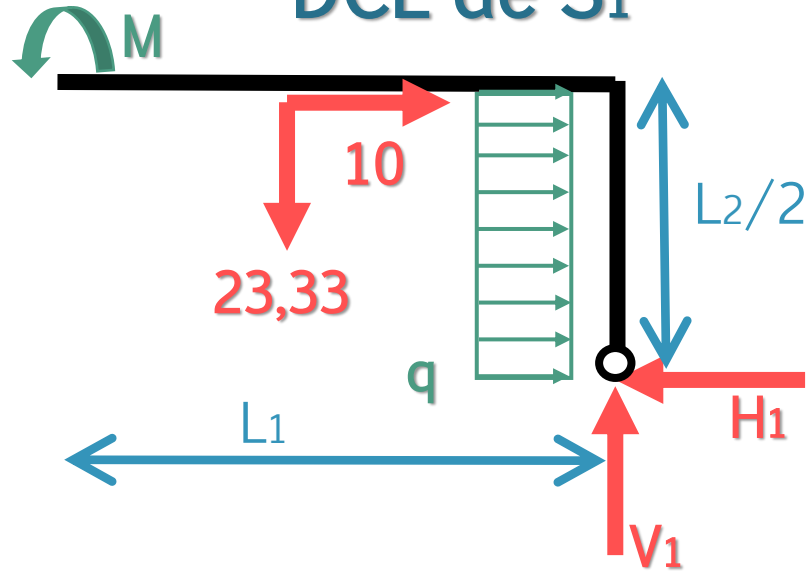
$$V_A = 33,33$$

$$V_B = 23,33$$



Reacciones de Vinculo Internas - Aislar Chapas

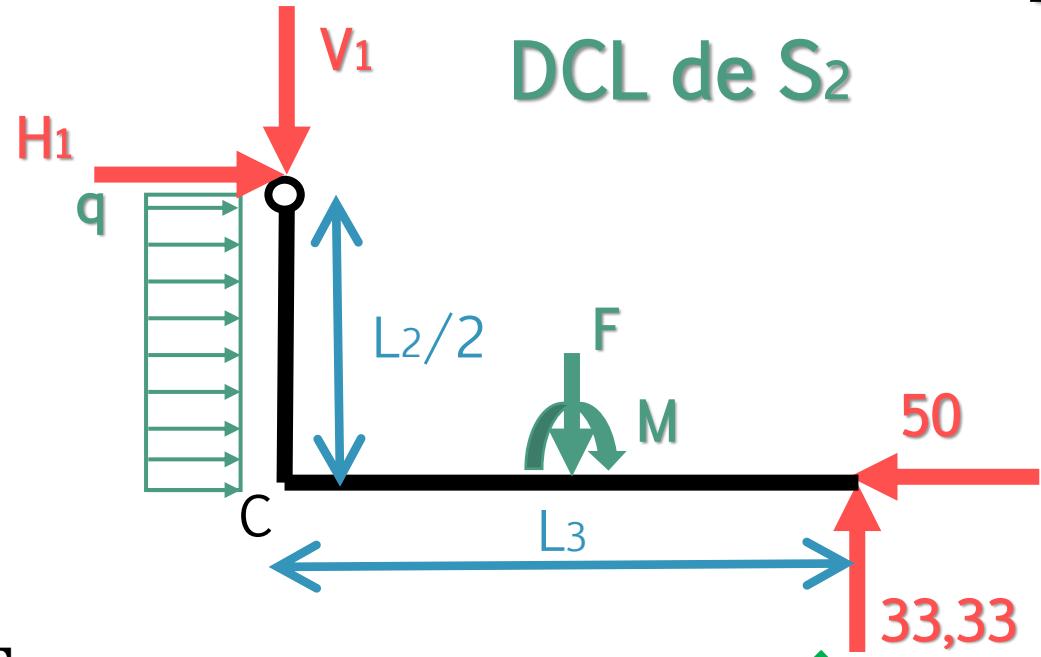
DCL de S1



$$\sum F_x = 0 \quad 10 - H_1 + (q \times 2) = 0 \quad \boxed{H_1 = 30}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_1 - 23,33 = 0 \quad \boxed{V_1 = 23,33}$$

DCL de S2



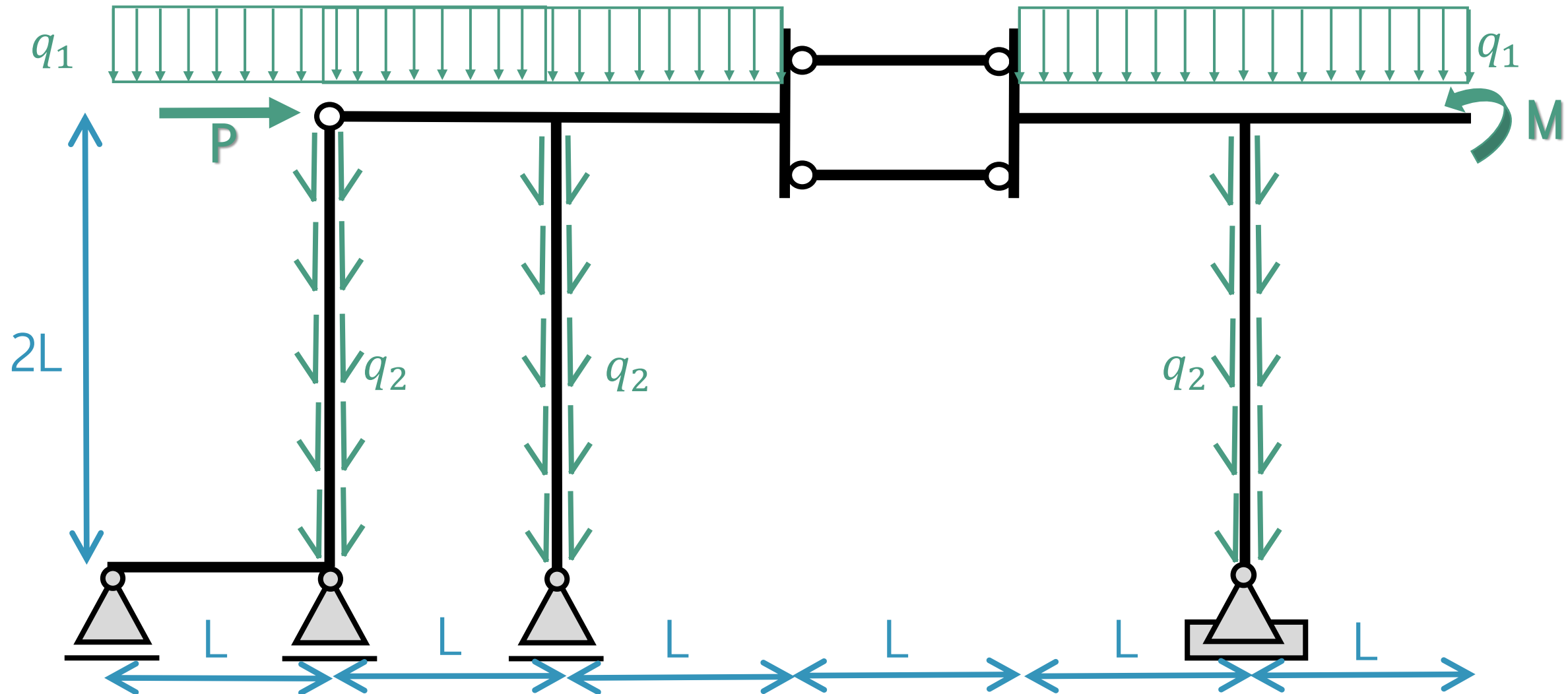
$$\sum F_x = 0 \quad H_1 + (q \times 2) - 50 = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum F_y = 0 \quad -V_1 - F + 33,33 = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum M_C = 0 \quad -H_1 \times 1,5 - q \times 2 \times 1 - F \times 1,5 - M + 33,33 \times 3 = 0 \quad \checkmark$$



Hallar las Reacciones de Vínculo:



Análisis Cinemático:

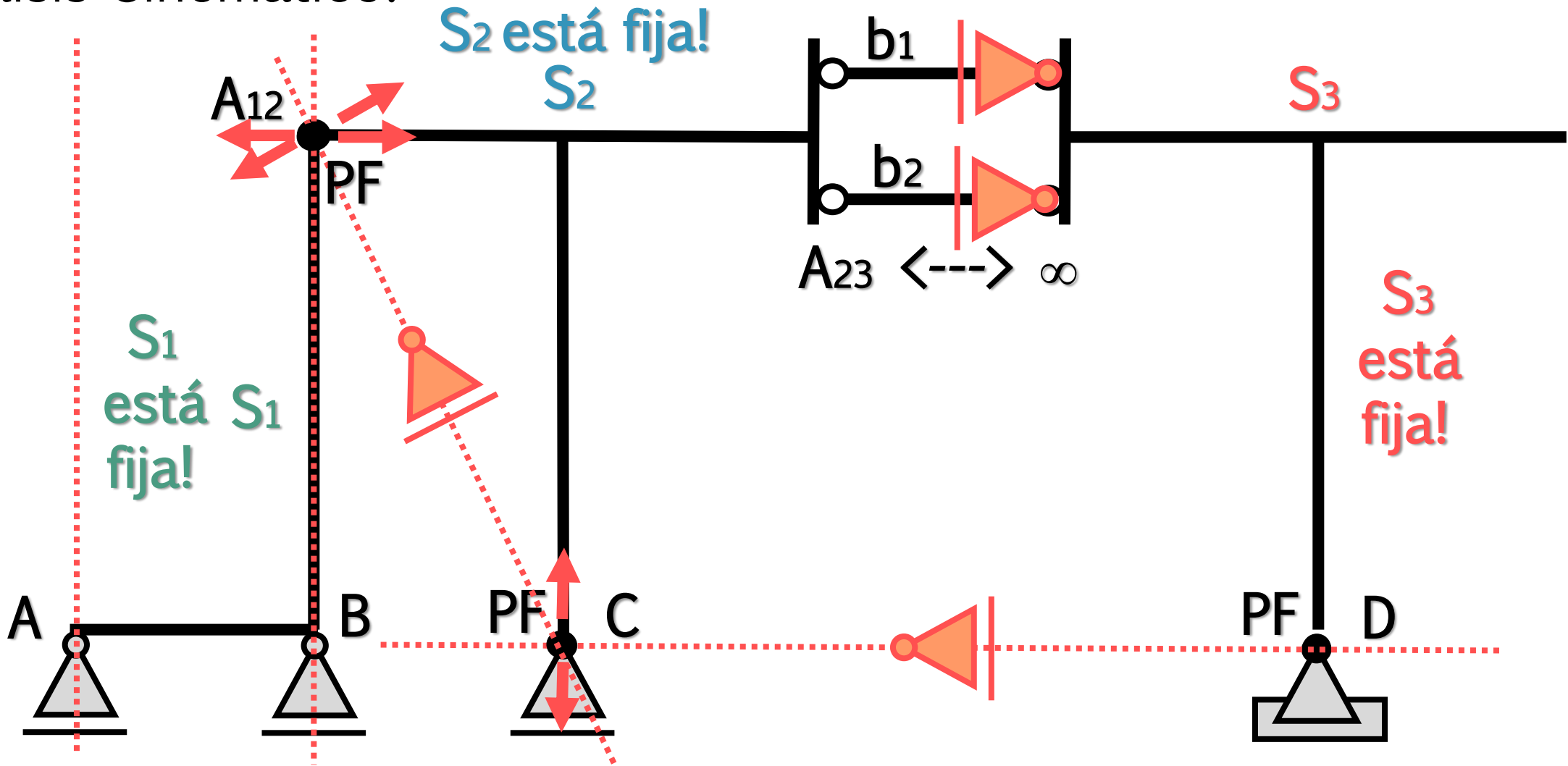
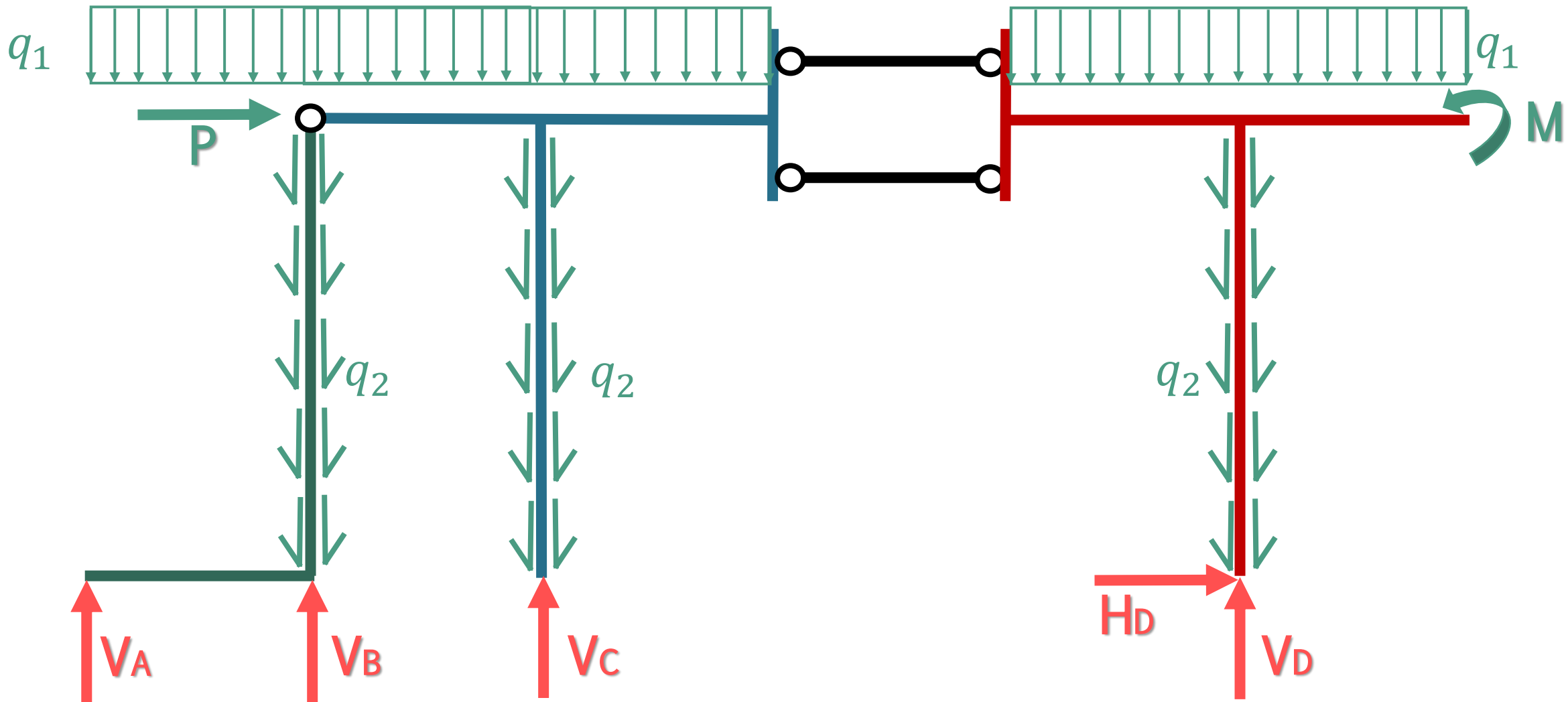


