ESTABILIDAD I

Clase 5b

Chapas y Cadenas.

Cadena de chapas

Se analizan estructuras planas conformadas por más de una chapa.

La cadena de chapas puede definirse como:

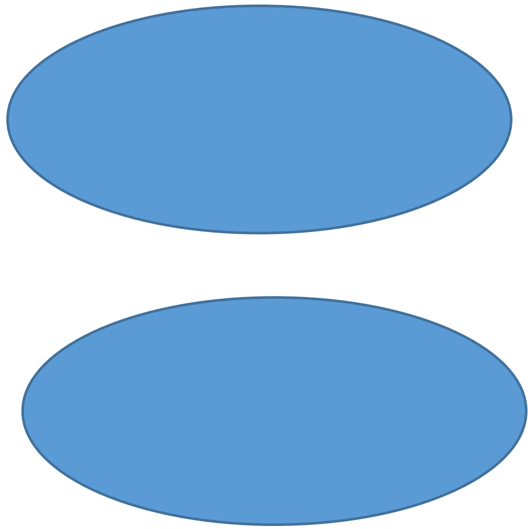
- **abierta**: la primera chapa de la cadena no se vincula a la última chapa o
- **cerrada**: en caso contrario, que la primera y la última chapa se vinculan.
- **mixtos**

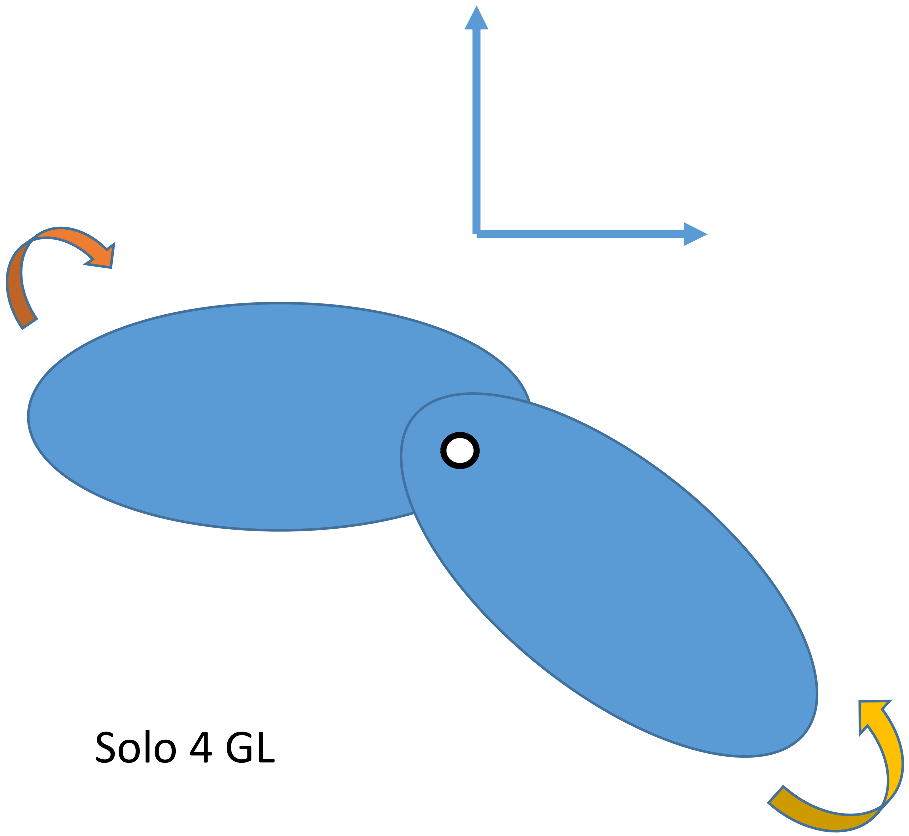
Las chapas constitutivas de la cadena e vinculan entre sí mediante **articulaciones relativas (vínculos internos de segunda especie)**:

- **articulaciones relativas propias**.
- **articulaciones relativas impropias**.

Y al planeta a través de vinculación externa.

Grados de Libertad de cada chapa plana 3

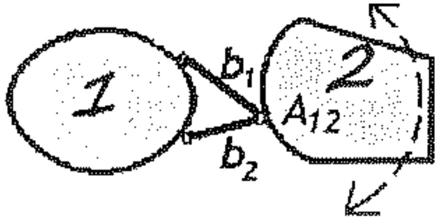




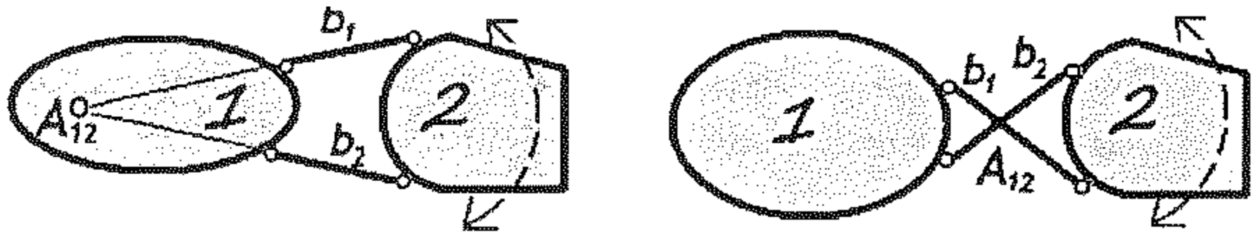
Solo 4 GL

$g = 3.n - 2\ (n-1) = n+2$

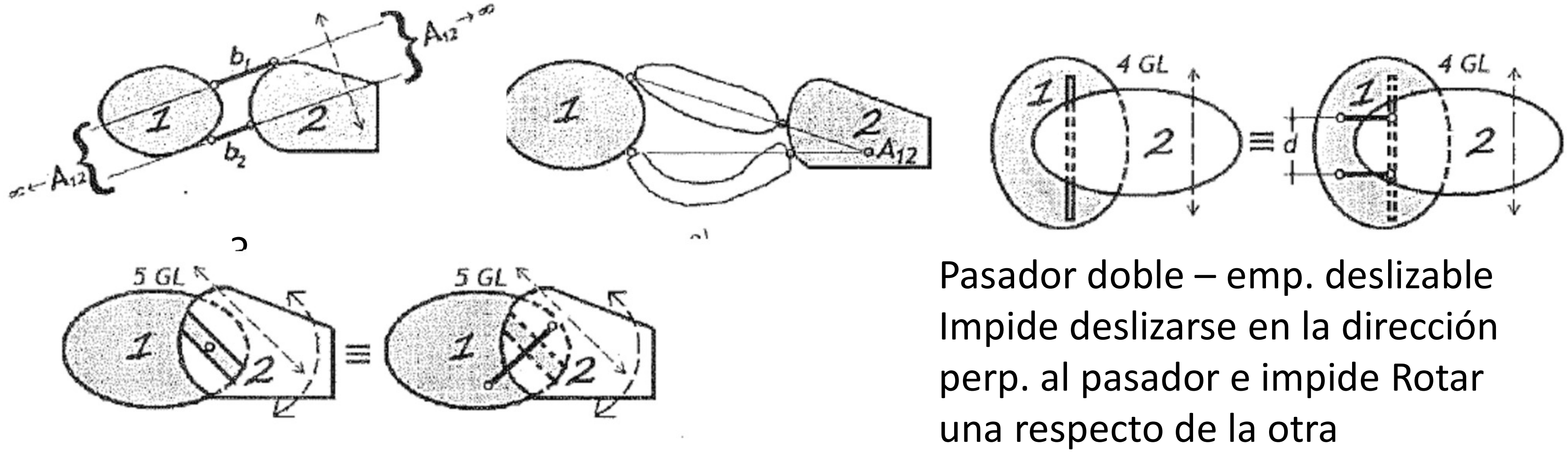
n= numero de chapas



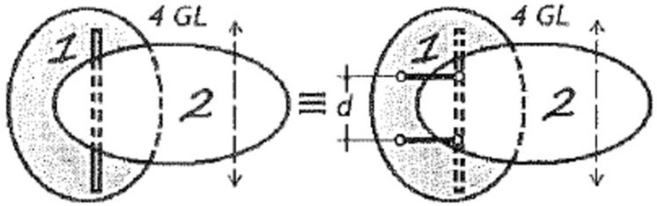
Articulación real



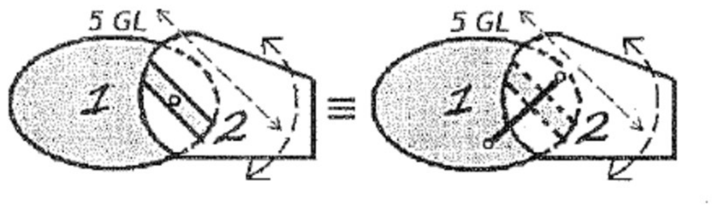
Articulación ficticia



Pasador doble – emp. deslizable
Impide deslizarse en la dirección perp. al pasador e impide Rotar una respecto de la otra



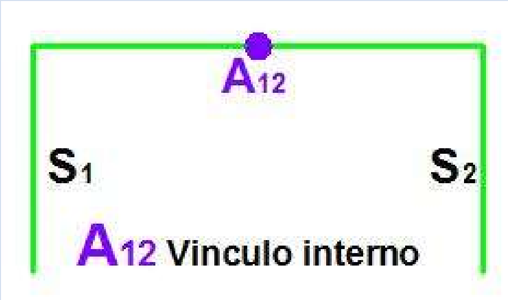
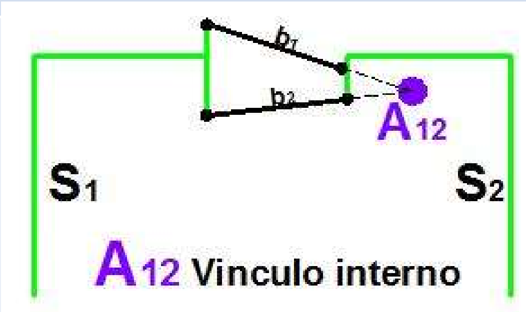
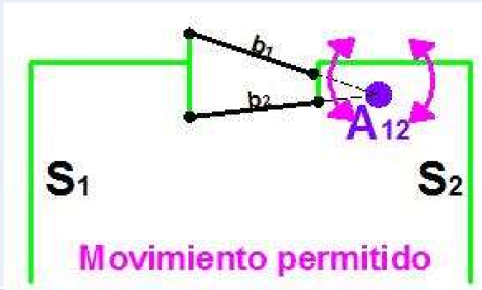
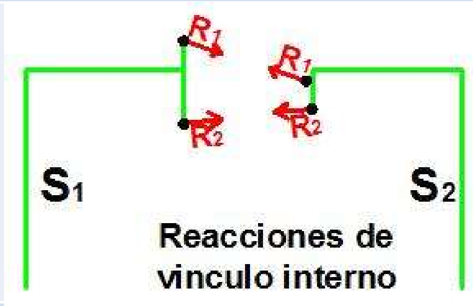
Pasador doble – emp. deslizable
Impide deslizarse en la dirección perp. al pasador e impide Rotar una respecto de la otra.
Equivalente a dos bielas paralelas y perpendiculares al pasador



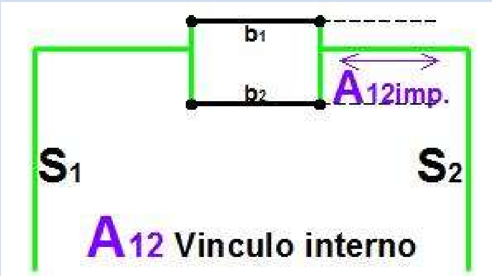
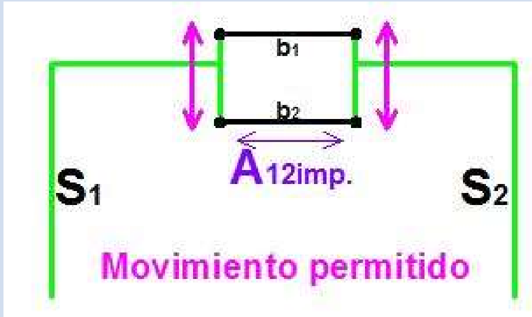
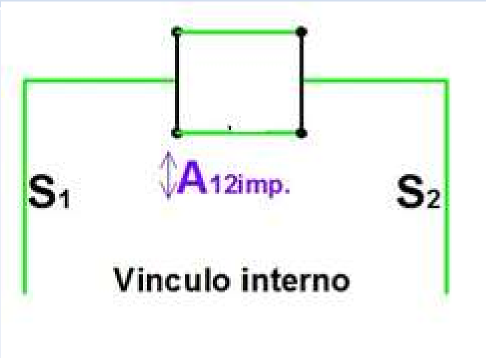
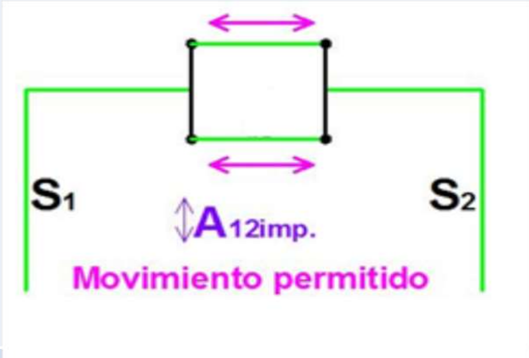
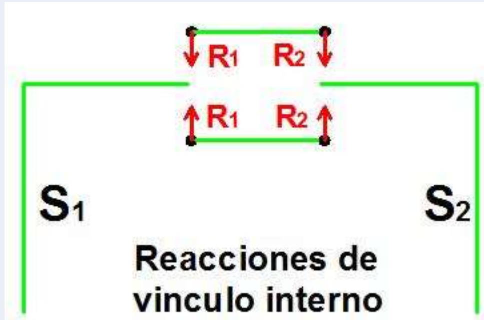
Pasador simple – art. Deslizable
Permite Rotacion relativa y traslación relativa. Es equivalente a una biela perpendicular al pasador

Ref: Estática Vectorial. Antonio La Cava

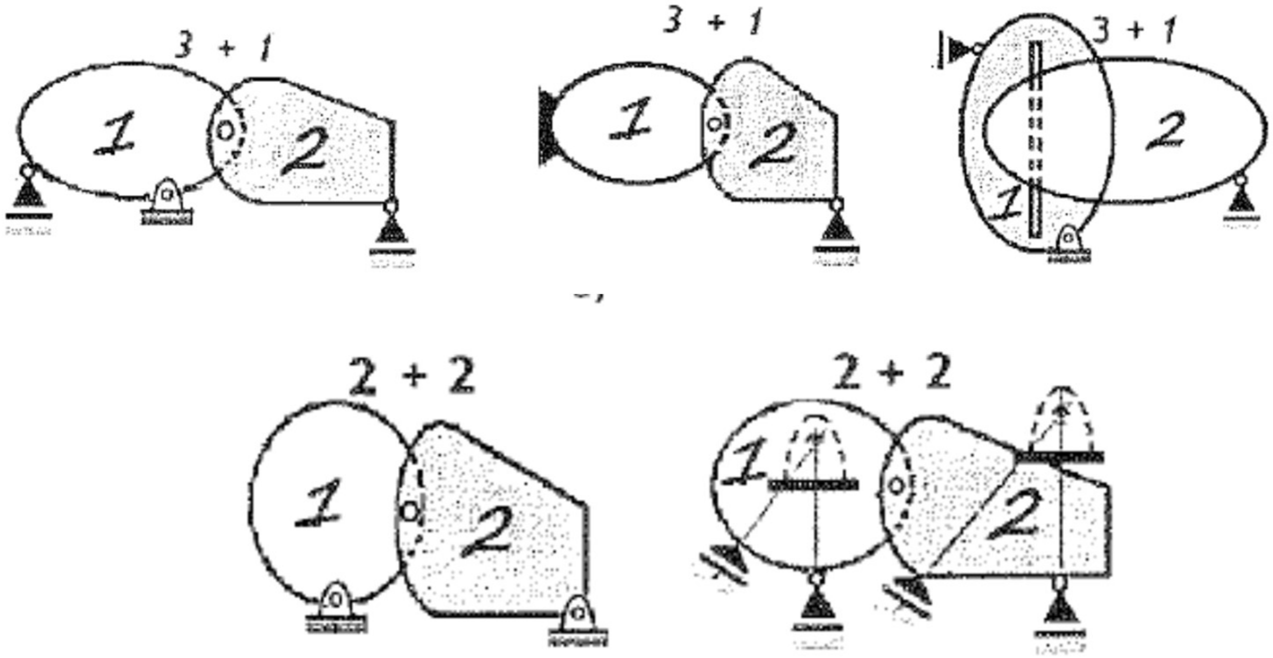
Articulaciones Relativas Propias

<table>
<tr><th>Esquema art.relativa propia</th><th>Movimiento relativo entre chapas</th><th>Reacción de vínculo interno</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>Las chapas solo pueden rotar en forma relativa respecto de un eje pasante por la articulación relativa A12 y las traslaciones están impedidas.
.</td><td>Las reacciones de vínculo interno son 2 fuerzas.
Dado que el giro no está impedido no hay reacción de vínculo interno momento</td></tr>
</table>