Diagrama de Cuerpo Libre:



Equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M^D = 0$$

$$\sum M_{S_1}^{A_{12}} = 0 \quad \circ \quad \sum M_{S_2, S_3}^{A_{12}} = 0$$

$$\sum \text{Proy}_{S_3}^{b-b} = 0 \quad \circ \quad \sum \text{Proy}_{S_1, S_2}^{b-b} = 0$$



$$\sum F_x = 0$$

$$H_D + P = 0$$

$$\sum M_{S_1}^{A_{12}} = 0$$

$$-V_A \cdot L + q_1 L \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\sum \text{Proy}_{S_3}^{b-b} = 0$$

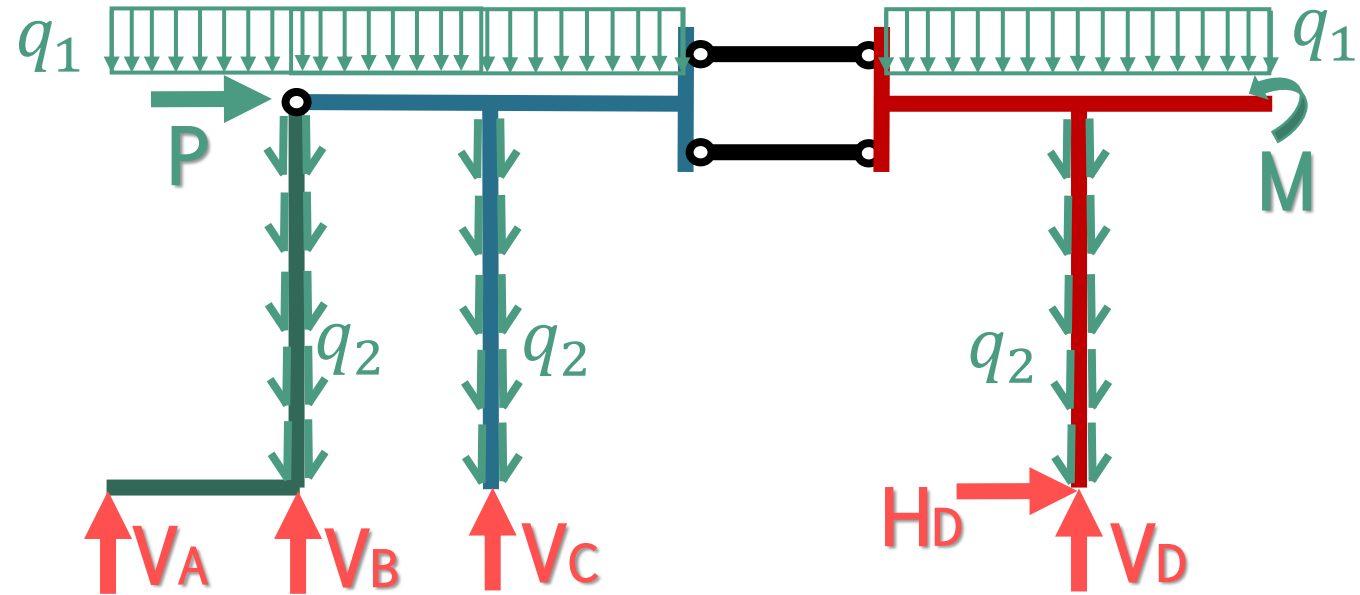
$$V_D - q_2 \cdot 2L - q_1 \cdot 2L = 0$$

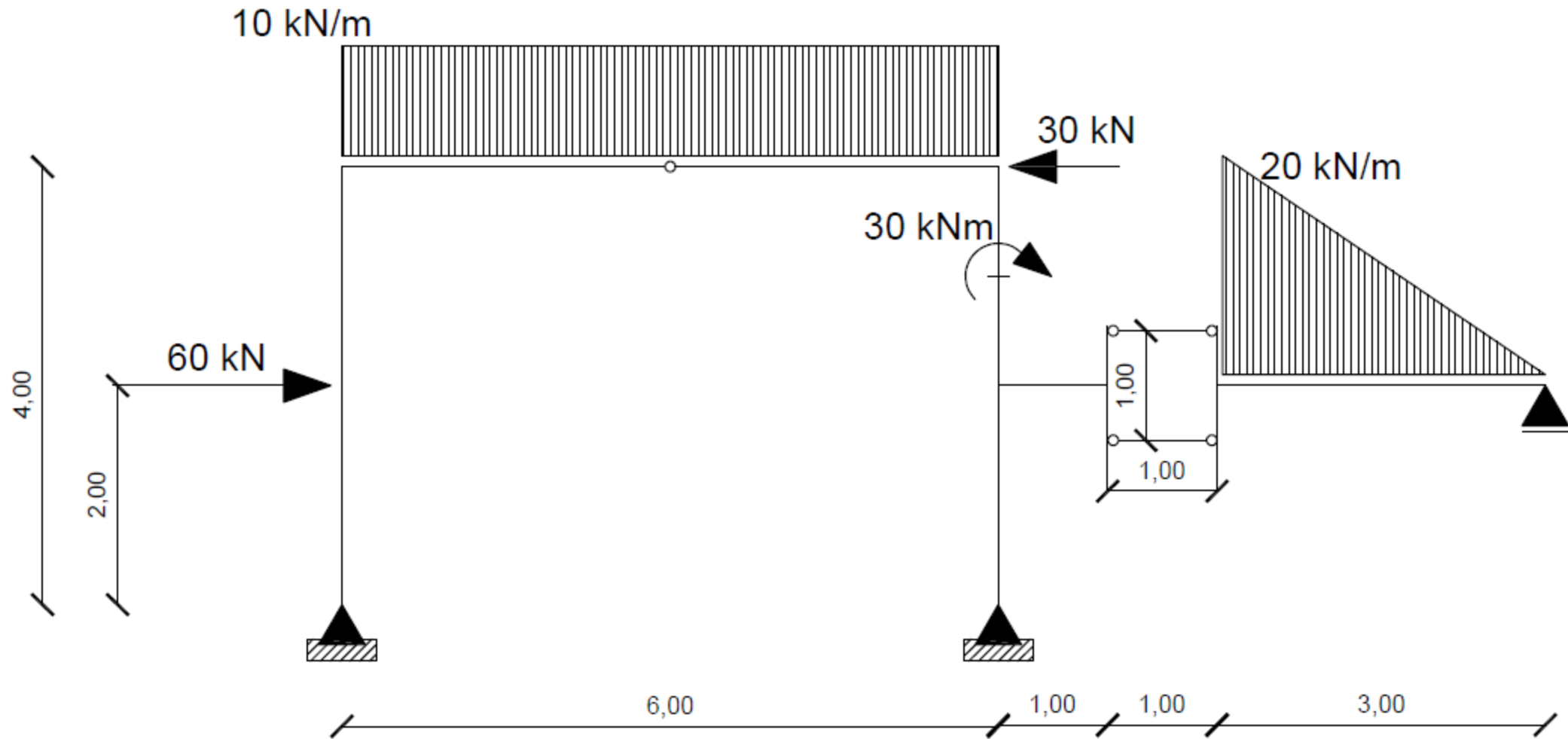
$$\sum F_y = 0$$

$$V_A + V_B + V_C + V_D - q_1 \cdot 5L - q_2 \cdot 2L \cdot 3 = 0$$

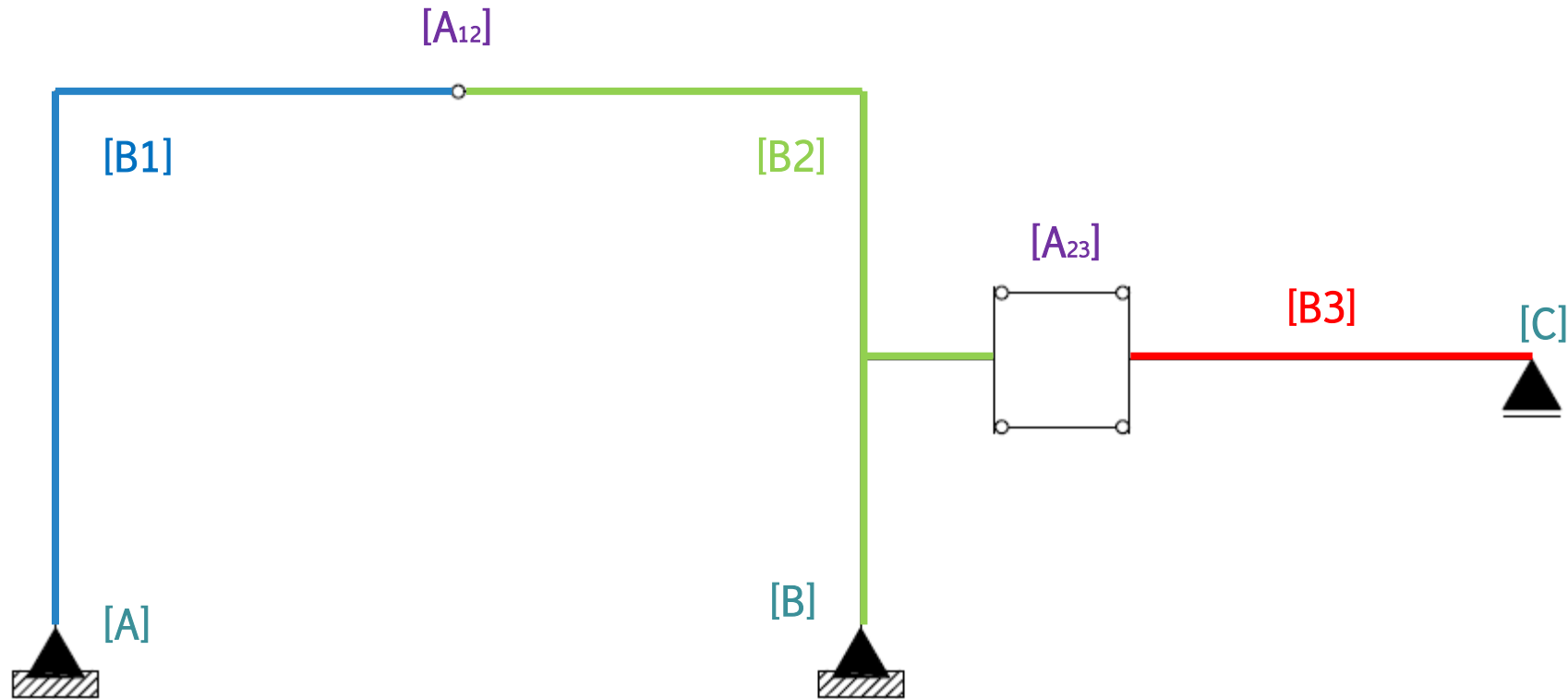
$$\sum M^D = 0$$

$$-5L \cdot V_A - 4L \cdot V_B - 3L \cdot V_C - 2L \cdot P + 4L \cdot 2L \cdot q_2 + 3L \cdot 2L \cdot q_2 + 3,5L \cdot 3L \cdot q_1 + M = 0$$