Articulaciones Relativas Impropias

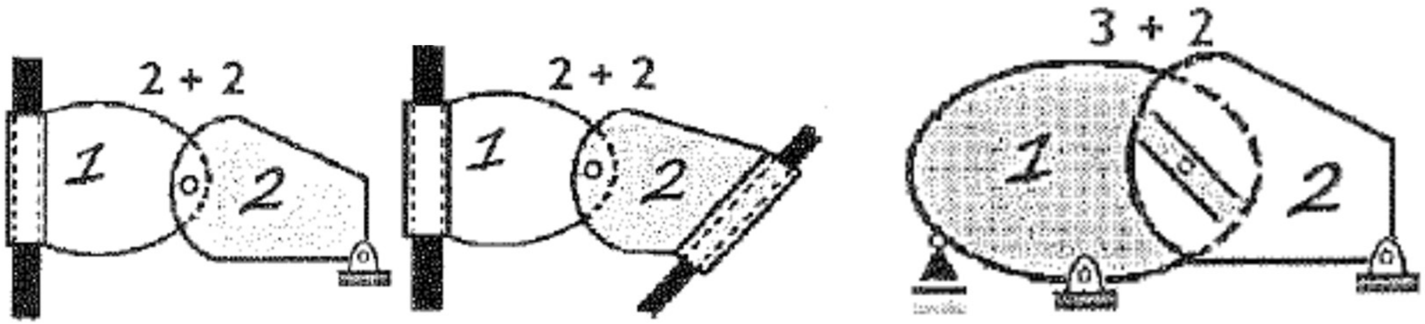
Esquema art.relativa impropia	Movimiento relativo entre chapas	Reacción de vínculo interno
		
		
	Las chapas solo pueden puede trasladarse en forma relativa en dirección perpendicular a las bielas que conforman la articulación relativa impropia A12 mientras que la traslación relativa en el eje de las bielas y la rotación relativa están impedidas.	Las reacciones de vínculo interno de la articulación relativa A12 impropia son dos fuerzas en la dirección de las bielas. Como la traslación relativa en la dirección perpendicular a las bielas no está impedida, la reacción de vínculo int. en esta dirección es nula.

Vinculación externa Isostática

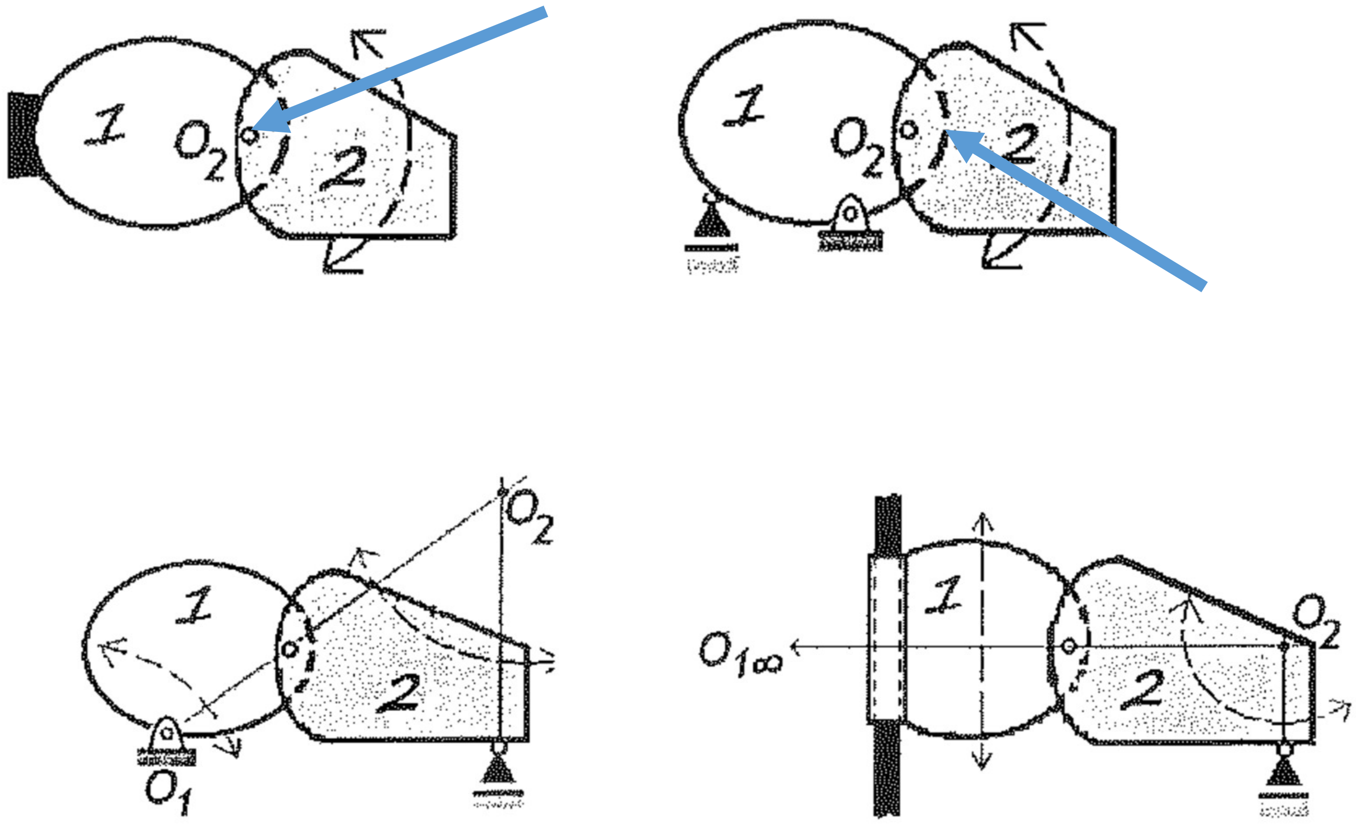


Ref: Estática Vectorial. Antonio La Cava

Vinculación externa Isostática



Vinculación Hipostática



Ref: Estática Vectorial. Antonio La Cava

Vinculación aparente

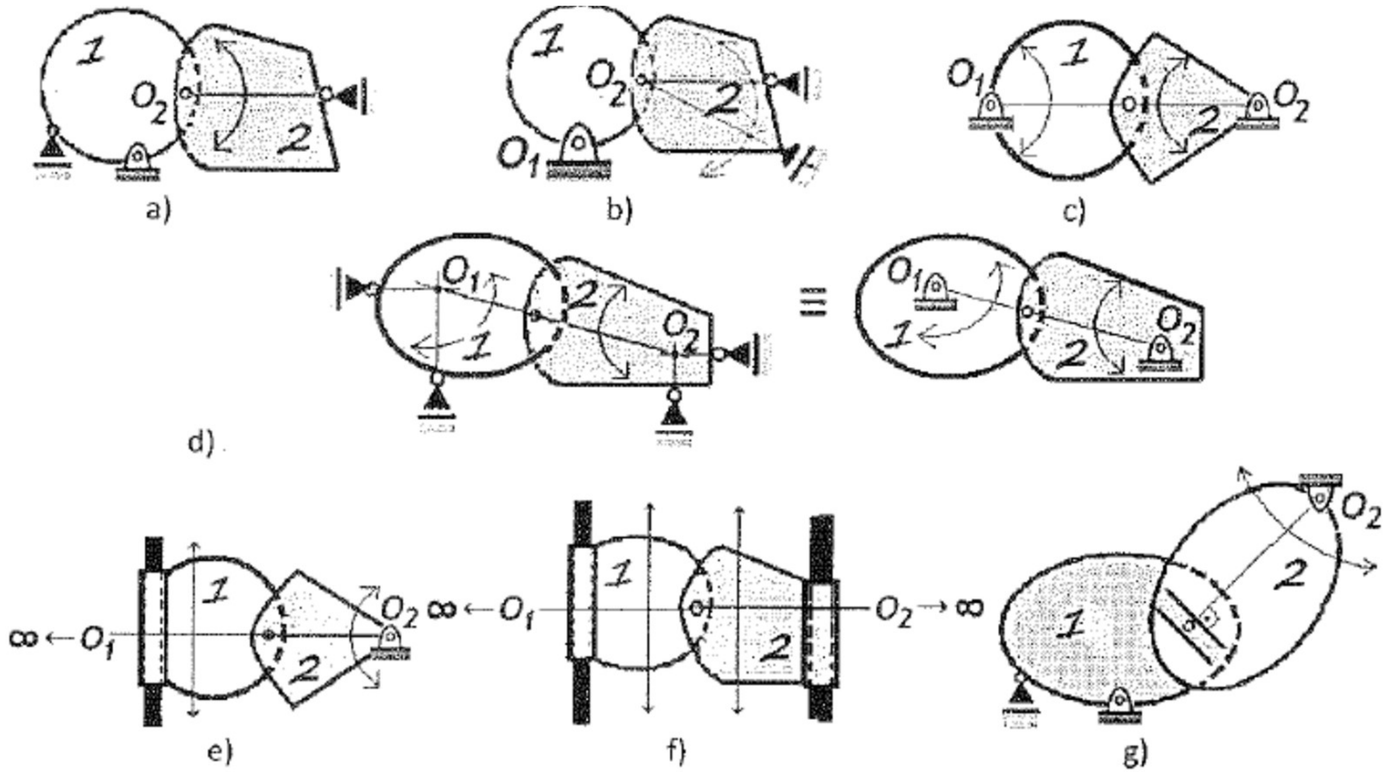
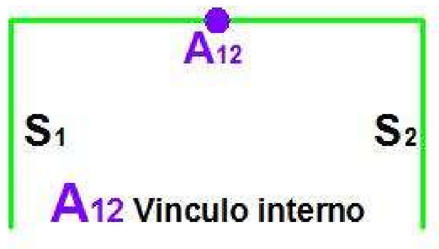


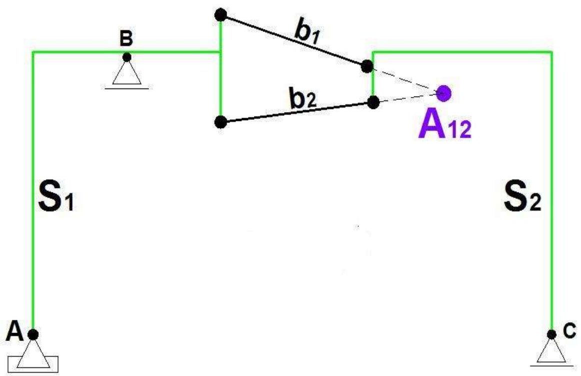
fig.6

Cadena cinemática abierta de dos chapas



cada chapa presenta 3GL y la articulación relativa restringe 2GL resulta:
NºGL = 2x3 – 2 = 4

Caso 1 : 1 chapa tiene 3 CV y otra 1 CV. (Art. Relativa Propia)



Análisis cinemático.

a)-Se verifica que N°GL=N°CV .Se cumple, dado que la cadena cinemática en estudio presenta 4 grados de libertad y tiene impuestas 4 condiciones de vínculo: 3 en S1 (apoyo fijo y apoyo móvil) y 1 en S2 mediante el apoyo móvil.

b)-Se comprueba la eficiencia de la vinculación. La chapa S1 se encuentra fija dado que la dirección del apoyo móvil ubicado en B no pasa por el punto fijo A. En particular A12 es punto fijo de S1 y S2. Consecuentemente la chapa S2 también se encuentra fija debido a que la dirección del apoyo móvil ubicado en C no pasa por A12.

Como simultáneamente se cumplen los puntos a) y b) puede concluirse que la estructura resulta isostáticamente vinculada y cinemáticamente invariable

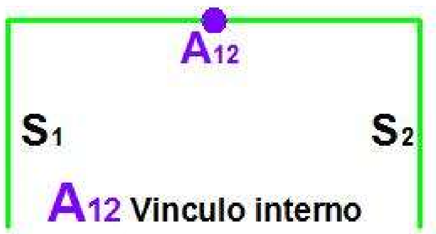
Calculo de RVE: 4incógnitas **VA, HA, VB y VC**

a) Ecuaciones de Equilibrio Absoluto: $\mathbf{Rx=0}$ $\mathbf{Rz=0}$ $\mathbf{M_y^A=0}$

b) Ecuación de Equilibrio Relativo: $\mathbf{M_y^{A12}{}_{S1}=0}$ **ó** $\mathbf{M_y^{A12}{}_{S2}=0}$ **En una art. relativa propia la reacción de vínculo interna momento es nula.**

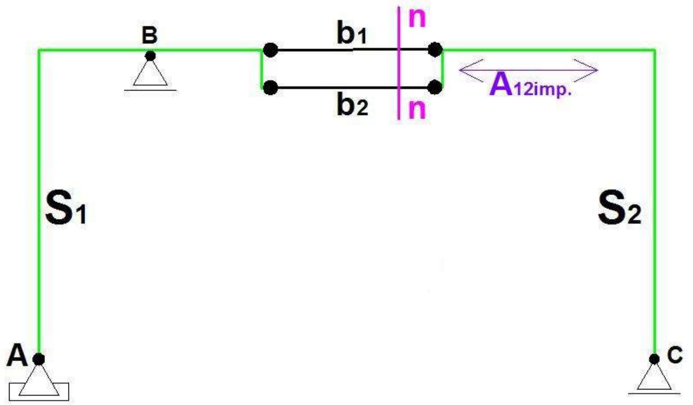
El momento del sistema de fuerzas actuante en chapa S1 respecto de un eje pasante por A12 es nulo.
O el Momento del sistema de fuerzas actuante en la chapa S2 respecto de un eje pasante por A12 es nulo.
Se plantea la ecuación más conveniente.

Cadena cinemática abierta de dos chapas



cada chapa presenta 3GL y la articulación relativa restringe 2GL resulta:
NºGL = 2x3 – 2 = 4

Caso 1 : 1 chapa tiene 3 CV y otra 1 CV. (Art. Relativa Impropia)



Análisis cinemático.

a)-Se verifica que N°GL=N°CV .Se cumple, dado que la cadena cinemática en estudio presenta 4 grados de libertad y tiene impuestas 4 condiciones de vínculo: 3 en S1 (apoyo fijo y apoyo móvil) y 1 en S2 mediante el apoyo móvil.

b)-Se comprueba la eficiencia de la vinculación. La chapa S1 se encuentra fija dado que la dirección del apoyo móvil ubicado en B no pasa por el punto fijo A. En particular A12 es punto fijo de S1 y S2.Consecuentemente la chapa S2 también se encuentra fija debido a que la dirección del apoyo móvil ubicado en C no pasa por A12.