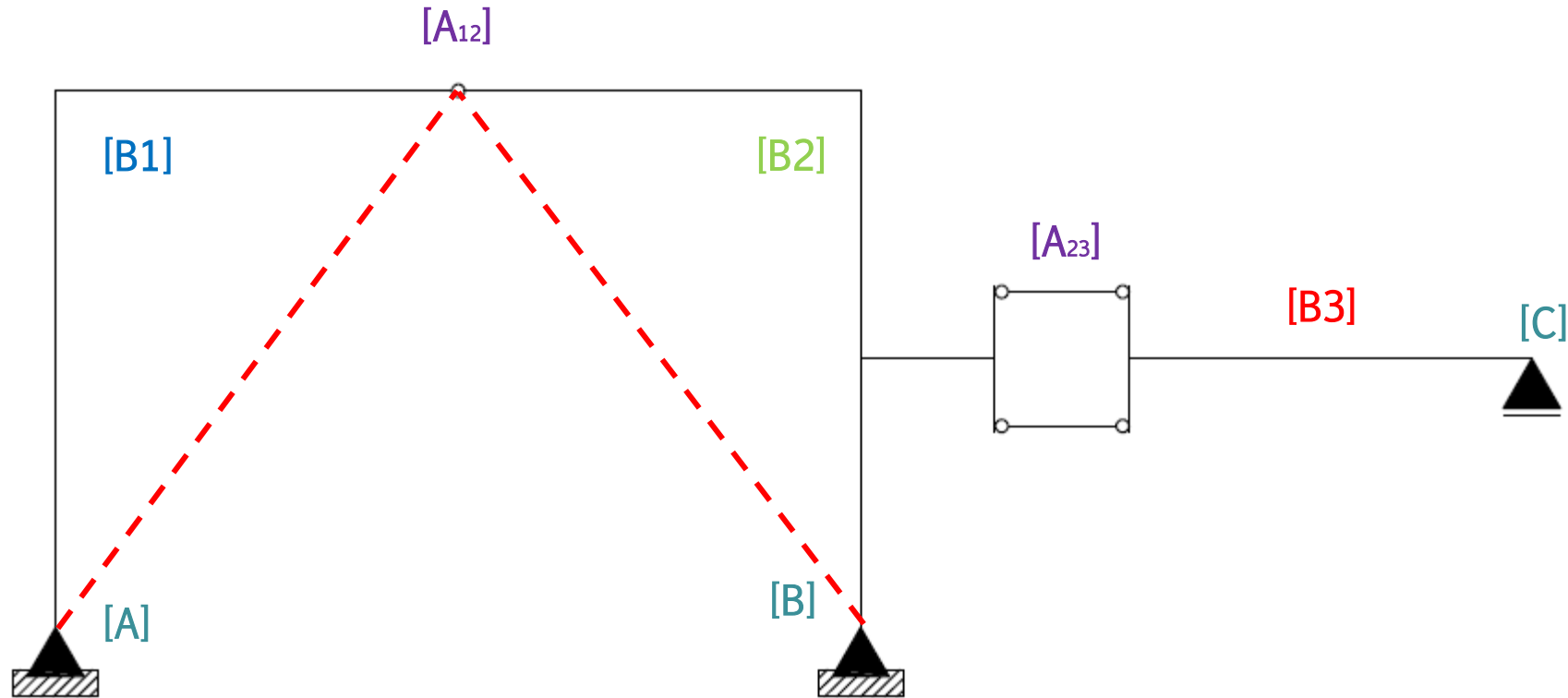




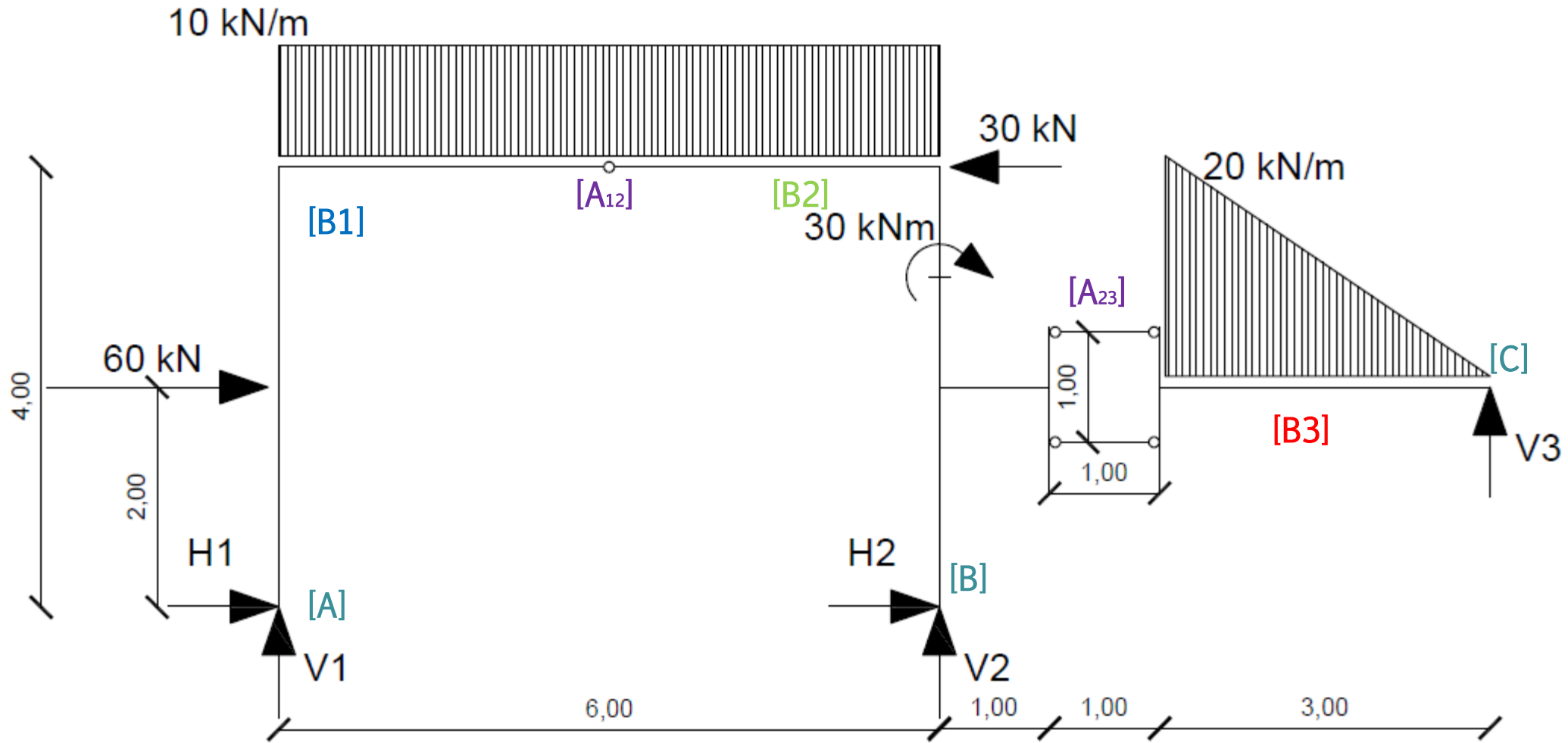
1) Identificamos los elementos del problema:



2) Analizamos cinemáticamente el problema:



3) Planteamos las condiciones de equilibrio:



3) Planteamos las condiciones de equilibrio:

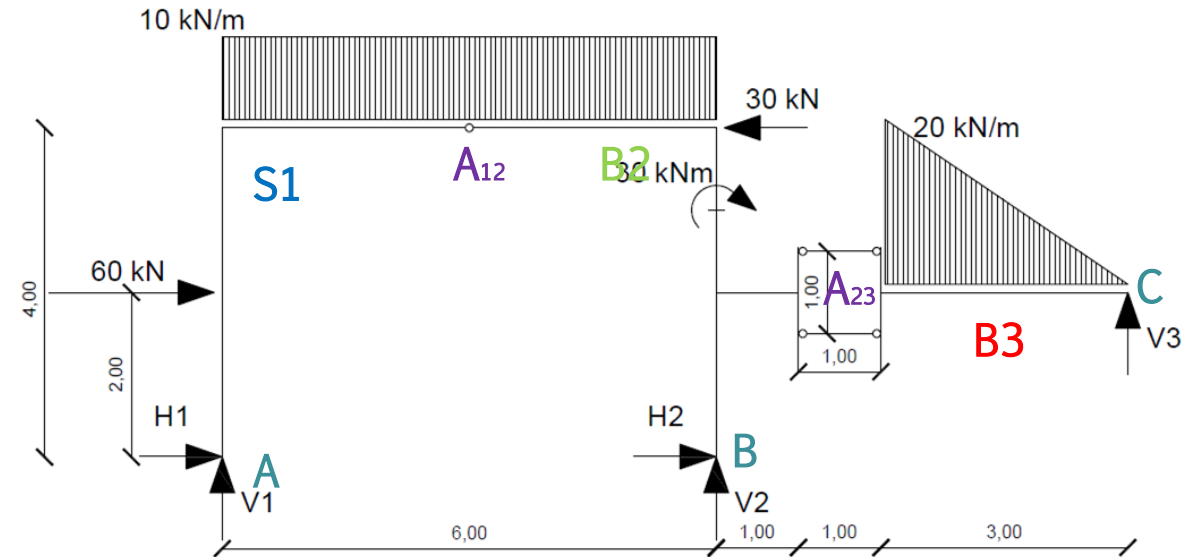
$$\sum F_x = 60kN - 30kN + H_1 + H_2 = 0$$

$$\sum F_y = -10 \frac{kN}{m} \cdot 6m - 20 \frac{kN}{m} \cdot \frac{3m}{2} + V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

$$\sum M_A = -10 \frac{kN}{m} \cdot 6m \cdot 3m - 60kN \cdot 2m + 30kN \cdot 4m - 30kNm + V_2 \cdot 6m + V_3 \cdot 11m - \frac{20 \frac{kN}{m} \cdot 3m}{2} \cdot 9m = 0$$

$$\sum M_{B1}^{A12} = 10 \frac{kN}{m} \cdot 3m \cdot 1.5m + 60kN \cdot 2m + H_1 \cdot 4m - V_1 \cdot 3m = 0$$

$$\sum \text{Proy. } F_{B3}^{A23} = -\frac{20 \frac{kN}{m} \cdot 3m}{2} + V_3 = 0$$



4) Resolvemos y obtenemos el resultado:

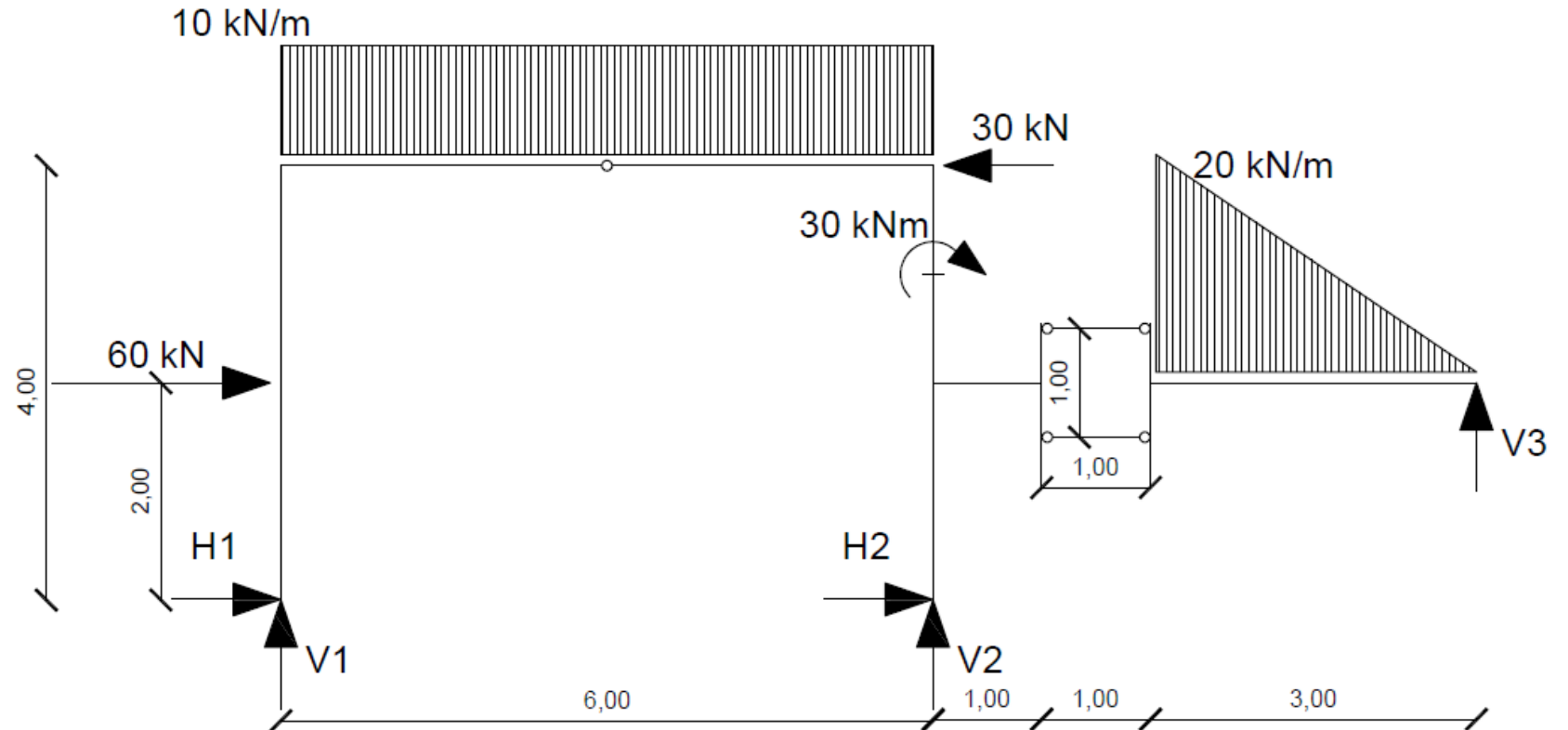
$$H_1 = -15kN$$

$$H_2 = -15kN$$

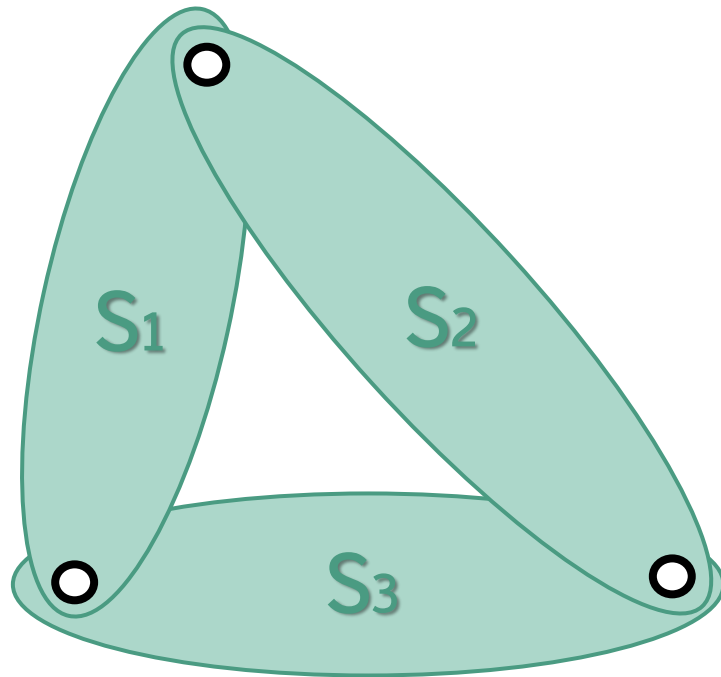
$$V_1 = 35kN$$

$$V_2 = 25kN$$

$$V_3 = 30kN$$



Tres Chapas Vinculadas en Cadena



- › GL de S1 aislada: 3
- › GL de S2 aislada: 3
- › GL de S3 aislada: 3

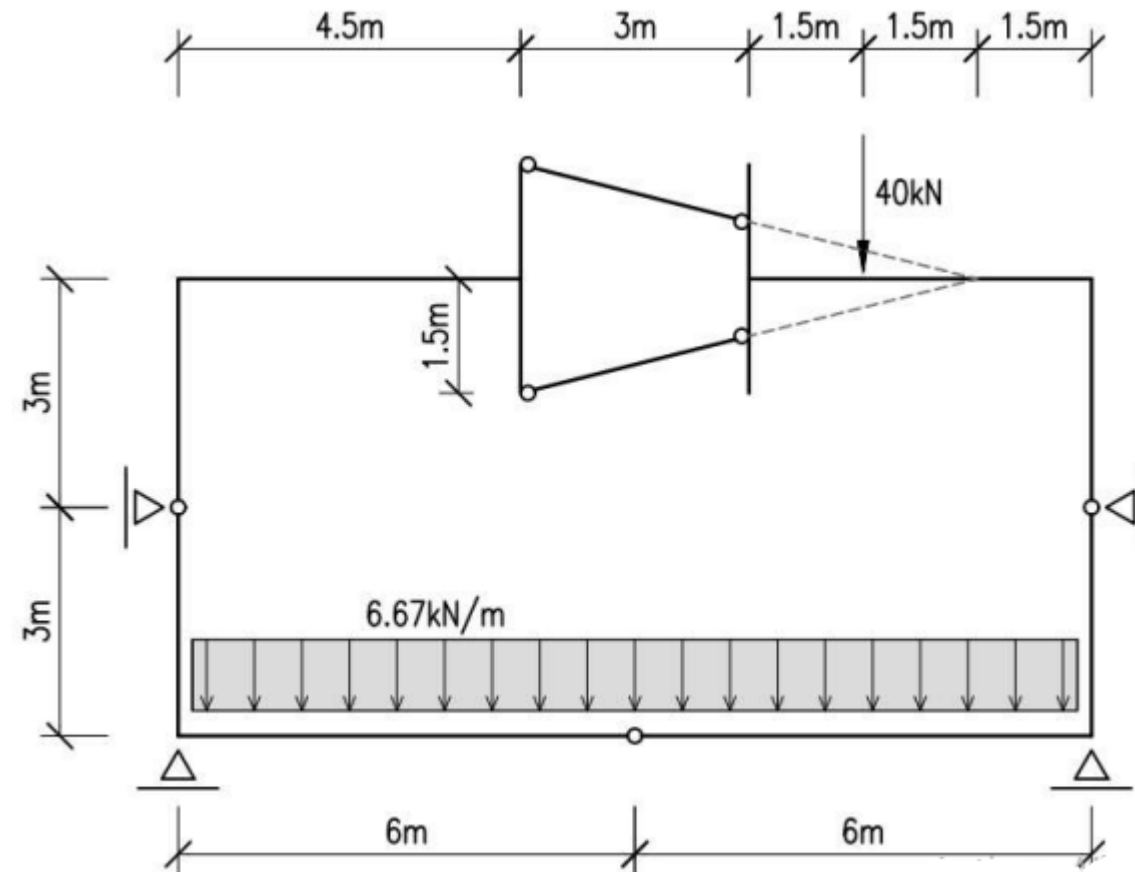
- › NV internos A12: 2
- › NV internos A23: 2
- › NV internos A13: 2

- › GL del sistema:
 $3 + 3 + 3 - 2 - 2 - 2 = 3$

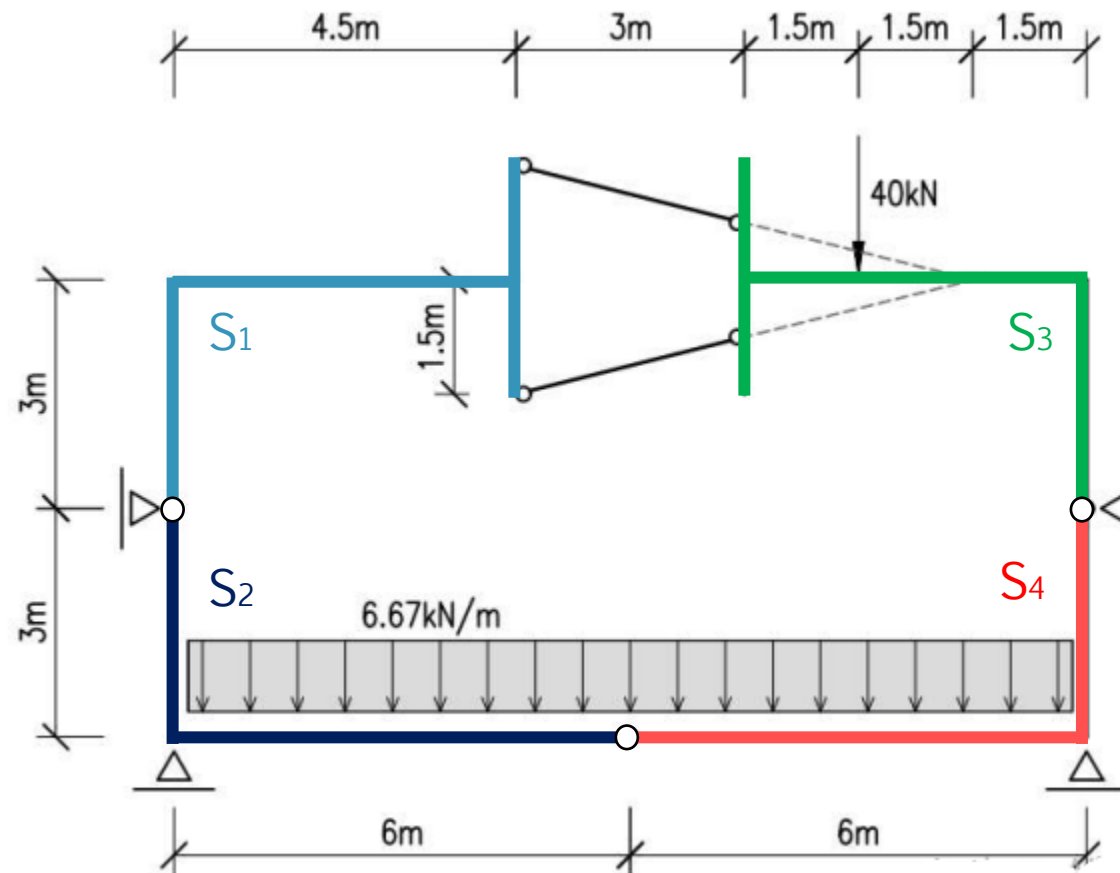
$$GL = N_{chapas}$$

Enunciado:

- Análisis cinemático
- Calcular las reacciones de vínculo externo



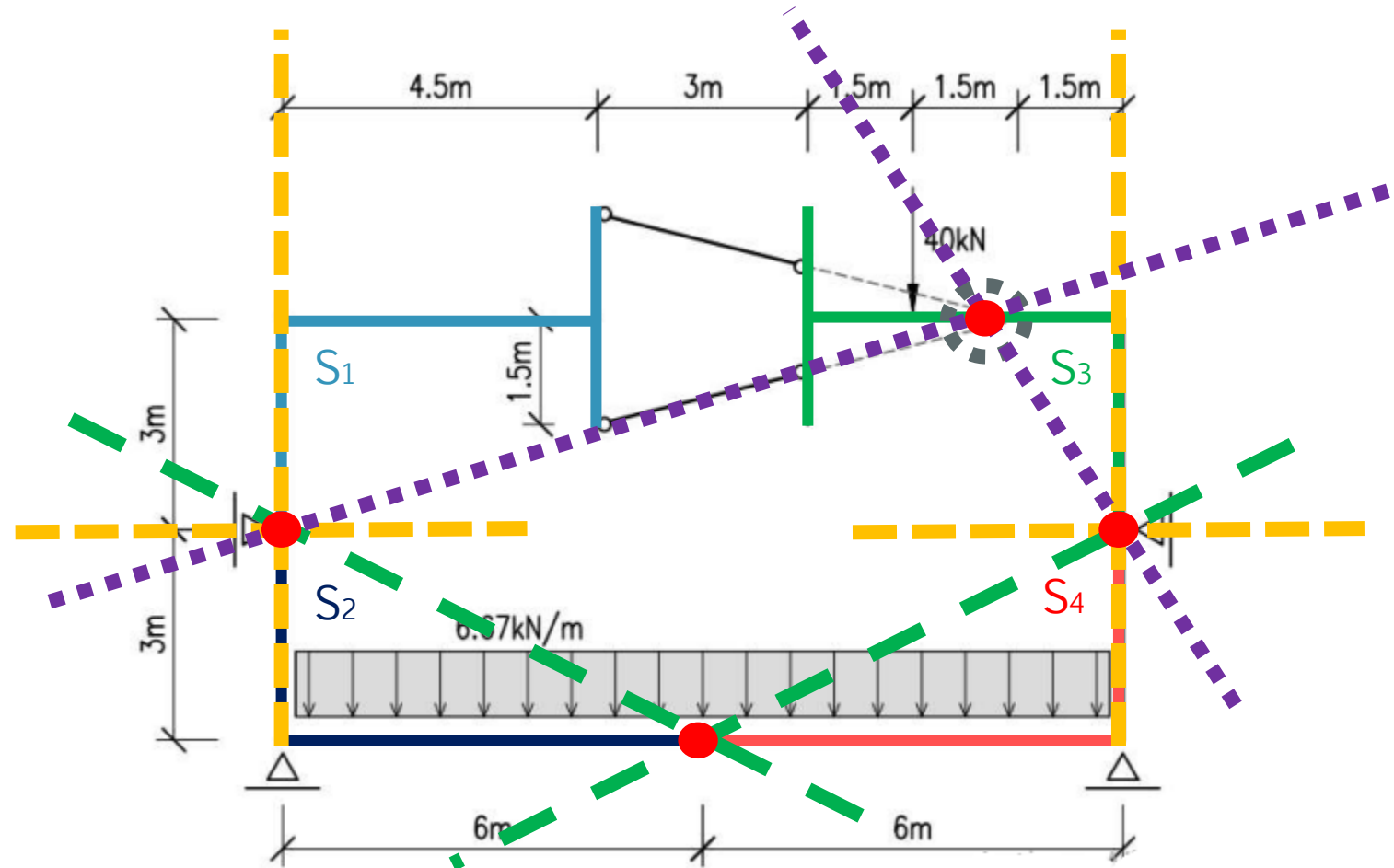
¿Cuántas chapas hay?



Cadena cerrada

Grados de libertad: 4

Cv:4

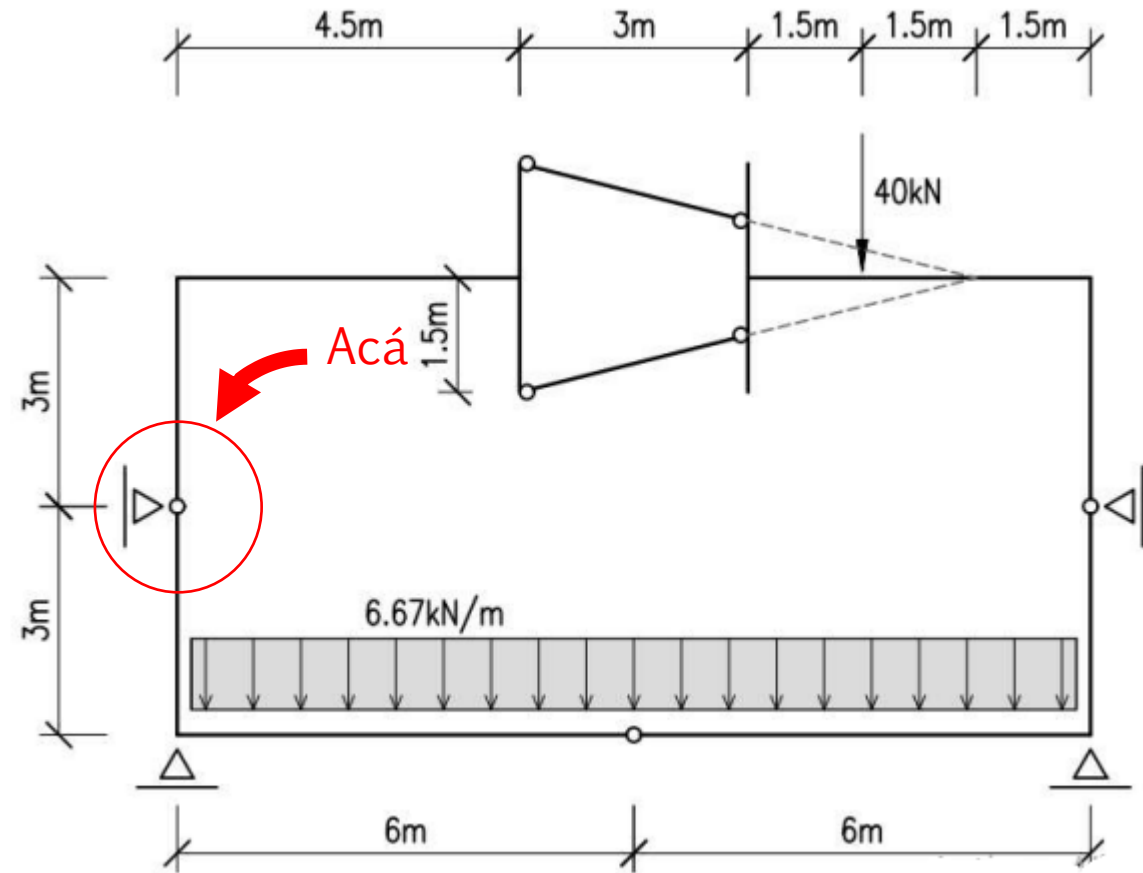


Luego de realizar el análisis cinemático podemos asegurar que es isostático

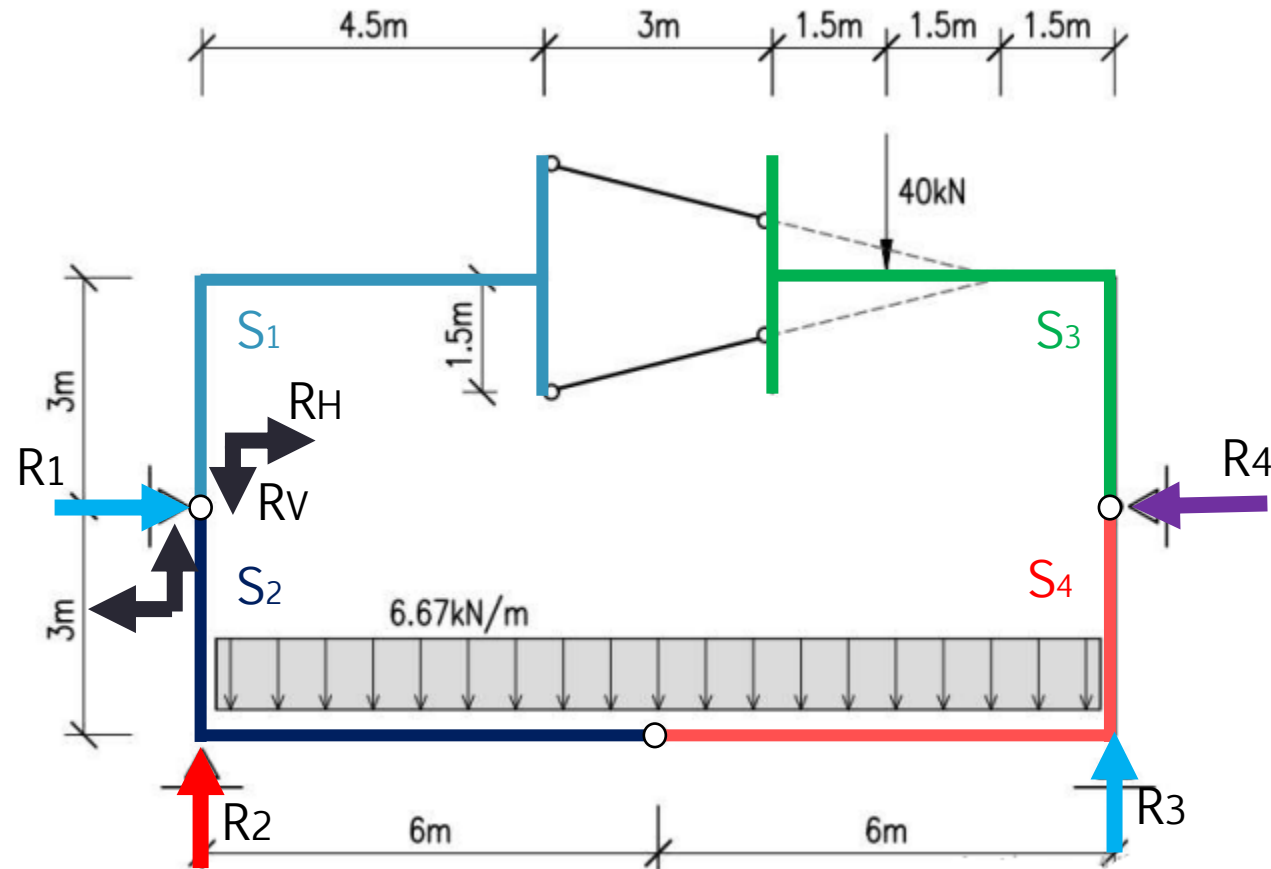
Abrimos el sistema

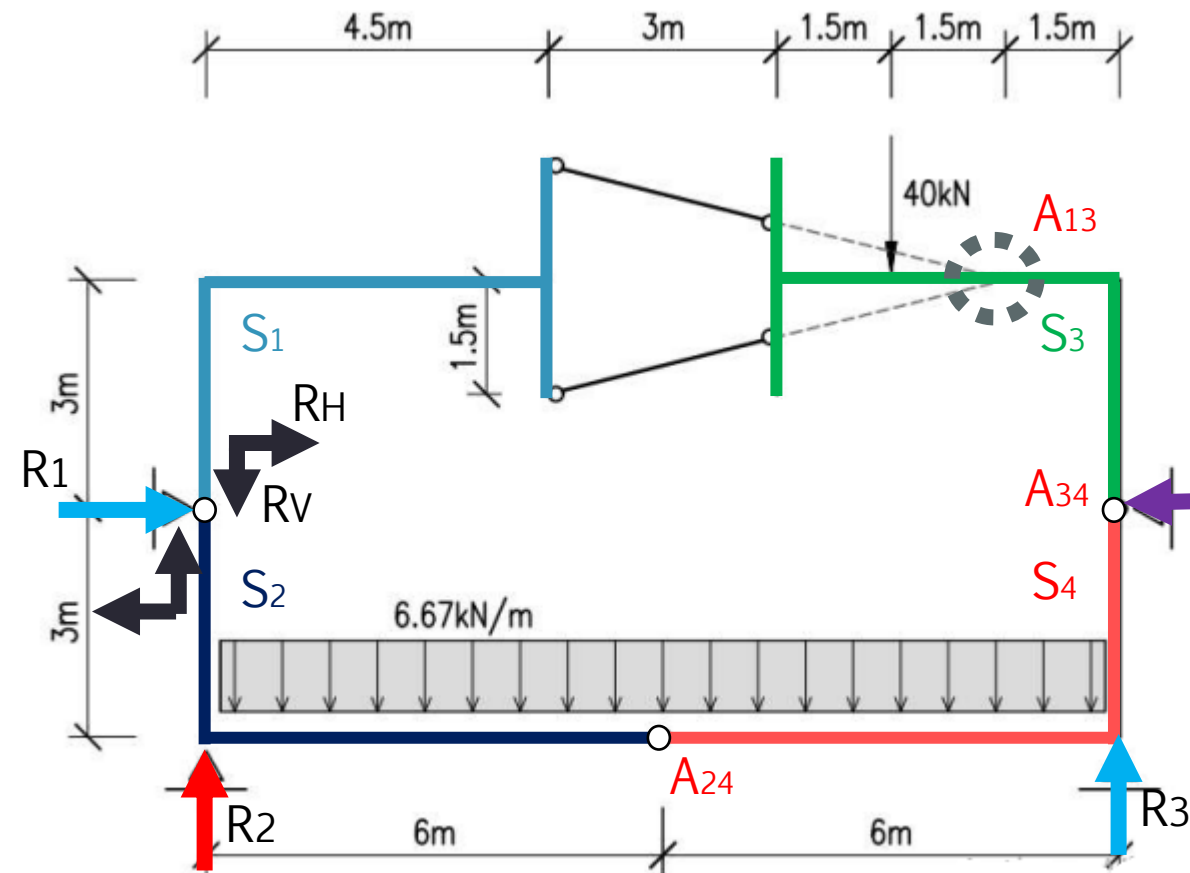
Para realizar el cálculo en una cadena cerrada, es necesario abrirla para “transformarla” en una cadena abierta.