Como simultáneamente se cumplen los puntos a) y b) puede concluirse que la estructura resulta isostáticamente vinculada y cinemáticamente invariable

Calculo de RVE: 4incógnitas **VA, HA, VB y VC**

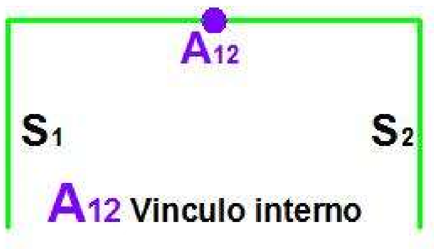
a) Ecuaciones de Equilibrio Absoluto: **Rx=0 Rz=0** $M_y^A=0$

b) Ecuación de Equilibrio Relativo: $R_{n\text{-}n\ S1}=0$ **ó** $R_{n\text{-}n\ S2}=0$

En una art. relativa impropia la reacción de vínculo interna fuerza en la dirección perpendicular a las bielas es nula.

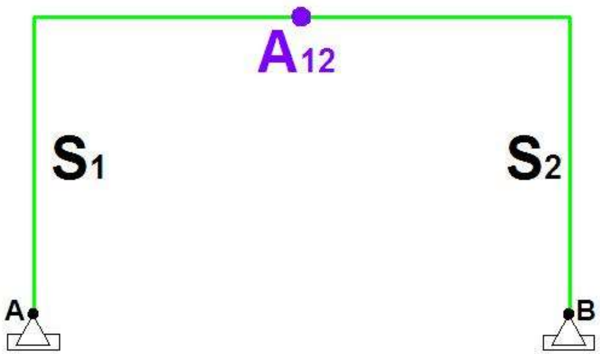
La resultante en la dirección n-n del sistema de fuerzas actuante en chapa S1 respecto de A12 es nula.
O la resultante en la dirección n-n del sistema de fuerzas actuante en la chapa S2 respecto de A12 es nula.
Se plantea la ecuación más conveniente.

Cadena cinemática abierta de dos chapas



cada chapa presenta 3GL y la articulación relativa restringe 2GL resulta:
NºGL = 2x3 – 2 = 4

Caso 2 Arco de 3 articulaciones: Cada chapa tiene 2 CV. (Art. Relativa Propia)



Análisis cinemático.

a)-Se verifica que N°GL=N°CV. Se cumple, dado que la cadena cinemática en estudio presenta 4 grados de libertad y tiene impuestas 4 condiciones de vínculo: 2 en S1 (apoyo fijo) y 2 en S2 (apoyo fijo)

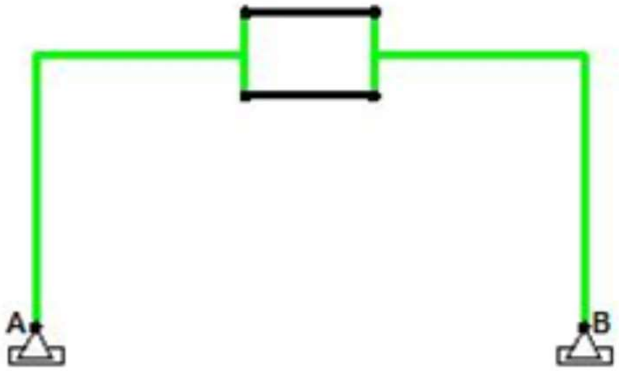
b)-Se comprueba la eficiencia de la vinculación. La chapa S1 tiene un punto fijo en A, la chapa S2 tiene un punto fijo en B. Como no hay una recta que contenga simultaneamente a los dos puntos fijos (A y B) y a la art. Relativa A12, ambas chapas están fijas. (Otra forma de decir lo mismo: A (punto fijo), B (punto fijo) y A12 art relativa no están alineadas)
Como simultáneamente se cumplen los puntos a) y b) puede concluirse que la estructura resulta isostáticamente vinculada y cinemáticamente invariable

Calculo de RVE: 4incógnitas **VA, HA, VB y HB**

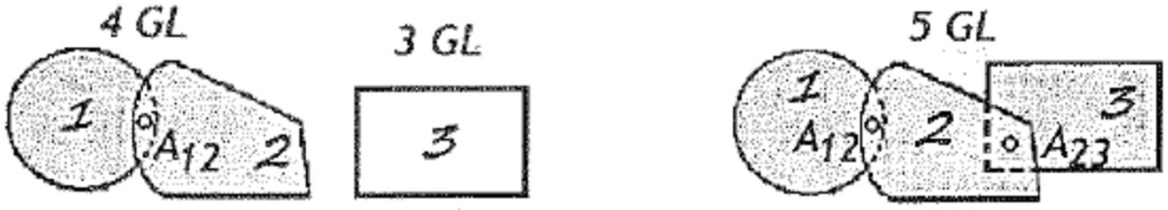
a) Ecuaciones de Equilibrio Absoluto: $\mathbf{Rx=0}$ $\mathbf{Rz=0}$ $\mathbf{M_y^A=0}$

b) Ecuación de Equilibrio Relativo: $\mathbf{M_y{}^{A12}{}_{S1}=0}$ **ó** $\mathbf{M_y{}^{A12}{}_{S2}=0}$ **En una art. relativa propia la reacción de vínculo interna momento es nula.**
El momento del sistema de fuerzas actuante en chapa S1 respecto de un eje pasante por A12 es nulo.
O el Momento del sistema de fuerzas actuante en la chapa S2 respecto de un eje pasante por A12 es nulo.
Se plantea la ecuación más conveniente.

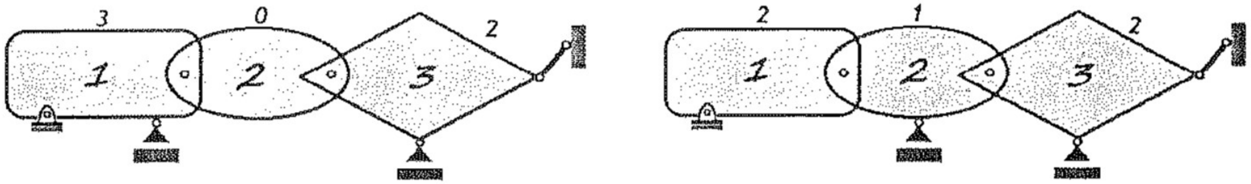
La art. Relativa A12 pertenece a S1 y S2.
Chapa S1:
Por la condición de rigidez, la art. Relativa A12 sólo puede desplazarse en la dirección perpendicular a AA12.
Chapa S2:
Por la condición de rigidez, la art. Relativa A12 sólo puede desplazarse en la dirección perpendicular a BA12
Como AA12 y BA12 no son direcciones coincidentes A12 esta fija.



Tres cuerpos Vinculados



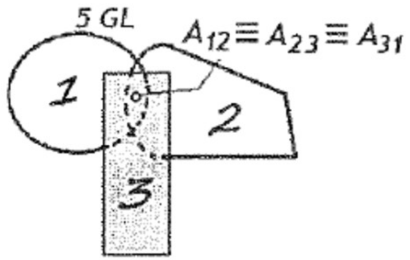
a) b)



Cuerpo 1	Cuerpo 2	Cuerpo 3
3	1	1
1	3	1
3	0	2
2	2	1
2	1	2

Ref: Estatica Vectorial. Antonio La Cava

Disposición tres cuerpos en una sola articulación



a)

Cuerpo 1	Cuerpo 2	Cuerpo 3
3	1	1
2	2	1

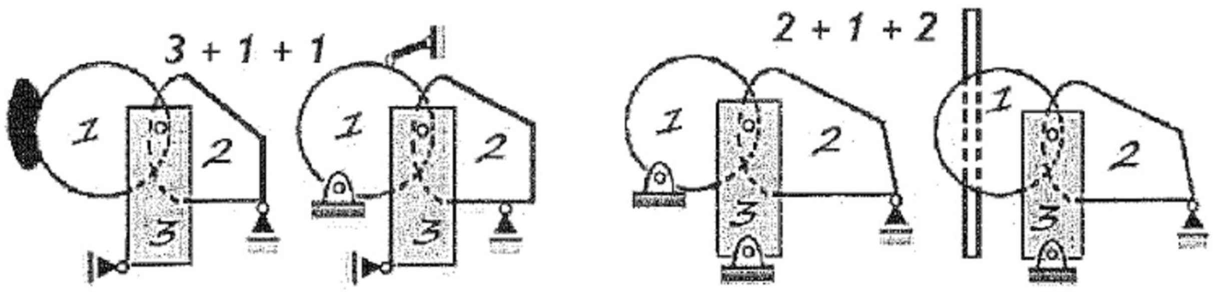
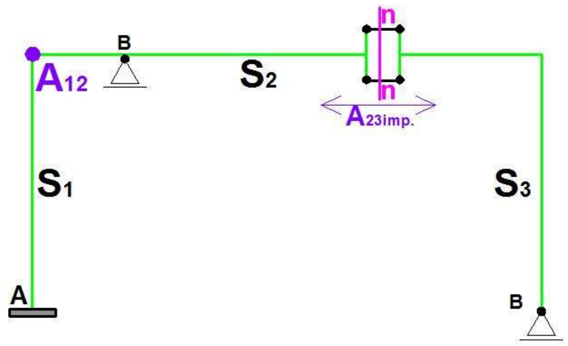


fig.9 b) c) d) e)

Caso 1: Cadena cinemática abierta de tres chapas



cada chapa presenta 3GL y cada articulación relativa restringe 2GL resulta: NºGL = 3x3 – 2*2 = 5

Análisis cinemático.

a)-Se verifica que N°GL=N°CV .Se cumple, dado que la cadena cinemática en estudio presenta 5 grados de libertad y tiene impuestas 5 condiciones de vínculo: 3 en S1 (empotramiento), 1 en S2 (apoyo móvil B) y 1 en S3 (apoyo móvil C).
b)-Se comprueba la eficiencia de la vinculación. La chapa S1 se encuentra fija por el empotramiento. En particular A12 es punto fijo de S1 y S2.Consecuentemente la chapa S2 también se encuentra fija debido a que la dirección del apoyo móvil ubicado en B no pasa por A12.La articulación relativa A23imp. resulta punto fijo de S2 y S3 y finalmente S3 esta fija dado que la dirección del apoyo móvil ubicado en C no pasa por A23imp.
Como simultáneamente se cumplen los puntos a)y b) puede concluirse que la estructura resulta isostáticamente vinculada y cinemáticamente invariable.

Calculo de reacciones de vínculo.

Obsérvese que son 5 las incógnitas a determinar (**HA, VA, MA, VB y VC**).

• Considerando A como centro de reducción las ecuaciones de equilibrio absoluto se escriben:

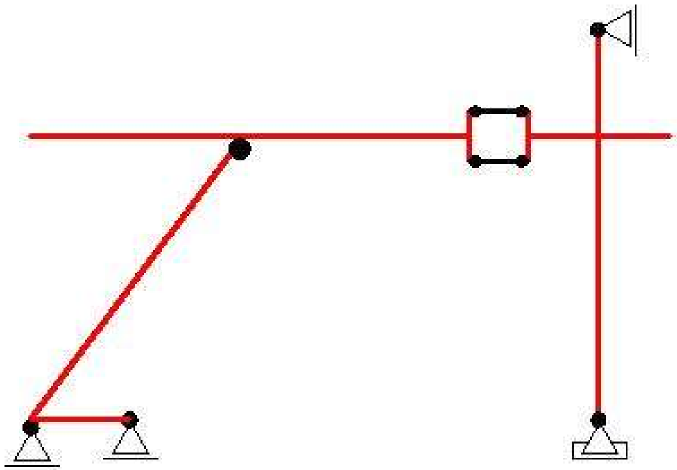
Rz=0 Rx=0 MyA=0

• Las ecuaciones de equilibrio relativo resultan:

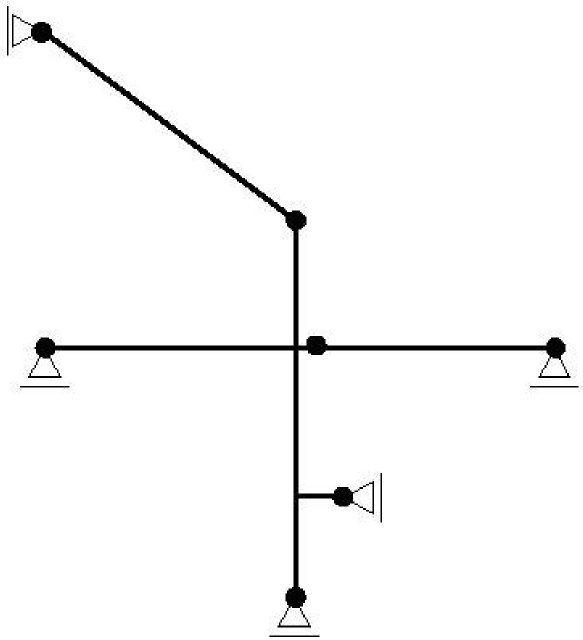
$\mathbf{M_y{}^{A12}{}_{S1}=0}$ **ó** $\mathbf{M_y{}^{A12}{}_{S2;S3}=0}$

$\mathbf{R_{n\text{-}n\ S1;S2}=0}$ **ó** $\mathbf{R_{n\text{-}n\ S3}=0}$

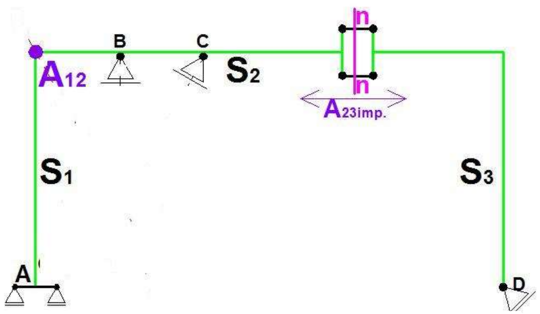
Caso 2: Cadena cinemática abierta de tres chapas



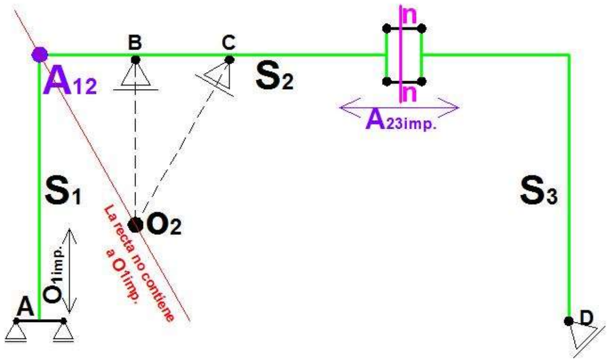
Caso 5: Cadena cinemática abierta de tres chapas



Caso 3: Cadena cinemática abierta de tres chapas



Análisis cinemático.
cada chapa presenta 3GL y cada articulación relativa restringe 2GL
resulta: NºGL = 3x3 – 2*2 = 5
a) Se verifica que N°GL=N°CV .Se cumple, dado que la cadena cinemática en estudio presenta 5 grados de libertad y tiene impuestas 5 condiciones de vínculo: 2 en S1 (empotramiento guiado), 2 en S2 (dos apoyos móviles) y 1 en S3 (apoyo móvil).



b)-Se comprueba la eficiencia de la vinculación. Las chapas S1 y S2 se encuentran fijas por conformar un arco de 3 articulaciones y además no existir una recta que contenga simultáneamente los dos puntos fijos (O1imp y O2) y la articulación relativa A12.La articulación relativa A23imp. resulta punto fijo de S2 y S3 y finalmente S3 esta fija dado que la dirección del apoyo móvil ubicado en D no pasa por A23imp.
Como simultáneamente se cumplen los puntos a) y b) puede concluirse que la estructura resulta isostáticamente vinculada y cinemáticamente invariable

Calculo de reacciones de vínculo.

Obsérvese que son 5 las incógnitas a determinar (**VA, MA, VB, RC y RD**).

• Considerando A como centro de reducción las ecuaciones de equilibrio absoluto se escriben:

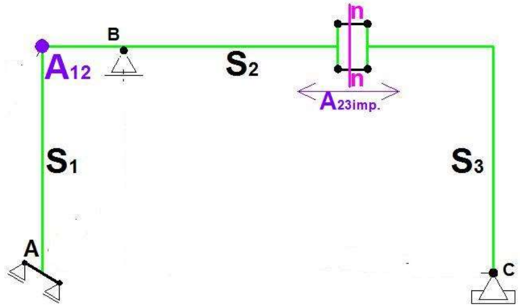
Rz=0 Rx=0 MyA=0

• Las ecuaciones de equilibrio relativo resultan:

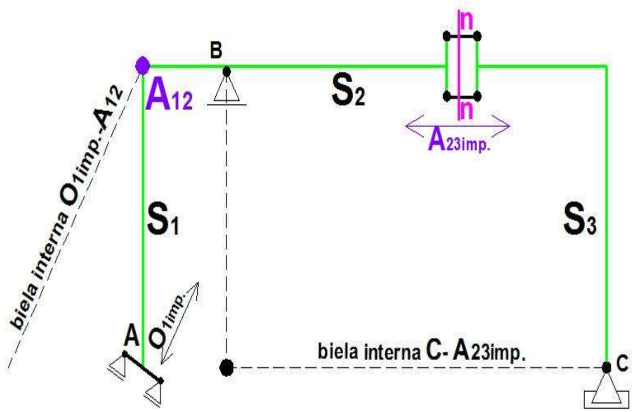
$M_y{}^{A12}{}_{S1}=0$ ó $M_y{}^{A12}{}_{S2;S3}=0$

$R_{n\text{-}n\ S1;S2}=0$ ó $R_{n\text{-}n\ S3}=0$

Caso 4: Cadena cinemática abierta de tres chapas



Análisis cinemático.
cada chapa presenta 3GL y cada articulación relativa restringe 2GL
resulta: NºGL = 3x3 – 2*2 = 5
a)-Se verifica que N°GL=N°CV .Se cumple, dado que la cadena cinemática en estudio presenta 5 grados de libertad y tiene impuestas 5 condiciones de vínculo: 2 en S1 (empotramiento guiado), 1 en S2 (apoyo móvil) y 2 en S3 (apoyo fijo).



b)-Se comprueba la eficiencia de la vinculación. La chapa S2 se encuentra fija como consecuencia de las bielas internas O1imp-A12, C-A23imp. y el apoyo móvil ubicado en B cuyas direcciones no resultan concurrentes a un mismo punto. Como las articulaciones relativas pertenecen a la chapa fija (S2) resultan fijas las chapas S1 y S3 por presentar dos puntos fijos cada una de ellas.
Como simultáneamente se cumplen los puntos a y b puede concluirse que la estructura resulta isostáticamente vinculada y cinemáticamente invariable

Calculo de reacciones de vínculo.

Obsérvese que son 5 las incógnitas a determinar (**RA, MA, VB, VC y HC**).

• Considerando C como centro de reducción las ecuaciones de equilibrio absoluto se escriben:

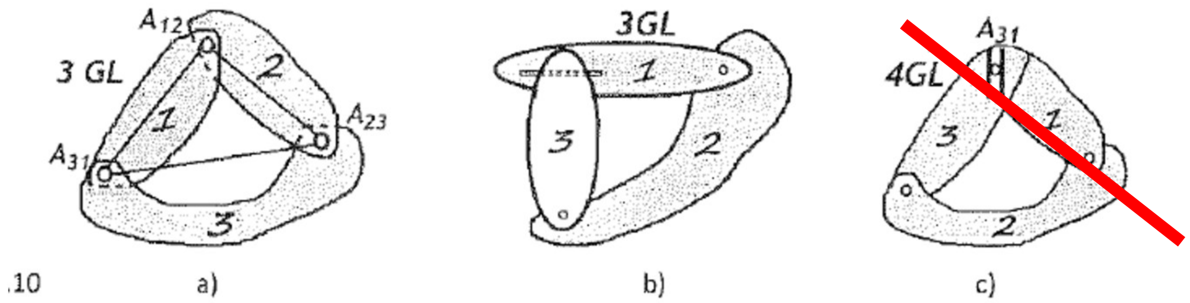
Rz=0 Rx=0 MyC=0

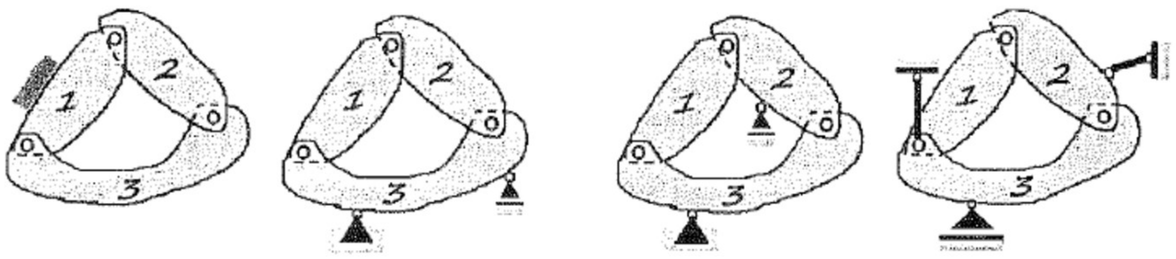
• Las ecuaciones de equilibrio relativo resultan:

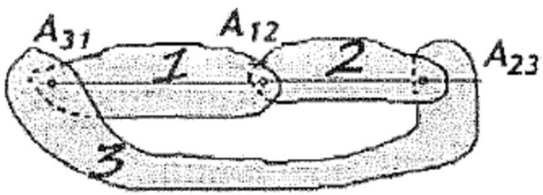
$M_y{}^{A12}{}_{S1}=0$ **ó** $M_y{}^{A12}{}_{S2;S3}=0$

$R_{n\text{-}n\ S1;S2}=0$ **ó** $R_{n\text{-}n\ S3}=0$

Cadena_Cerrada



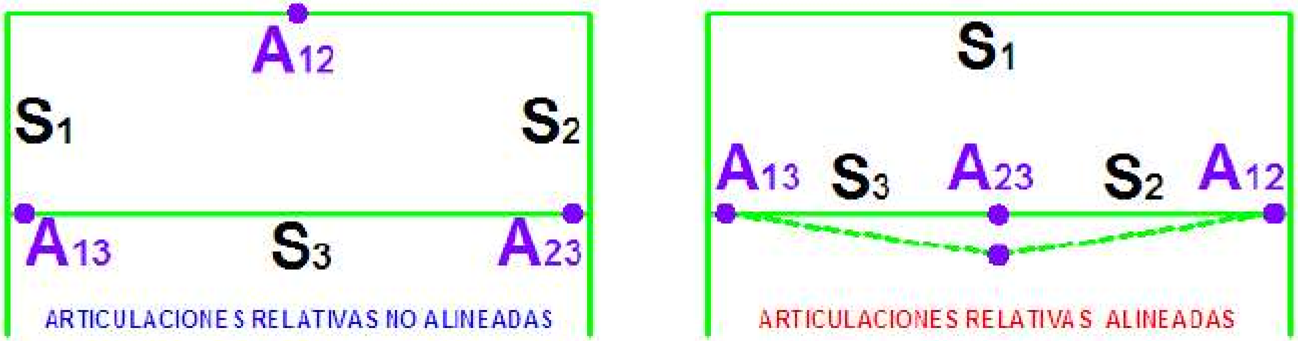




Para no tener inmovilidad aparente, las
Tres articulaciones no deben quedar alineadas

Cadena_Cerrada de Tres Chapas

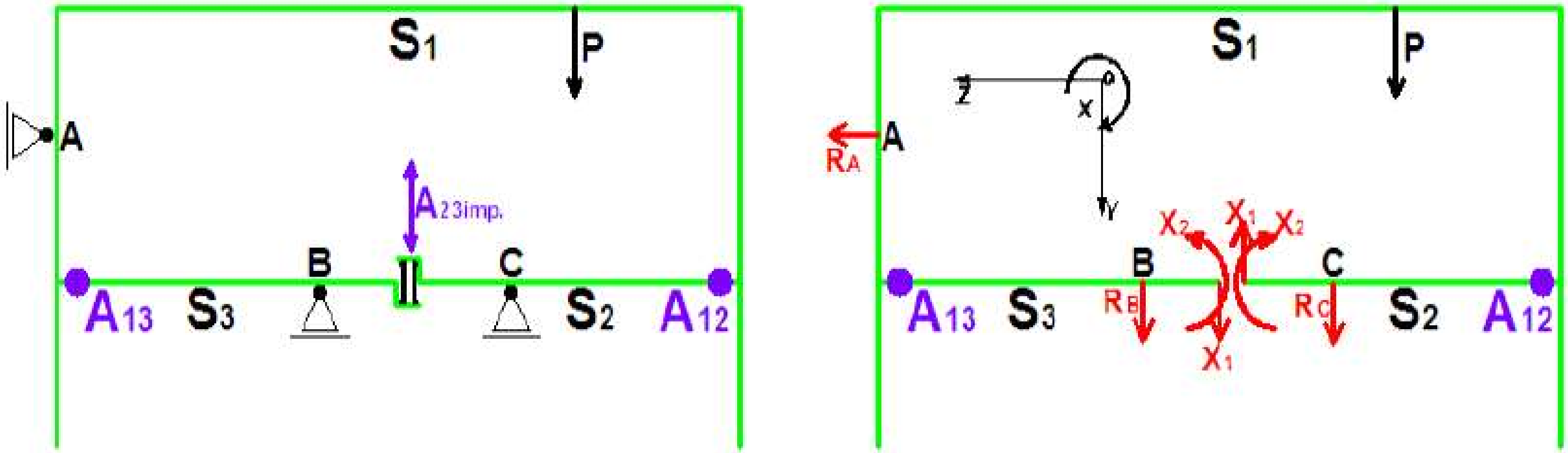
De tres chapas



Si cada chapa presenta **3GL** y la articulación relativa restringe **2GL** resulta: **NºGL=3x3 – 2x3=3**

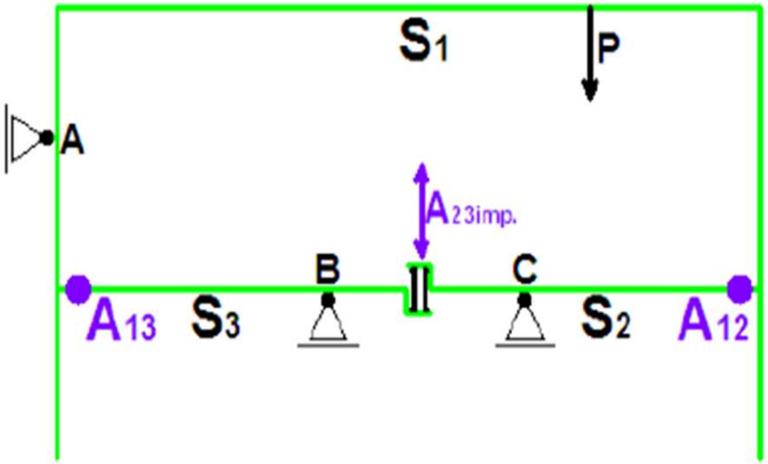
De acuerdo al resultado obtenido, la cadena cinemática cerrada de 3 chapas puede ser considerada para su estudio como una única chapa siempre que las articulaciones relativas no se encuentren alineadas. En dicha situación, para el análisis cinemático, el lector deberá tener presentes los conceptos explicados al analizar la vinculación de una chapa (ver pagina 6).

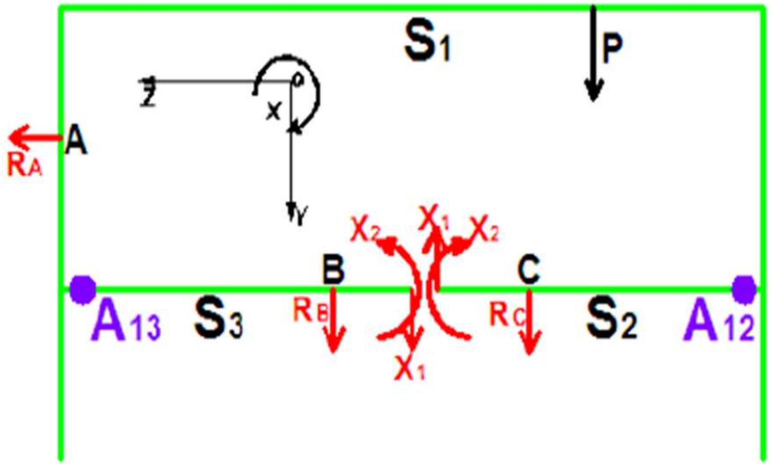
Cálculo de Reacciones de Vínculo.
Si bien en este caso (el problema presenta 3 incógnitas) es posible determinar las reacciones de vinculo externo por aplicación de las ecuaciones de equilibrio absoluto, a continuación se desarrolla un planteo mas general que permite tratar la cadena cerrada como una cadena abierta de igual numero de chapas.



Obsérvese que son **5** las incógnitas a determinar (RA, RB, RC, X1 y X2). Considerando **A** como centro de reducción las ecuaciones de equilibrio absoluto se escriben:

$$\boxed{R_Z=0 \quad R_Y=0 \quad M_X^A=0}$$





Las ecuaciones de equilibrio relativo resultan:

$M_X{}^{A12}{}_{S2}=0$ o $M_X{}^{A12}{}_{S1;S3}=0$ $M_X{}^{A13}{}_{S3}=0$ o $M_X{}^{A13}{}_{S1;S2}=0$

Como conclusión podemos decir que, en un sistema de ***n*** cuerpos unidos por articulación que forman una cadena abierta, *fig.12a*, es ***n°GL=n+2***.

Si hay articulaciones internas que pueden, a su vez, moverse por una guía, se agrega ***1GL*** más por cada una de las articulaciones que son de este tipo.

Para la disposición en estrella, *figs.12b*, el ***n°GL***, también es ***n+2***.

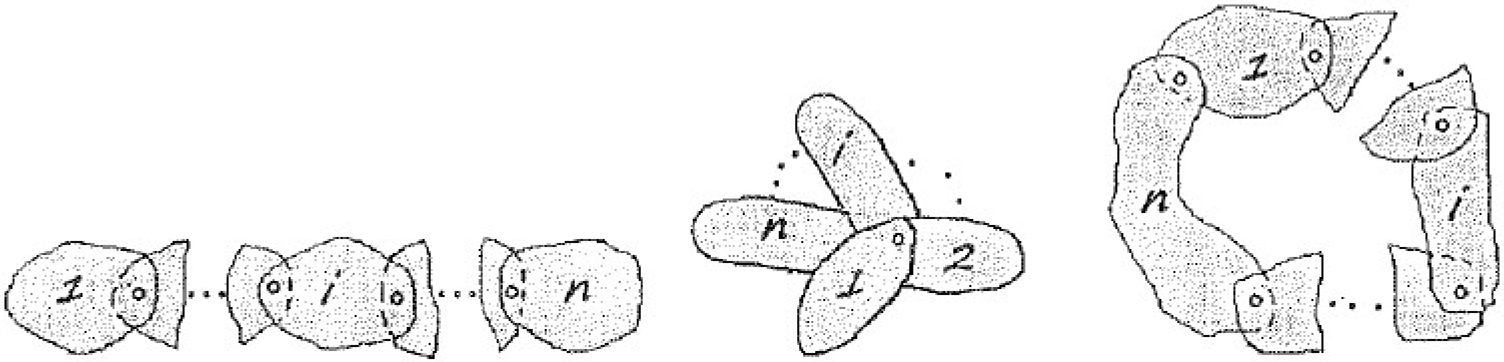
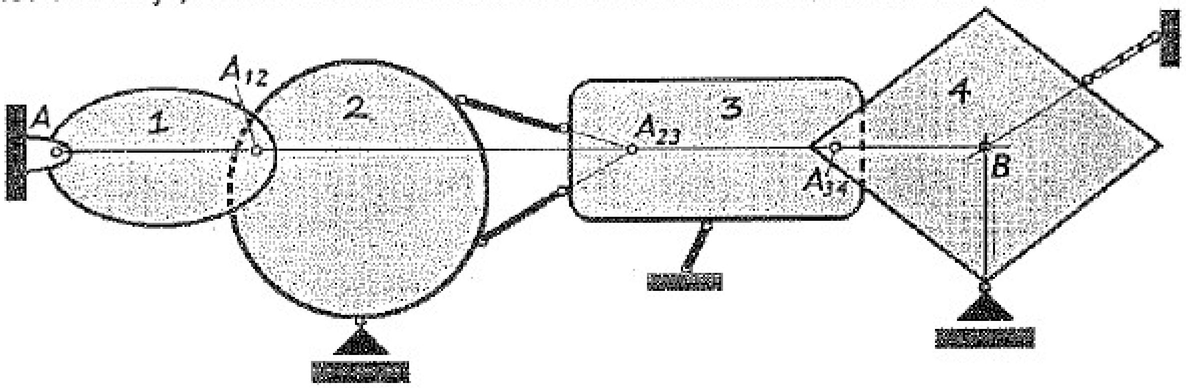


fig.12 a) b) c)

Para la disposición en cadena cerrada simple, de más de tres cuerpos, *fig.12c*, el ***n°GL*** se obtiene del siguiente análisis: para el conjunto de ***n*** cuerpos, formando una cadena abierta, teníamos ***n+2 GL;*** si cerramos la cadena, uniendo el cuerpo ***n*** al ***1***, con una nueva articulación, reducimos el ***n°GL*** en ***2***, por lo que ***n+2 -2=nGL***. Es decir que una cadena cerrada de ***n*** cuerpos tiene ***nGL***; relación general que vale también si ***n=3***.