El lugar donde se abre el sistema es arbitrario, pero se debe poner en evidencia las fuerzas que ejercían las articulaciones involucradas.



Ahora si, pongamos en evidencia las reacciones de vinculo externas y las fuerzas de la articulación que abrimos





Escribamos las ecuaciones

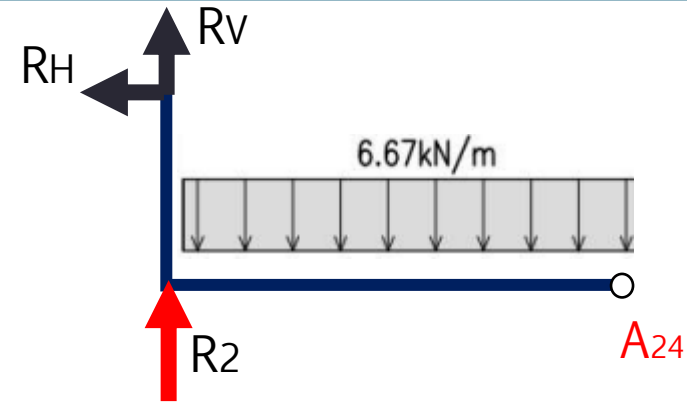
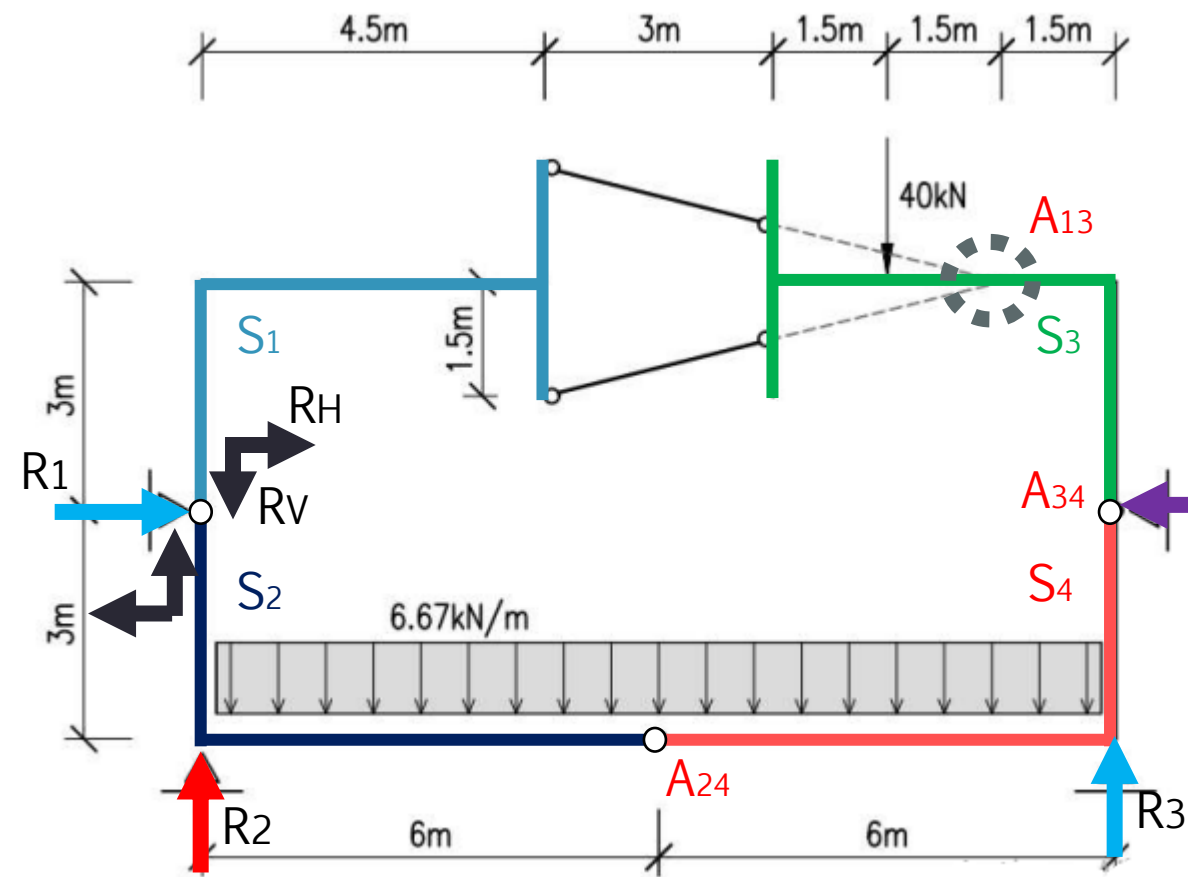
$$\sum F_x = R_1 - R_4 = 0$$

$$\sum F_y = R_2 + R_3 - 40kN - 6,67 \frac{kN}{m} * 12m = 0$$

$$\sum M_2 = -6,67 \frac{kN}{m} * 12m * 6m + R_3 * 12m + R_4 * 3m$$

$$-40kN * 9m - R_1 * 3m = 0$$

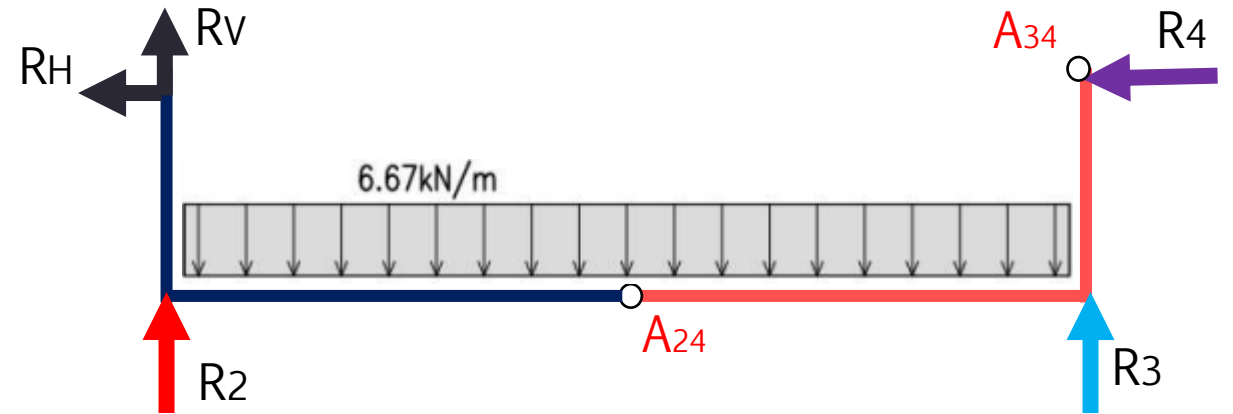
¡Ecuaciones globales!



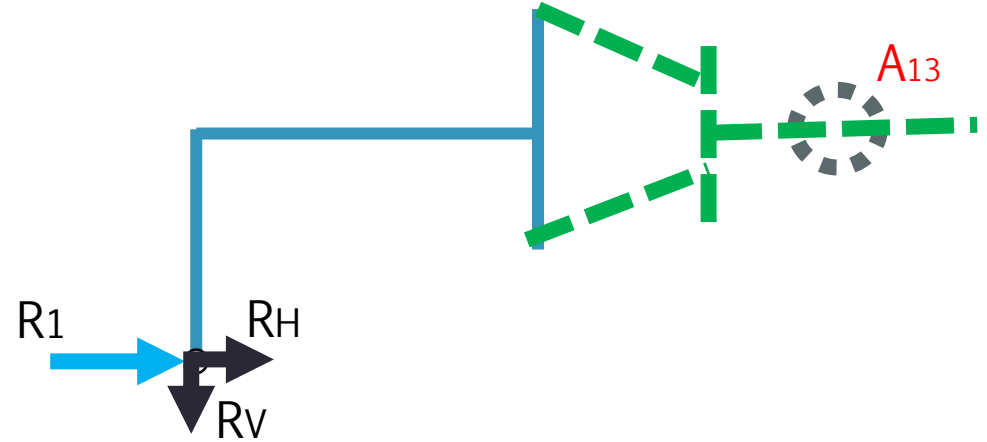
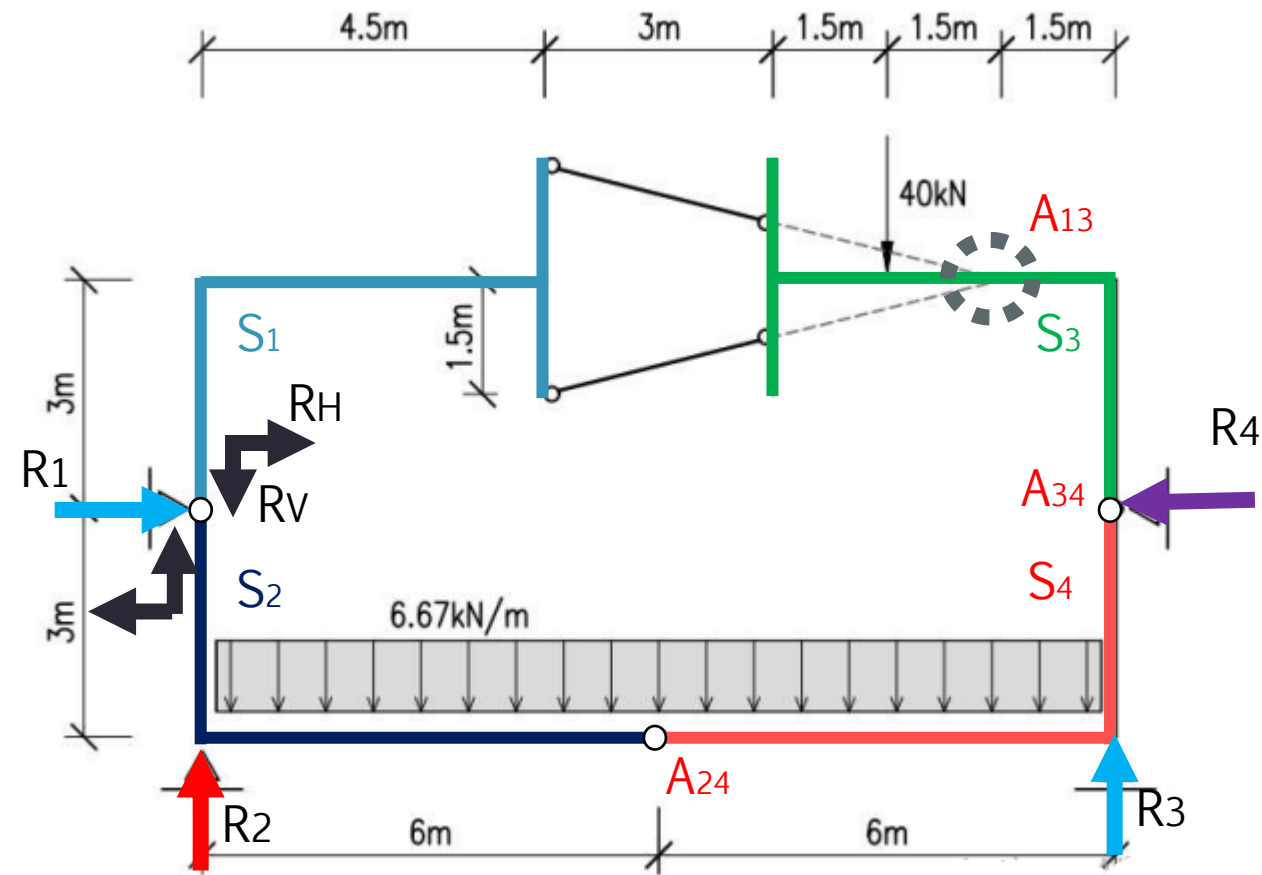
R4

Ecuaciones locales

$$\sum M_{A_{24}}^{S2} = -R_2 * 6m + 6,67 \frac{kN}{m} * 6m * 3m + R_H * 3m - R_V * 6m = 0$$



$$\sum M_{A_{34}}^{S2,S4} = -R_2 * 12m + 6,67 \frac{kN}{m} * 12m * 6m - R_V * 12m = 0$$



$$\sum M_{A_{13}}^{S1} = +R_1 * 3m + R_V * 10,5m + R_H * 3m = 0$$

Sistema de ecuaciones

$$\sum F_x = R_1 - R_4 = 0$$

$$\sum F_y = R_2 + R_3 - 40kN - 6,67 \frac{kN}{m} * 12m = 0$$

$$\sum M_2 = -6,67 \frac{kN}{m} * 12m * 6m + R_3 * 12m + R_4 * 3m - 40kN * 9m - R_1 * 3m = 0$$

$$\sum M_{A_{24}}^{S2} = -R_2 * 6m + 6,67 \frac{kN}{m} * 6m * 3m + R_H * 3m - R_V * 6m = 0$$

$$\sum M_{A_{34}}^{S2,S4} = -R_2 * 12m + 6,67 \frac{kN}{m} * 12m * 6m - R_V * 12m = 0$$

$$\sum M_{A_{13}}^{S1} = +R_1 * 3m + R_V * 10,5m + R_H * 3m = 0$$

Solución

$$R_1 = -5,02 \text{ kN}$$

$$R_2 = 50,02 \text{ kN}$$

$$R_3 = 70,02 \text{ kN}$$

$$R_4 = -5,02 \text{ kN}$$

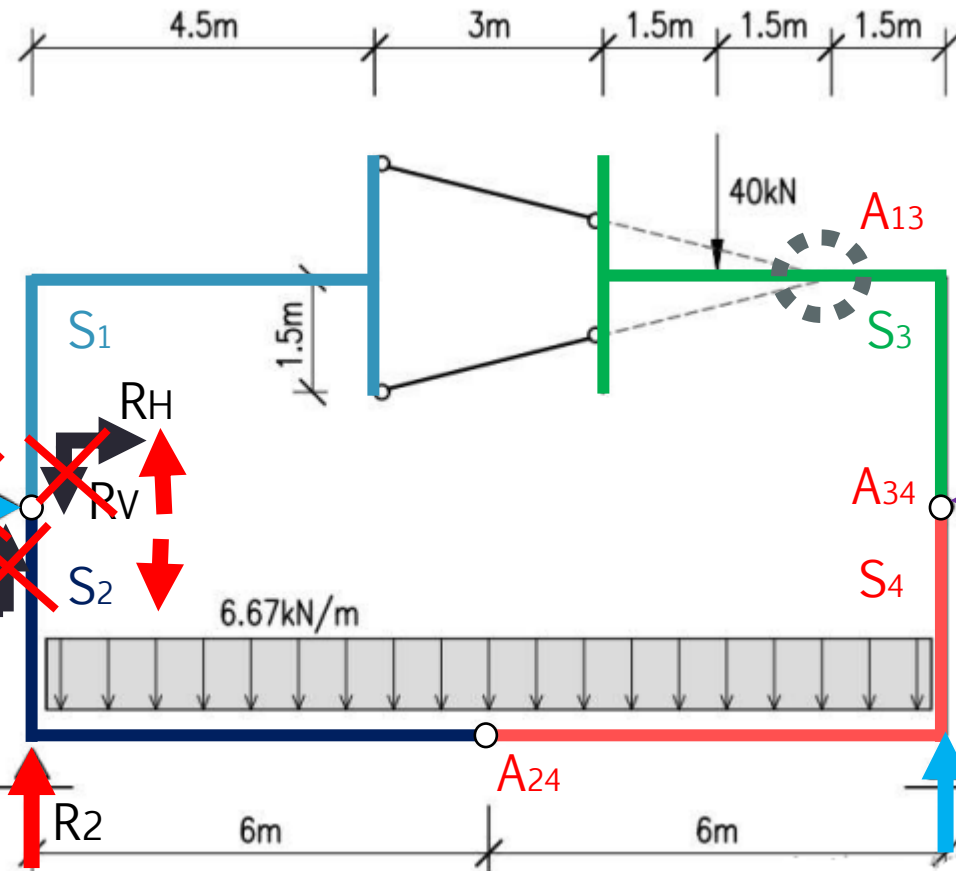
$$R_H = 40,02 \text{ kN}$$

$$R_V = -10 \text{ kN}$$



Despiece de la estructura

Una forma de verificar si las reacciones están bien calculadas es plantear el despiece de la estructura. Si toda la estructura esta en equilibrio, entonces cada parte de ella también debe estarlo.



Primero pongamos las reacciones con sus sentidos correctos

$$R_1 = -5,02 \text{ kN}$$

$$R_2 = 50,02 \text{ kN}$$

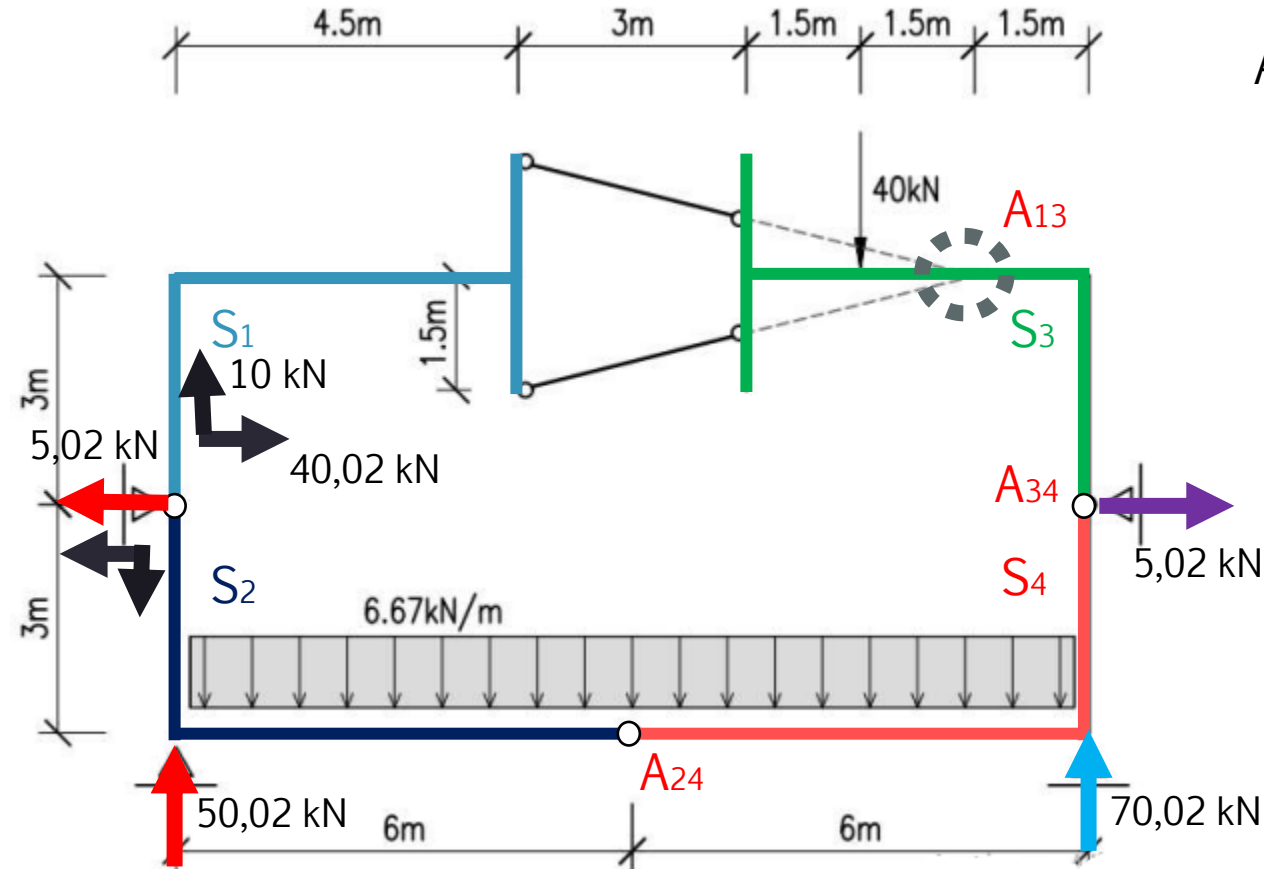
$$R_3 = 70,02 \text{ kN}$$

$$R_4 = -5,02 \text{ kN}$$

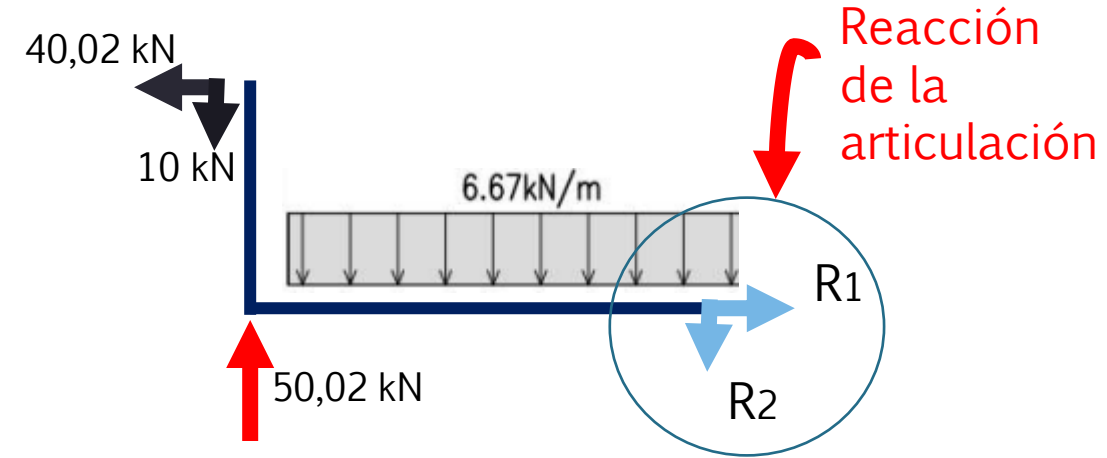
$$R_H = 40,02 \text{ kN}$$

$$R_V = -10 \text{ kN}$$

Sentido
supuesto
incorrecto



Aislamos las chapas y ponemos en evidencia las fuerzas

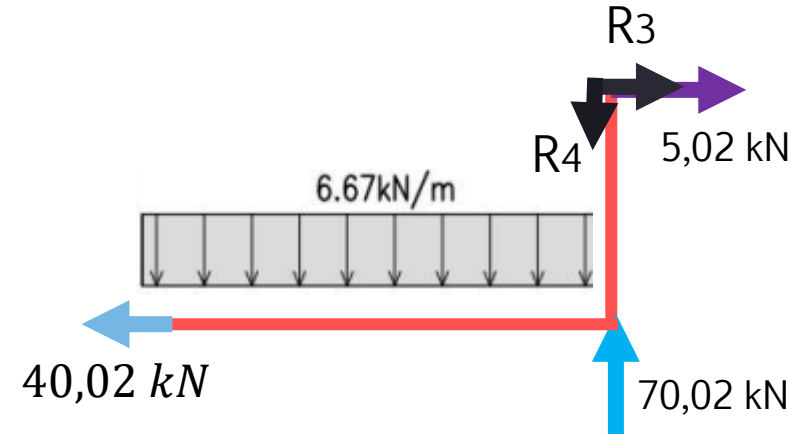
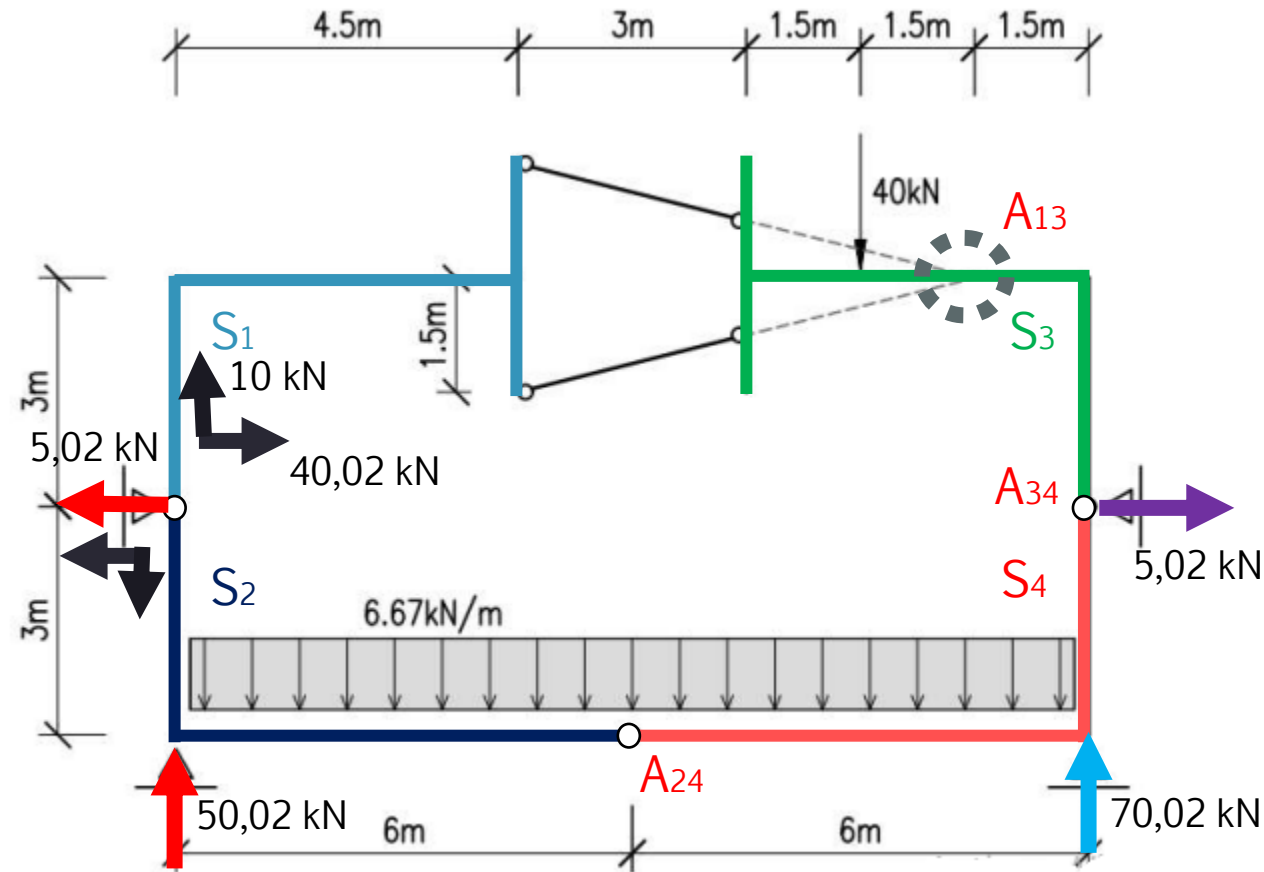