Para tener al sistema isostáticamente vinculado, los vínculos deben disponerse de modo tal que eliminen todos los movimientos independientes es decir sus *GL*. La regla es que ningún cuerpo del sistema debe vincularse externamente con vínculos que eliminen en conjunto más que *3GL*, que no queden movimientos independientes de los cuerpos o subgrupos de cuerpos y no haya, en cualquier parte del sistema, inmovilidad aparente.

Para una cadena abierta de n cuerpos, tiene lugar una inmovilidad aparente si las articulaciones entre los cuerpos, sean estas reales (A_{12} y A_{34}) o ficticia (A_{23}), están alineadas y los cuerpos vinculados con una articulación fija, sea esta real como la A o ficticia como la B, están sobre esa recta.



Vinculos Internos

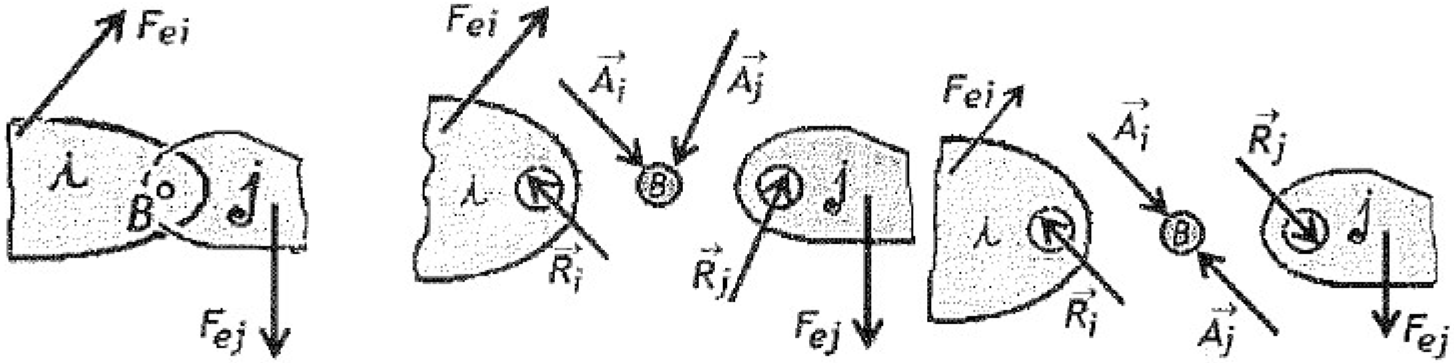


fig.13 a) b)

Los cuerpos ejercen sobre el perno las acciones $\vec{A_i}$, $\vec{A_j}$ que pasan por su centro y el perno ejerce las fuerzas reactivas $\vec{R_i}$, $\vec{R_j}$ sobre los cuerpos y tal que:

$$\vec{R_i} = -\vec{A_i} \qquad \text{y} \qquad \vec{R_j} = -\vec{A_j}$$

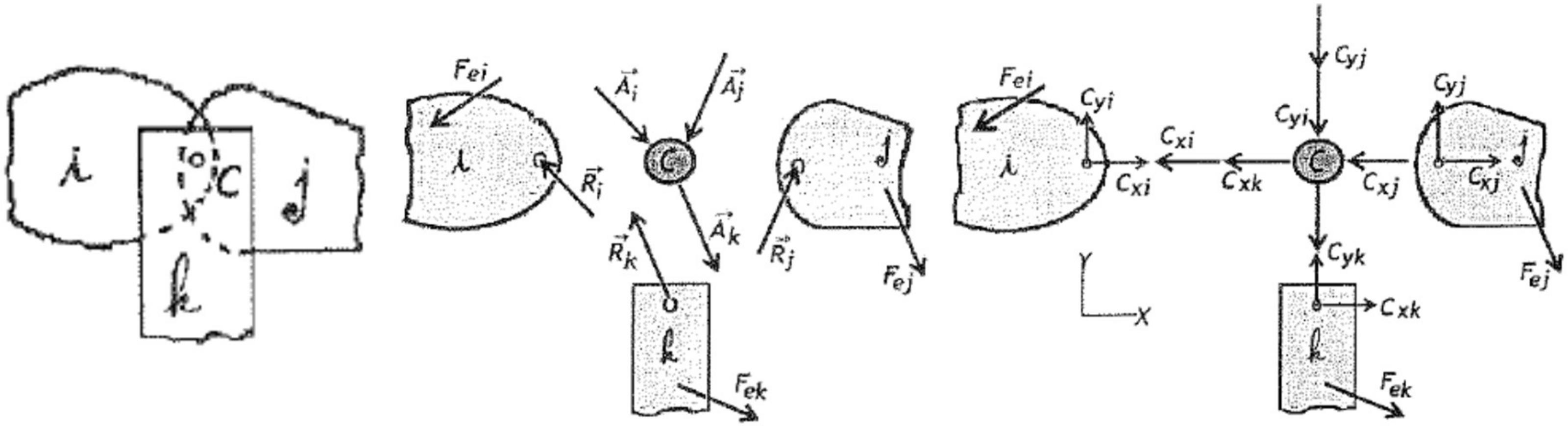
El equilibrio del perno bajo el sistema de fuerzas concurrente $\vec{A_i}$, $\vec{A_j}$, hace que:

$$\vec{A_i} + \vec{A_j} = -\vec{R_i} - \vec{R_j} = 0$$

De la cual: $\vec{R_i} = \vec{R_B} = -\vec{R_j}$

Ref: Estática Vectorial. Antonio La Cava

Vínculos Internos



$$\vec{A_i} + \vec{A_j} + \vec{A_k} = -\vec{R_i} - \vec{R_j} - \vec{R_k} = 0$$

o las cartesianas equivalentes, que asociamos a la articulación (*C*), *fig.16b*:

$$-C_{xi} - C_{xj} - C_{xk} = 0 \qquad -C_{yi} - C_{yj} - C_{yk} = 0$$

Ref: Estática Vectorial. Antonio La Cava

Vínculos Internos

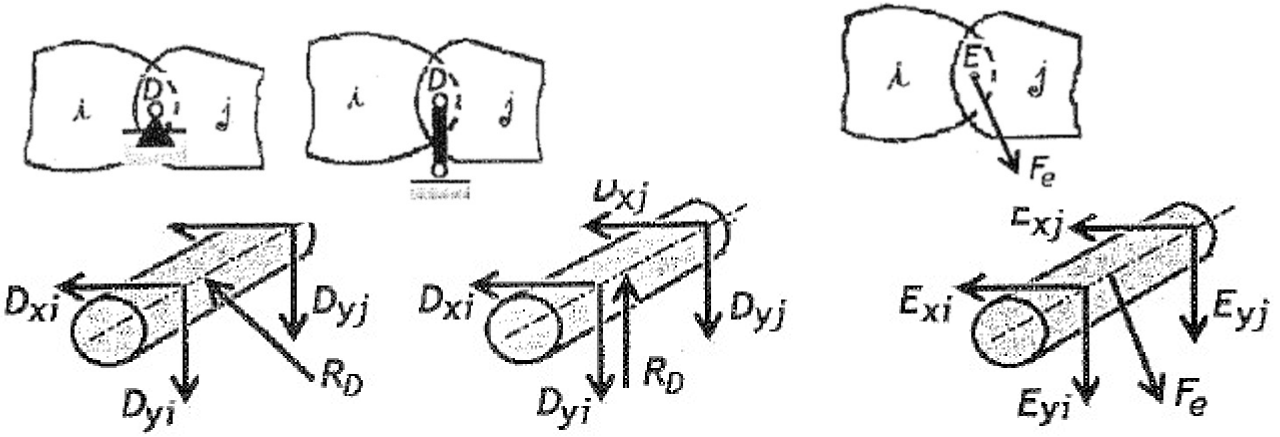


fig.17 a) b)

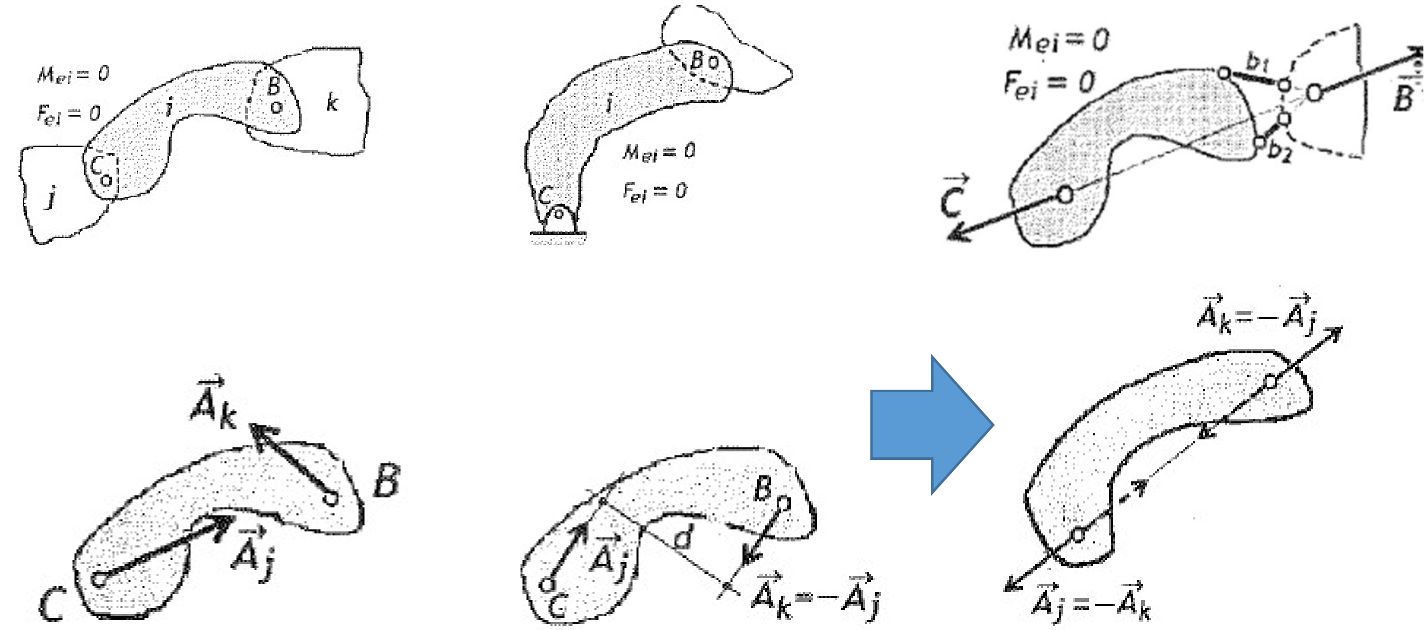
$$\overrightarrow{A_i} + \overrightarrow{A_j} + \overrightarrow{R_D} = 0 \quad \text{ó} \quad D_{xi} + D_{xj} + R_{Dx} = 0 \quad \text{y} \quad D_{yi} + D_{yj} + R_{Dy} = 0$$

$$\overrightarrow{A_i} + \overrightarrow{A_j} + \overrightarrow{F_e} = 0 \quad \text{ó} \quad E_{xi} + E_{xj} + F_{ex} = 0 \quad \text{y} \quad E_{yi} + E_{yj} + F_{ey} = 0$$

Si existe un par que parece aplicado en la articulación, debe especificarse en cuál de los cuerpos que conecta la articulación actúa el par. Cuando se plantea el equilibrio del perno, este par no entra en la ecuación pues se supone que actúa sobre alguno de los cuerpos, dado que al tratar al perno como a una partícula, sobre el mismo sólo pueden actuar fuerzas y no pares.

Ref: Estática Vectorial. Antonio La Cava

Cuerpo sin carga externa entre articulaciones



a) b) c)

La primera ecuación de equilibrio:

$$\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{A_j} + \overrightarrow{A_k} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \overrightarrow{A_k} = -\overrightarrow{A_j} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{A_j} = -\overrightarrow{A_k}$$

$$M_R = \left|\overrightarrow{A_j}\right| d = \left|\overrightarrow{A_k}\right| d = 0$$

Cuerpo sin carga externa entre articulaciones

Si las bielas son paralelas, *fig.21a*, y sus direcciones dadas por $\vec{e}$, la ecuación de equilibrio para el **DCL**, *fig.21b*:

$$\vec{B} + \vec{C_1} + \vec{C_2} = 0$$

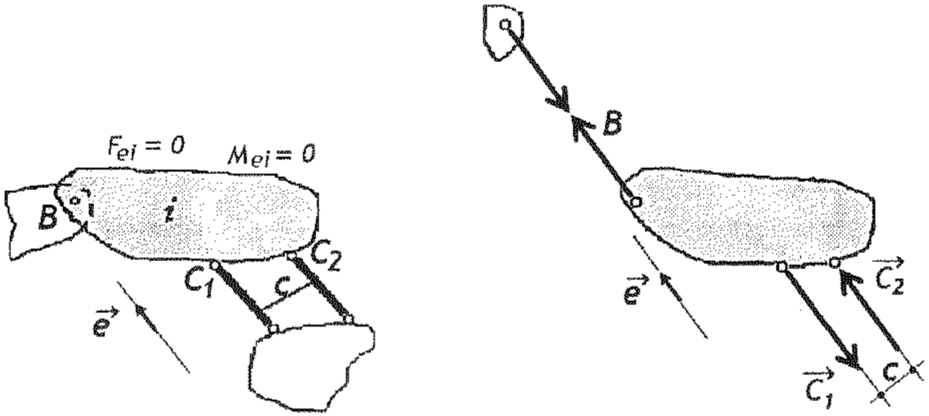


fig.21 a) b)

y de acuerdo a los sentidos asumidos para cada una de las fuerzas:

$$B\,\vec{e} + C_1(-\vec{e}) + C_2\,\vec{e} = (B - C_1 + C_2)\,\vec{e} = 0$$

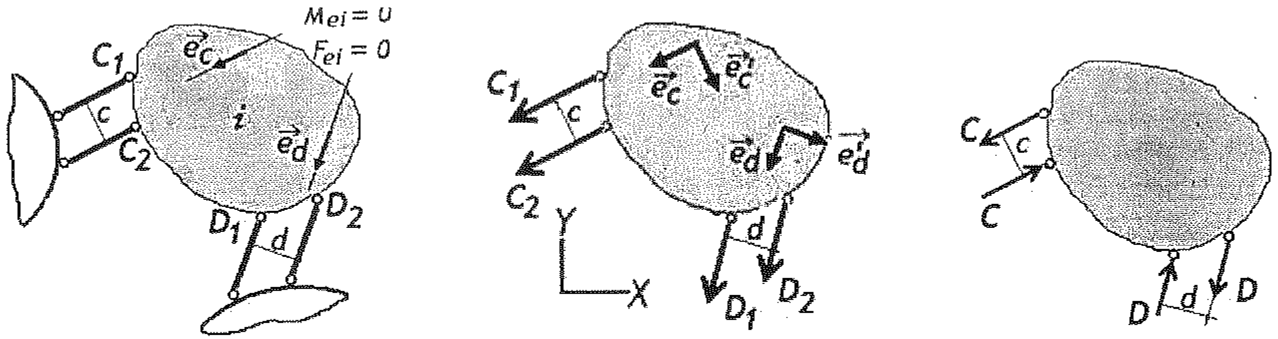
Es decir que la fuerza de interacción en la articulación ***B***, debe tener la dirección de las bielas; las fuerzas en las cuales serán, en general, distintas.

La otra ecuación de equilibrio, que por simplicidad la formulamos como el momento nulo con respecto a ***B***, permite escribir la ecuación adicional:

$$\overrightarrow{r_{BC_1}} \times C_1(-\vec{e}) + \overrightarrow{r_{BC_2}} \times C_2\,\vec{e} = 0$$

Ref: Estática Vectorial. Antonio La Cava

Cuerpo sin carga externa entre articulaciones



Los vectores unitarios en las direcciones normales a las bielas, *ec.9(cap.2)*, son:

$$\vec{e_c'} = \vec{k} \times \vec{e_c} \qquad \text{y} \qquad \vec{e_d'} = \vec{k} \times \vec{e_d}$$

Las dos ecuaciones escalares de equilibrio, de la nulidad de las componentes de la fuerza resultante
las direcciones normales a las bielas $\vec{e_c'}$ y $\vec{e_d'}$ son:

$$D_1\,\vec{e_d} \cdot \vec{e_c'} + D_2\,\vec{e_d} \cdot \vec{e'_c} = 0 \qquad \text{y} \qquad C_1\,\vec{e_c} \cdot \vec{e_d'} + C_2\,\vec{e_c} \cdot \vec{e_d'} = 0$$

De ambas: $(D_1 + D_2)\left(\vec{e_d} \cdot \vec{e_c'}\right) = 0$ y $(C_1 + C_2)\left(\vec{e_c} \cdot \vec{e'_d}\right) = 0$

Como son: $\vec{e_d} \cdot \vec{e_c'} \neq 0$ y $\vec{e_c} \cdot \vec{e_d'} \neq 0$

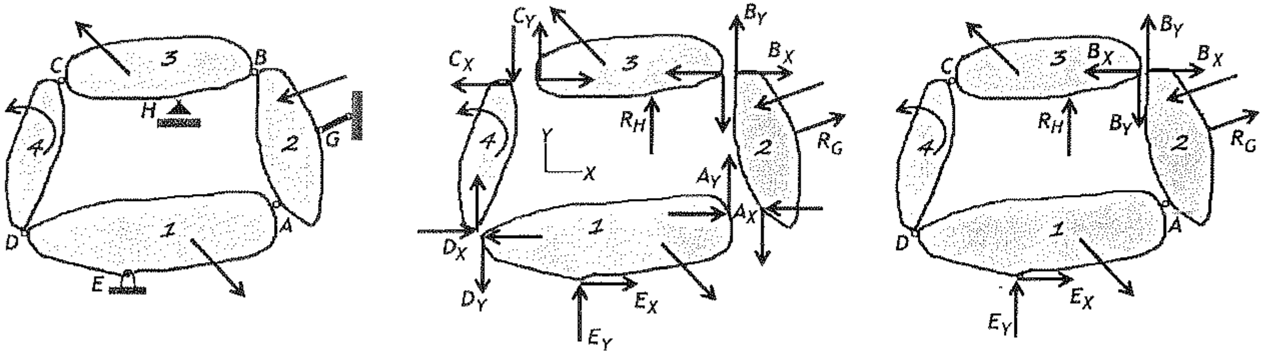
si hacemos: $C = C_1$ es $C_2 = -C_1 = -C$ y $D = D_2$ $D_1 = -D_2 = -D$

De modo que el cuerpo queda sometido a dos pares C, c y D, d. La tercera ecuación escalar de equilibrio, conduce a la relación:

$$C\,c + D\,d = 0 \qquad \text{y} \qquad C\,c = -D\,d$$

es decir que los vectores momento de los pares son de sentidos opuestos, *fig.24c*.

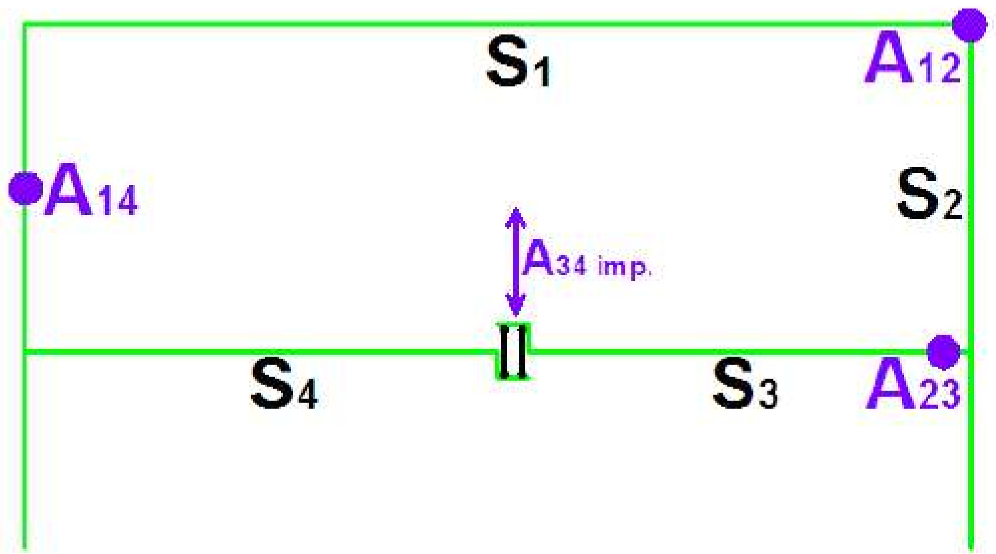
Cadena cinemática cerrada de cuatro chapas



Si el sistema a resolver estáticamente es una cadena cerrada y esta tiene cuatro, *fig.a*, o más cuerpos, las reacciones de vínculo no pueden determinarse por el planteo del equilibrio del ***DCL*** de todo el sistema. Habrá que realizar los ***DCLs*** de todos los cuerpos, con lo cual la suma de las componentes de las reacciones de vínculo externo e interacciones en los vínculos internos, *fig.b*, conduce a un doce incógnitas a resolver con las de doce ecuaciones de equilibrio planteables para los cuatro cuerpos.

Sin embargo, si se supone abierta la cadena por alguno de sus vínculos internos como en la interna ***B*** de *fig. c*, se reduce el número de incógnitas primarias a las reacciones de vínculo externo y a las que corresponden a la vinculación interna por la cual se abrió la cadena. El sistema queda reducido a seis ecuaciones. Una vez halladas estas seis incógnitas pueden luego calcularse las interacciones en las vínculos internos ***A***, ***C*** y ***D***.

De cuatro chapas

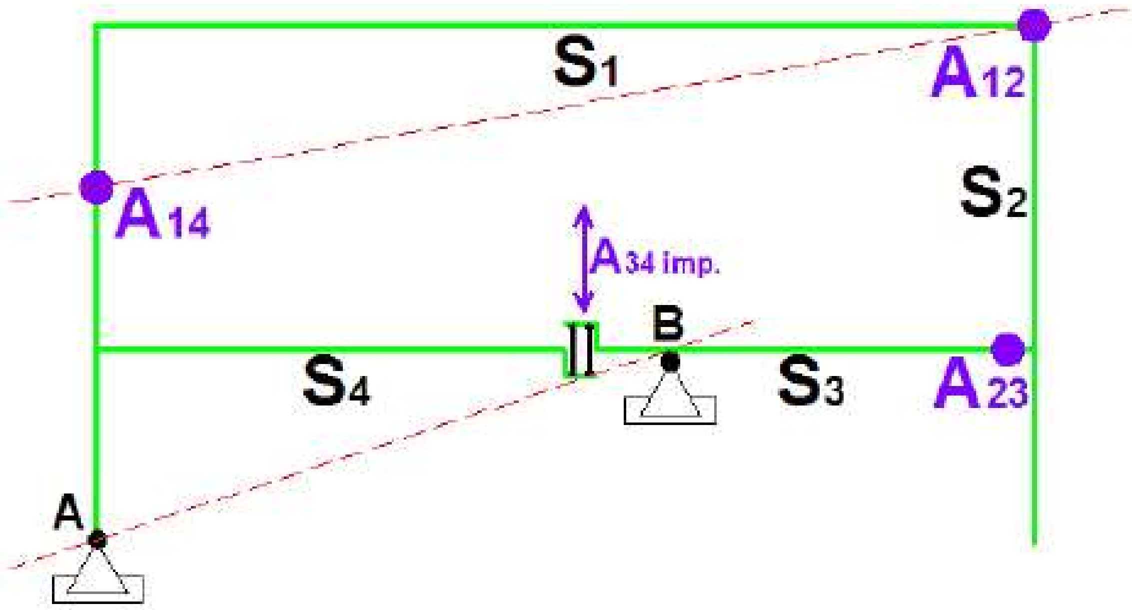


Si cada chapa presenta **3GL** y la articulación relativa restringe **2GL** resulta: $\boxed{\textbf{N°GL=3x4 – 2x4=4}}$

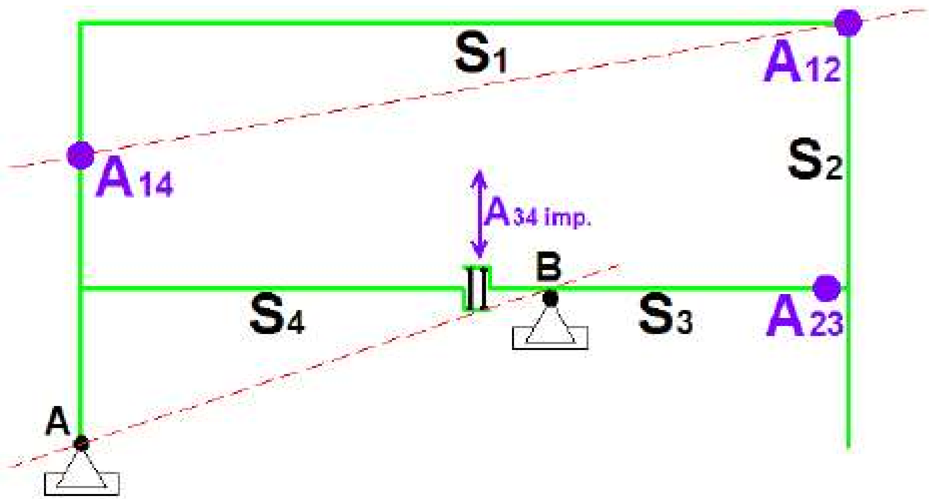
Cadena_Cerrada de Cuatro Chapas

Análisis cinemático.

a)-Se verifica que $\boxed{N°GL=N°CV}$ .Se cumple, dado que la cadena cinemática en estudio presenta 4 grados de libertad y tiene impuestas 4 condiciones de vínculo: 2 en **S3** (apoyo fijo) y 2 en **S4** (apoyo fijo).



Cadena_Cerrada de Cuatro Chapas



b)-Se comprueba la eficiencia de la vinculación:

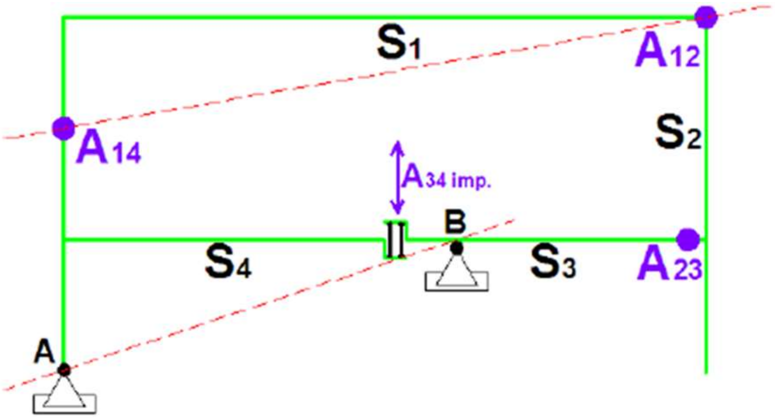
- Las chapas **S3** y **S4** conforman un **arco de 3 articulaciones** y además como la recta que contiene a los puntos fijos **A** y **B** no contiene a la articulación relativa **A34imp.** entonces **S3** y **S4** están fijas.

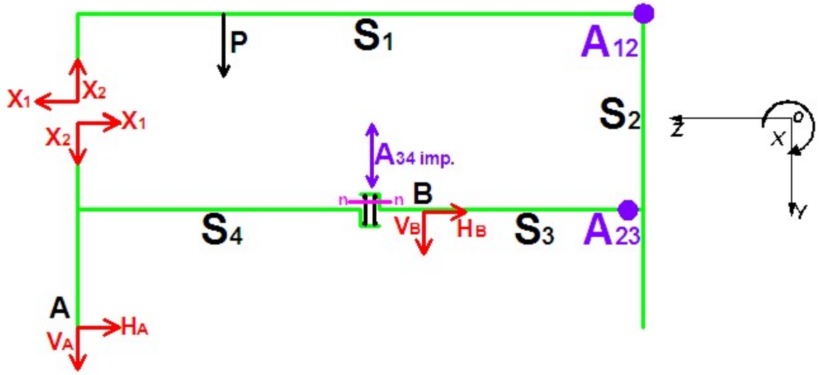
--Como consecuencia de estar fijas, en particular **A14** y **A23 son punto fijos y** las chapas **S1** y **S2** conforman también un **arco de 3 articulaciones** y **S1 y S2** tambien se encuentran fijas que la recta que contiene al punto fijo **A14** y a la articulación relativa **A12** no contiene al punto fijo **A23**. Como simultáneamente se cumplen los puntos **a** y **b** puede concluirse que la estructura **resulta isostáticamente vinculada y cinemáticamente invariable**.

Ref: UTN Ing Eduardo Marco

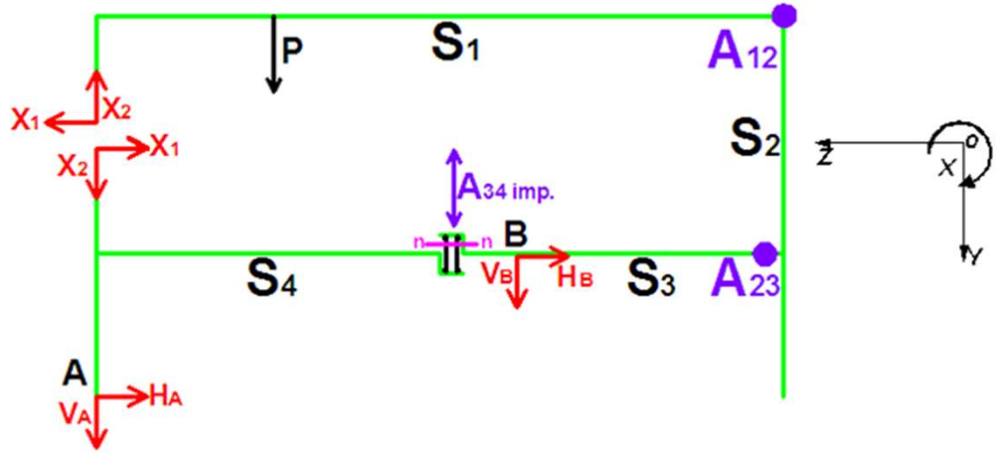
Cálculo de Reacciones de Vínculo.