$$\sum F_x = -40,02kN + R_1 = 0$$

$$\sum F_y = -10kN - R_2 + 50,02kN - 6,67 \frac{kN}{m} * 6m = 0$$

$$R_1 = 40,02 kN$$

$$R_2 = 0 kN$$

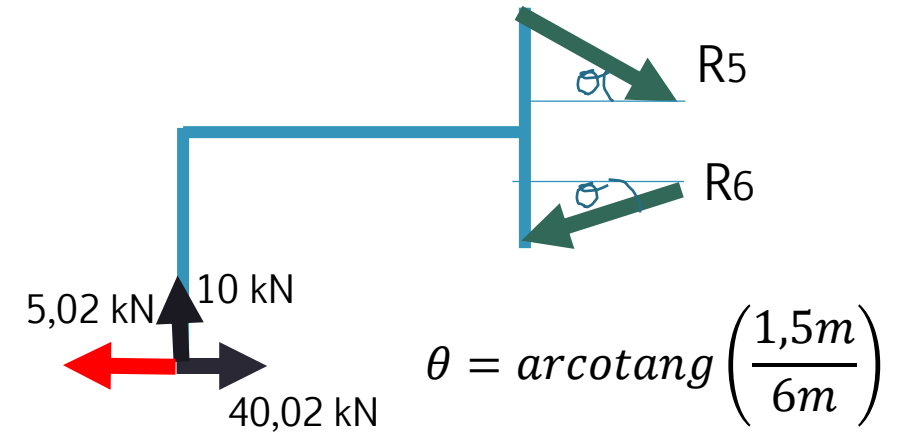
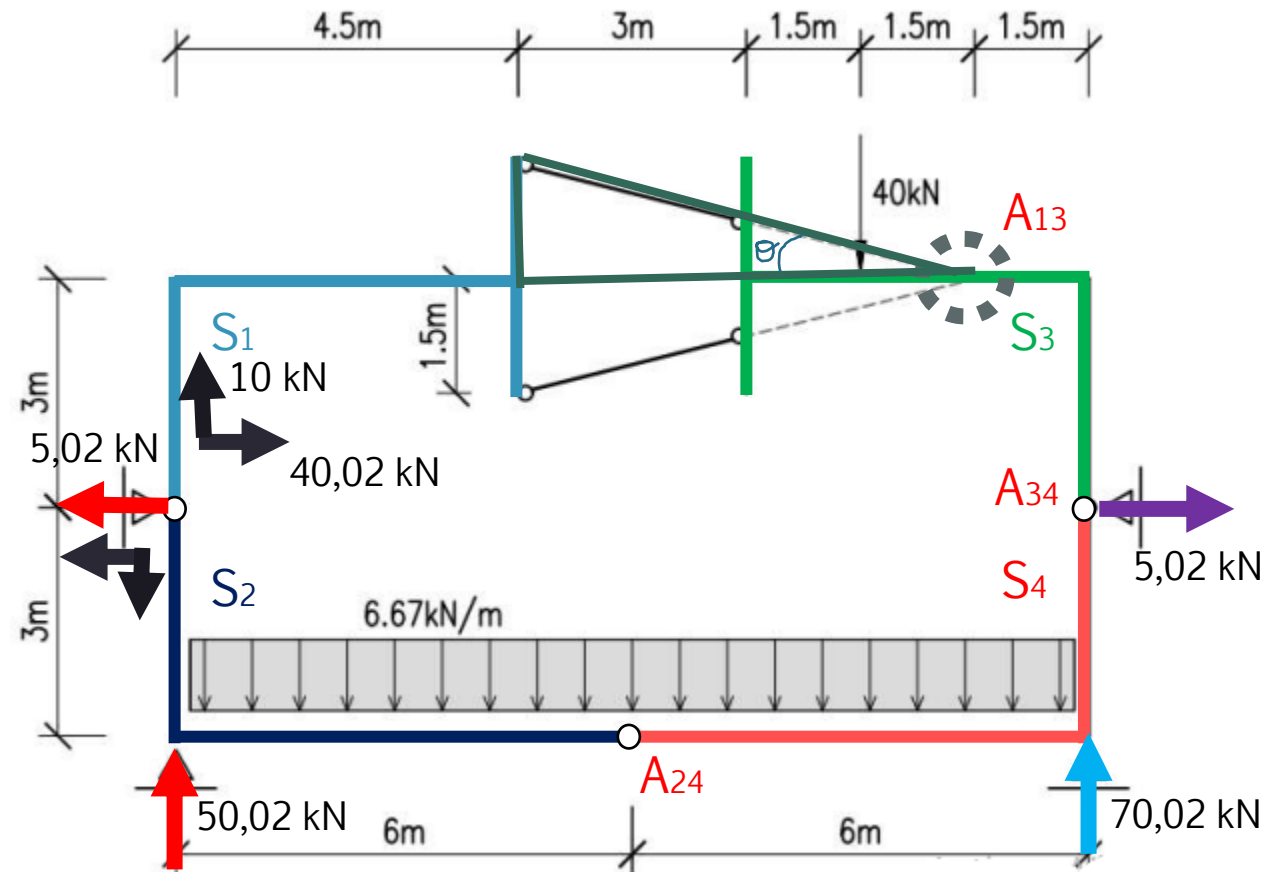


$$\sum F_x = -40,02 \text{ kN} + R_3 + 5,02 \text{ kN} = 0$$

$$\sum F_y = -R_2 + 70,02 \text{ kN} - 6,67 \frac{\text{kN}}{\text{m}} * 6 \text{ m} = 0$$

$$R_3 = 35 \text{ kN}$$

$$R_4 = 30 \text{ kN}$$



$$\theta = \text{arcotang} \left(\frac{1,5m}{6m} \right)$$

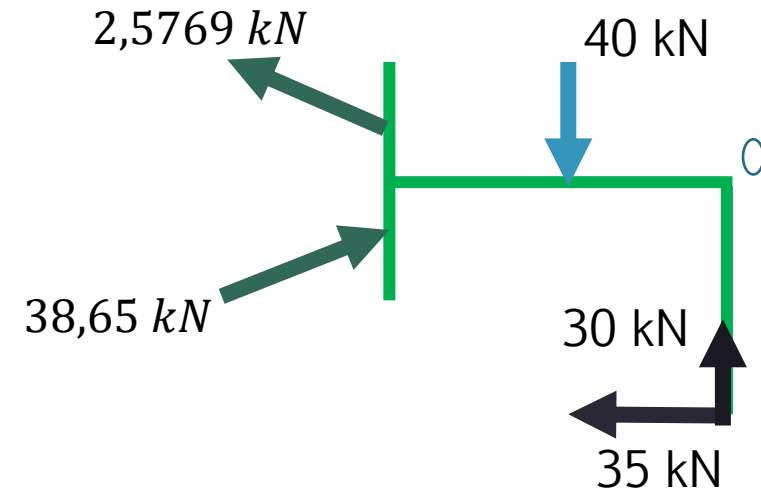
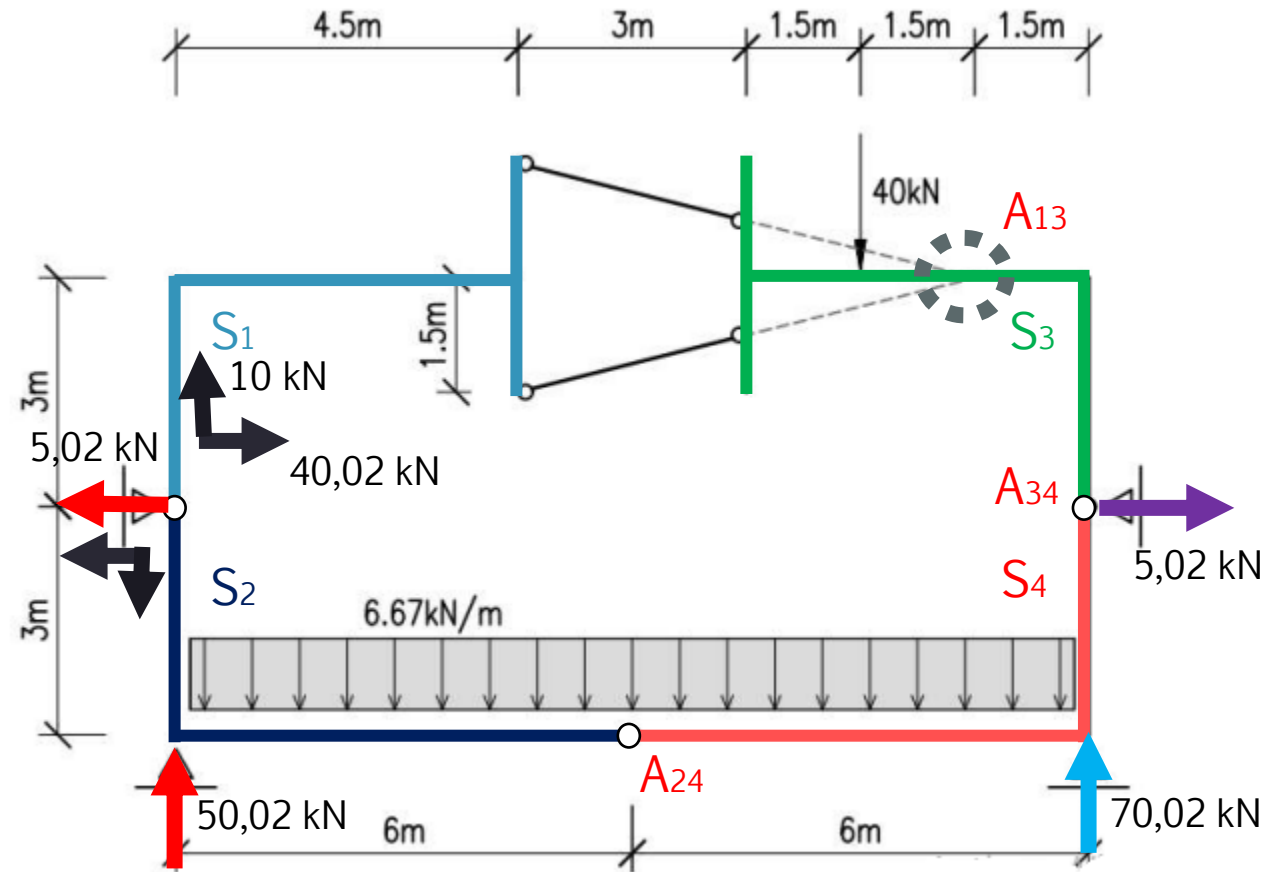
$$\sum F_x = +40,02kN - R_6 \cdot \cos(\theta) + R_5 \cdot \cos(\theta) - 5,02 kN = 0$$

$$\sum F_y = 10 kN - R_6 \cdot \text{sen}(\theta) - R_5 \cdot \text{sen}(\theta) = 0$$

$$R_5 = 2,5769kN$$

$$R_6 = 38,6541kN$$





$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

!Todas las chapas están en equilibrio;

PREGUNTAS?





Puente Nanpu (Shangai, China)

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!