En este caso son **4** las reacciones de vinculo externo a determinar y como siempre **3** las ecuaciones de equilibrio absoluto. Para salvar la indeterminación, la estrategia consiste en abrir la cadena cinemática en una articulación relativa, de manera de generar igual número de incógnitas que de ecuaciones tal como se desarrolla a continuación:





Cadena_Cerrada de Cuatro Chapas



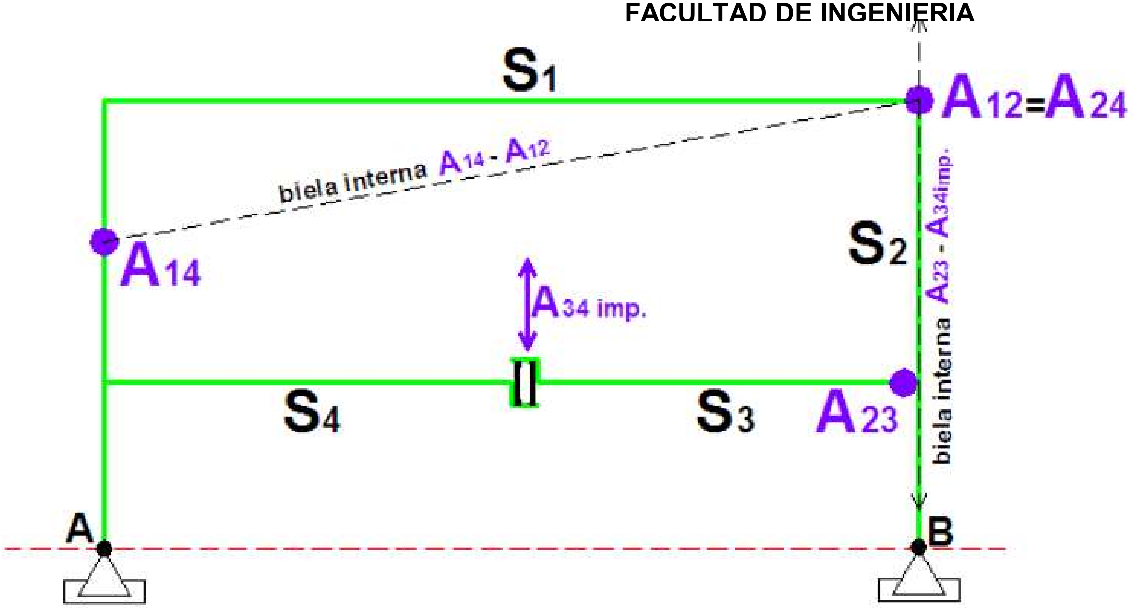
Obsérvese que son **6** las incógnitas a determinar (H_A, V_A, H_B, V_B, X_1 y X_2). Considerando **A** como centro de reducción las ecuaciones de equilibrio absoluto se escriben:

$$\boxed{R_Z=0 \quad R_Y=0 \quad M_X^{A}=0}$$

Las ecuaciones de equilibrio relativo resultan:

$$\boxed{M_X^{A12}{}_{S1}=0 \text{ o } M_X^{A12}{}_{S2;S3;S4}=0 \quad M_X^{A23}{}_{S1;S2}=0 \text{ o } M_X^{A23}{}_{S3;S4}=0 \quad R_{n\text{-}n}\,{}_{S1;S2;S3}=0 \text{ o } R_{n\text{-}n}\,{}_{S4}=0}$$

Cadena_Cerrada de Cuatro Chapas



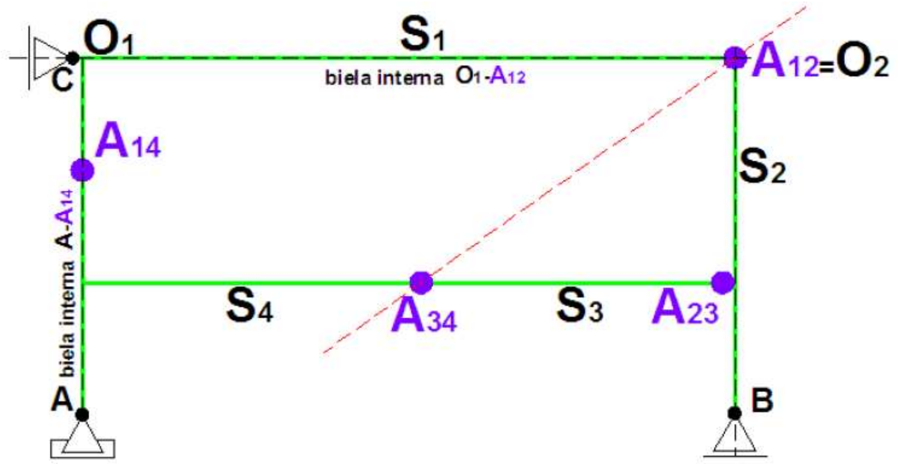
Análisis cinemático.

a)-Se verifica que **N°GL=N°CV** .Se cumple, dado que la cadena cinemática en estudio presenta 4 grados de libertad y tiene impuestas 4 condiciones de vínculo: 2 en **S2** (apoyo fijo) y 2 en **S4** (apoyo fijo).

b)-Se comprueba la eficiencia de la vinculación. Las chapas **S2** y **S4** se encuentran articuladas en la intersección de las direcciones de las bielas internas A_{14}-A_{12} A_{23}-$A_{34imp.}$ (articulación relativa A_{24}) conformando un **arco de 3 articulaciones.** Como además la recta que contiene a los puntos fijos de ambas chapas (**A** y **B**) no contiene a la articulación relativa A_{24} entonces **S2** y **S4** se encuentran fijas.

Como simultáneamente se cumplen los puntos **a** y **b** puede concluirse que la estructura resulta isostáticamente vinculada y cinemáticamente invariable.

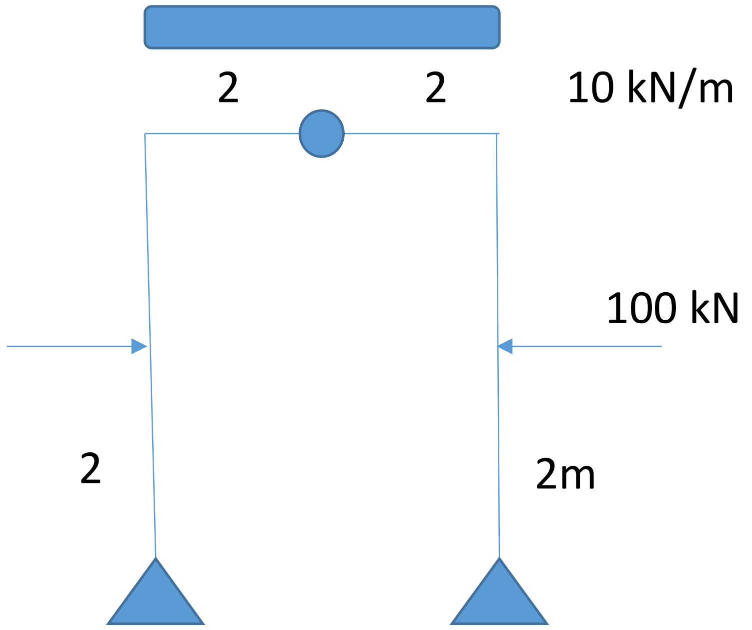
Ref: UTN Ing Eduardo Marco

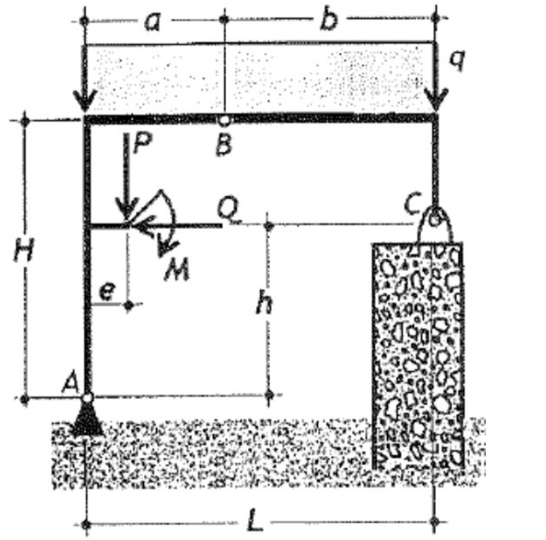


Análisis cinemático.

a)-Se verifica que $\boxed{N°GL=N°CV}$ .Se cumple, dado que la cadena cinemática en estudio presenta 4 grados de libertad y tiene impuestas 4 condiciones de vínculo: 1 en **S1** (apoyo móvil), 1 en **S2** (apoyo móvil) y 2 en **S4** (apoyo fijo)

b)-Se comprueba la eficiencia de la vinculación. La chapa **S1** presenta un punto fijo (**O1**) en la intersección de las direcciones de la biela interna **A-A14** y el apoyo móvil ubicado en el punto **C.** La chapa **S2** presenta un punto fijo (**O2**) en la intersección de las direcciones de la biela interna **O1-A12** y el apoyo móvil ubicado en el punto **B.** Como **O2** coincide con **A12** la chapa **S1** esta fija por presentar 2 puntos fijos (**O1** y **A12**).En particular **A14** esta fijo y entonces **S4** también esta fija por presentar 2 puntos fijos (**A** y **A14**). En particular la articulación relativa **A34** esta fija.
Las chapas **S2** y **S3** conforman un arco de 3 articulaciones y como la recta que contiene sus puntos fijos (**O2** y **A34**) no contiene a la articulación relativa **A23** entonces **S2** y **S3** también se encuentran fijas.

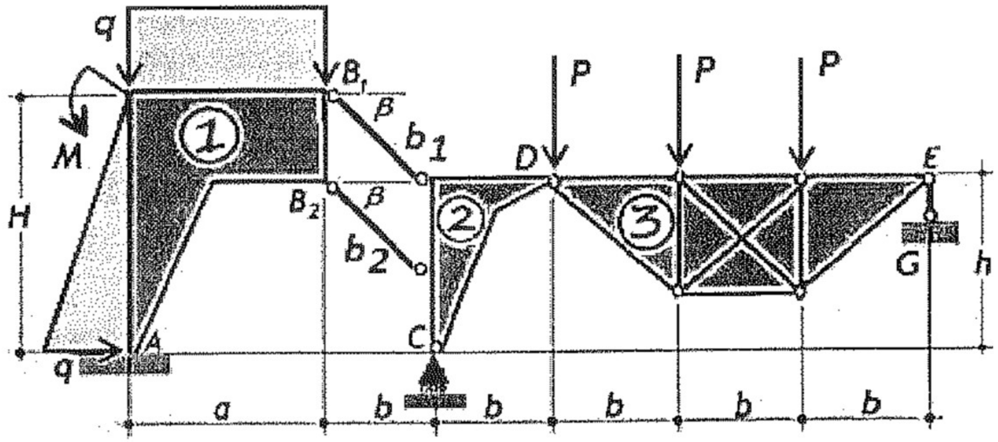




$H = 8\,m \quad L = 10\,m \quad h = 5\,m \quad a = 4\,m$

$b = 6\,m \quad e = 1\,m \quad P = 60\,kN \quad Q = 8\,kN \quad q = 8\,\frac{kN}{m} \quad M = 7\,kNm$

Ref: Estática Vectorial. Antonio La Cava



$a = 6\,m \quad b = 4\,m \quad h = 5\,m \quad H = 8\,m \quad P = 60\,kN \quad q = 8\,\frac{kN}{m} \quad M = 1\,kNm$

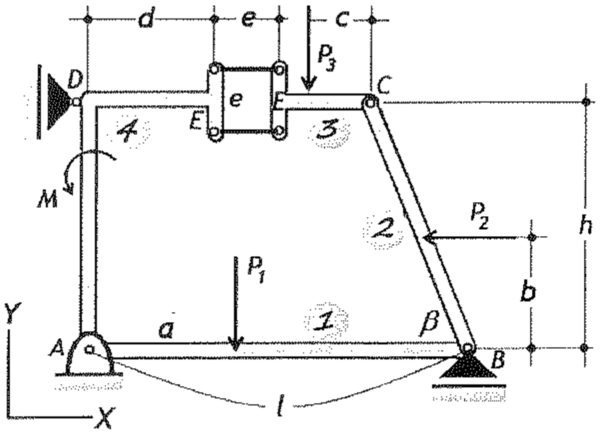
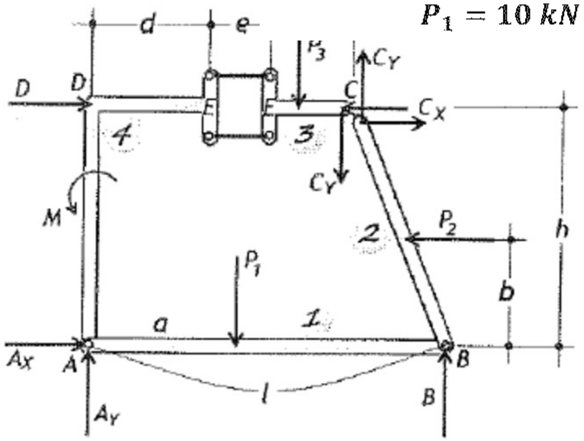


fig.a

$l = 6\,m \quad h = 4\,m \quad a = 2.5\,m \quad b = 1.8\,m \quad c = 1\,m \quad d = 2\,m \quad e = 1\,m \quad \beta = 70°$

$P_1 = 10\,kN \quad P_2 = 20\,kN \quad P_3 = 30\,kN \quad M = 4\,kNm$



$$F_{RX} = A_X + D - P_2 = 0 \qquad (17)$$

$$F_{RY} = A_Y + B - P_1 - P_3 = 0 \qquad (18)$$

$$M_{RA} = -D\,h + B\,l + M - P_3\left(l - \frac{h}{tan\,\beta} - c\right) - P_1\,a + P_2\,b = 0 \qquad (19)$$

Ref: Estática Vectorial. Antonio La Cava

Separación por la articulación ficticia que corresponde a las bielas E: de las dos subcadenas que quedan, vemos que es más simple plantear el equilibrio del ***DCL*** que involucra sólo al ***C3***, (fig.i), que hacerlo con el subsistema ***C4***, ***C1***, ***C2***.

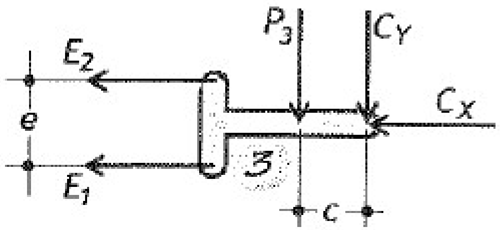


fig.i

fig.j

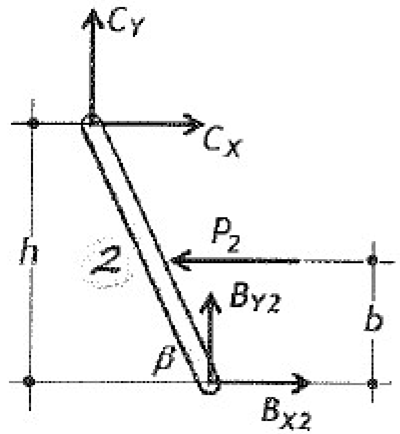
Para que no aparezcan en las ecuaciones las fuerzas internas E_1 y E_2, usamos como ecuación de equilibrio la resultante nula de la suma de fuerzas en Y:

$$F_{RY}^{(C3)} = -C_Y - P_3 = 0 \tag{20}$$

Separación por la articulación B: En este caso planteamos como ecuación de equilibrio la correspondiente al subsistema formado por sólo el ***C2***, (fig.j), porque hay menos cargas involucradas y el subsistema es más simple, que con el subsistema ***C1***, ***C4***, ***C3***.

Para que en la ecuación sólo aparezcan las incógnitas primarias y no las de la articulación en ***B***, la ecuación de equilibrio es la de momentos respecto a ***B***:

$$M_{RB}^{(C2} = -C_Y \frac{h}{\tan\beta} - C_X\, h + P_2\, b = 0 \qquad (21)$$



Separación por la articulación A: En este caso planteamos la ecuación de equilibrio complementaria que puede ser para el subsistema de los ***C1***, ***C2***, (fig.k), o para el ***C3***, ***C4***, (fig.l), puesto que no hay ventaja apreciable con uno u otro. En cualquiera de los dos casos la ecuación adicional es la de momento respecto a la articulación por la que se separó, que es la ***A***.

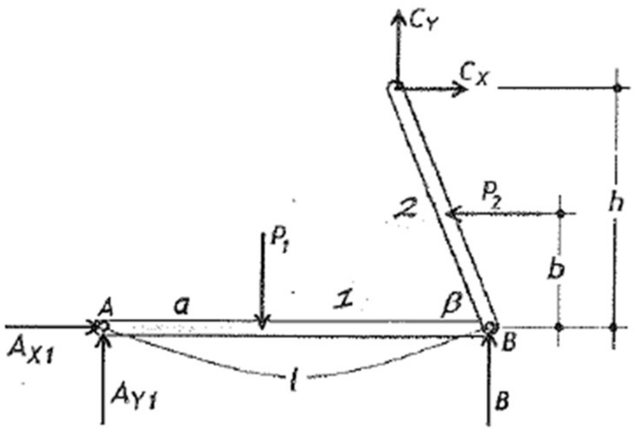


fig.k

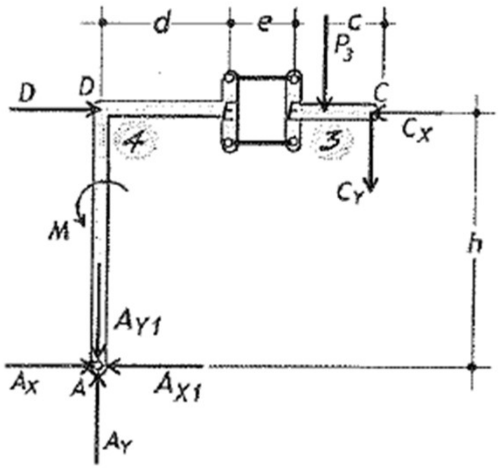


fig.l

$$M_{RA}^{(C1,C2} = -P_1\, a + B\, l + P_2\, b - C_X\, h + C_Y\left(l - \frac{h}{\tan\beta}\right) = 0 \qquad (22)$$

O alternativamente:

$$M_{RA}^{(C3,C4} = C_X\, h - C_Y\left(l - \frac{h}{\tan\beta}\right) - P_3\left(l - c - \frac{h}{\tan\beta}\right) - D\, h + M = 0 \qquad (22')$$

De la solución del sistema de seis ecuaciones (17), (18), (19), (20), (21) y (22) [ó (22')], obtendríamos las reacciones externas A_X, A_Y, B, D y las fuerzas de interacción C_X, C_Y en la articulación ***C***, que quedan expuestas al transformar la cadena cerrada en abierta. Luego se pueden determinar las restantes interacciones internas con los ***DCL*** de cada cuerpo y articulación.

ALTERNATIVA ABRIR E

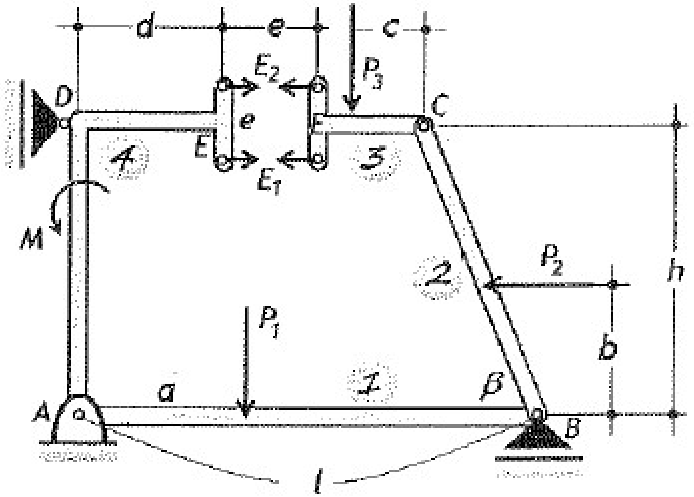


fig.m

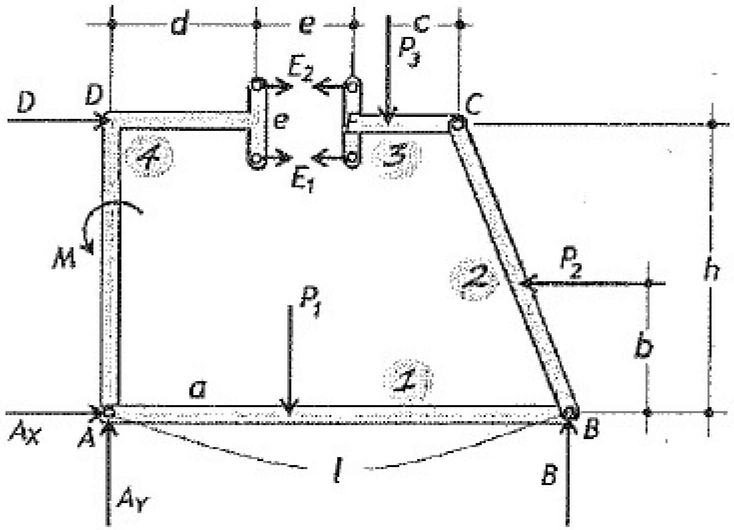


fig.n

Las incógnitas son las cuatro reacciones A_X, A_Y, B, D, a las que se añaden las fuerzas en las bielas E_1, E_2.

Separación de la cadena abierta por la articulación C: vemos que es más simple plantear el equilibrio del ***DCL*** que involucra sólo al *C3* (fig.o), que hacerlo con el subsistema ***C4***, ***C1***, ***C2***:

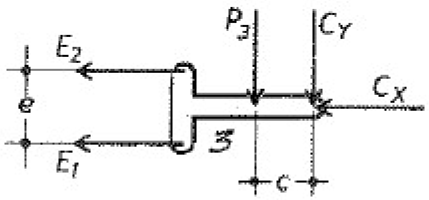


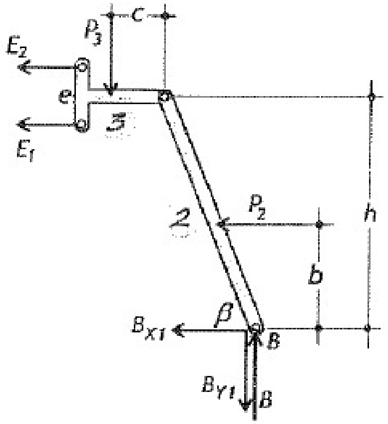
fig.o

Para que no aparezcan en las ecuaciones las fuerzas internas C_X y C_Y usamos como ecuación de equilibrio el momento resultante nulo respecto a C:

$$M_{RC}^{(C3} = (E_2 - E_1)\frac{e}{2} + P_3\, c = 0 \qquad (23)$$

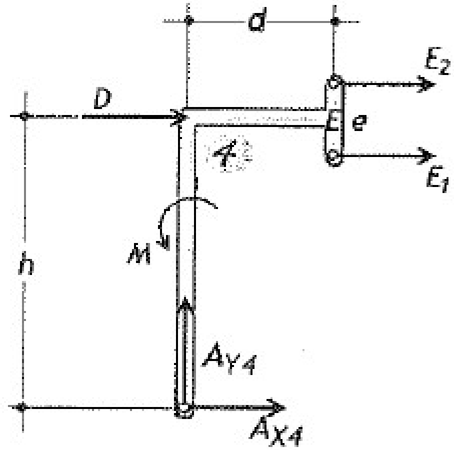
Separación por la articulación B: En este caso planteamos como ecuación de equilibrio la correspondiente al subsistema formado por el ***C2*** y el ***C3*** (fig.p).

Para que en la ecuación sólo aparezcan las incógnitas primarias E_1, E_2 y no las de la articulación en ***B***, la ecuación de equilibrio es la de momentos respecto a ***B***:



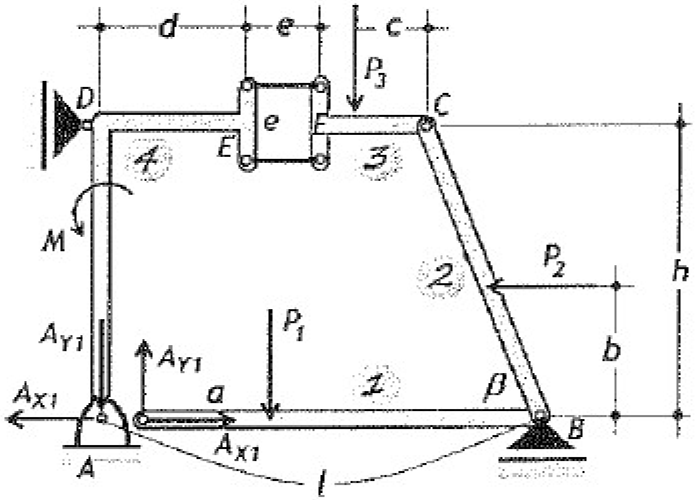
$$M_{RB}^{(C3,C2} = E_1\left(h - \frac{e}{2}\right) + E_2\left(h + \frac{e}{2}\right) + P_3\left(c + \frac{h}{tan\,\beta}\right) + P_2\,b = 0 \qquad (24)$$

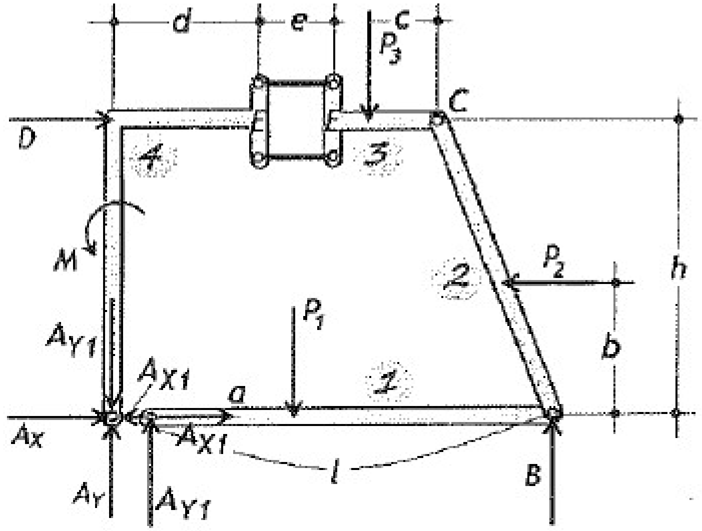
Separación por la articulación A: En este caso planteamos como ecuación de equilibrio complementaria ya sea para el subsistema de los ***C3***, ***C2*** y ***C1*** o para el ***C4***. En cualquiera de los dos casos la ecuación adicional es la de momento respecto a la articulación por la que se separó que es la ***A***. La ecuación de equilibrio de ***C4*** (fig.q):



$$M_{RA}^{(C4} = -E_1\left(h - \frac{e}{2}\right) - E_2\left(h + \frac{e}{2}\right) - D\,h + M = 0 \qquad (25)$$

De la solución del sistema de seis ecuaciones (17), (18), (19), (23), (24) y (25), se obtienen las reacciones externas A_X, A_Y, B, D y las interacciones E_1, E_2 que quedan expuestas al abrir la cadena cerrada por estas bielas internas, con las cuales luego se pueden determinar las restantes interacciones internas con los ***DCL*** de cada cuerpo y articulación.





Separación por la articulación B: En este caso planteamos como ecuación de equilibrio la correspondiente al subsistema formado por sólo el ***C1***, (fig.t). Para que en la ecuación de equilibrio no aparezca la interacción en la articulación interna ***B***, B_{X1}, B_{Y1}, hacemos el, ec.[26]:

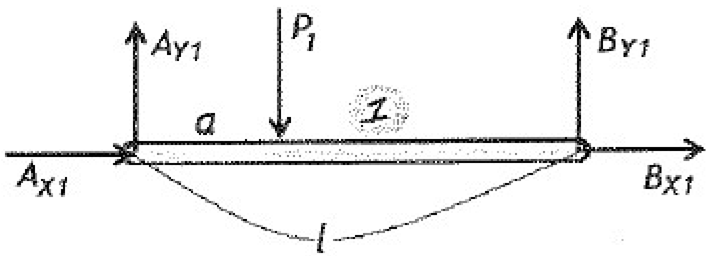


fig.t

$$M_{RB}^{(C1} = -A_{Y1}\, l + P_1(l - a) = 0 \qquad (26)$$

Separación de la cadena abierta por la articulación C: planteamos el equilibrio del ***DCL*** que involucra al ***C1***, ***C2***, (fig.u):

Separación de la cadena abierta por la articulación C: planteamos el equilibrio del ***DCL*** que involucra al ***C1***, ***C2***, (fig.u):

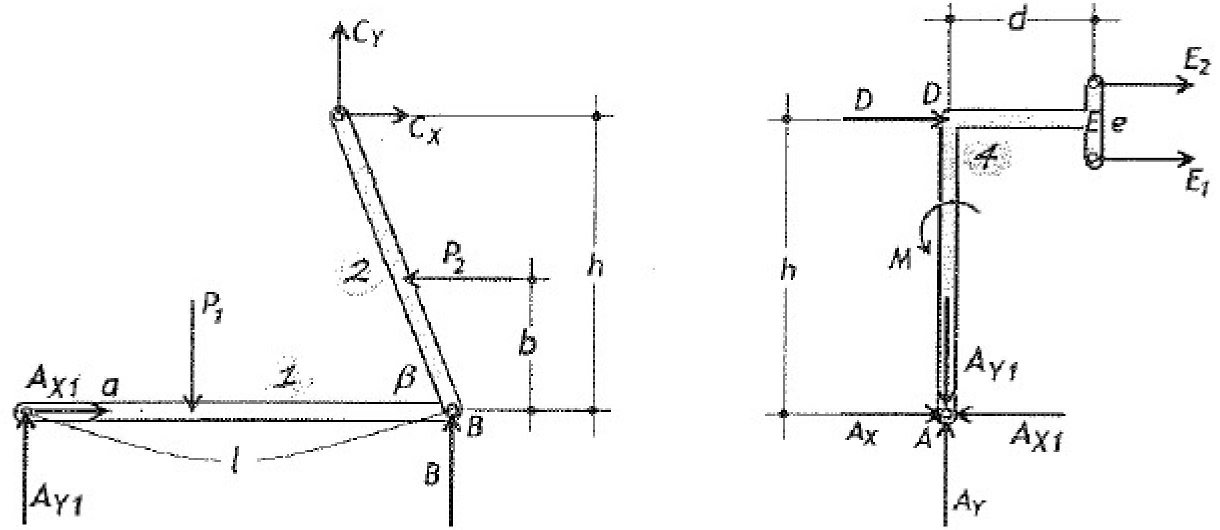


fig.u

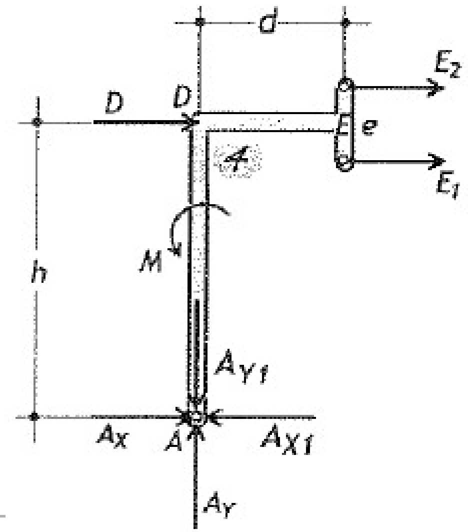
$$M_{RC}^{(C1,C2} = A_{X1}\,h - A_{Y1}\left(l - \frac{h}{tan\,\beta}\right) + P_1\left(l - a - \frac{h}{tan\,\beta}\right) + B\,\frac{h}{tan\,\beta} - P_2(h-b) = 0$$

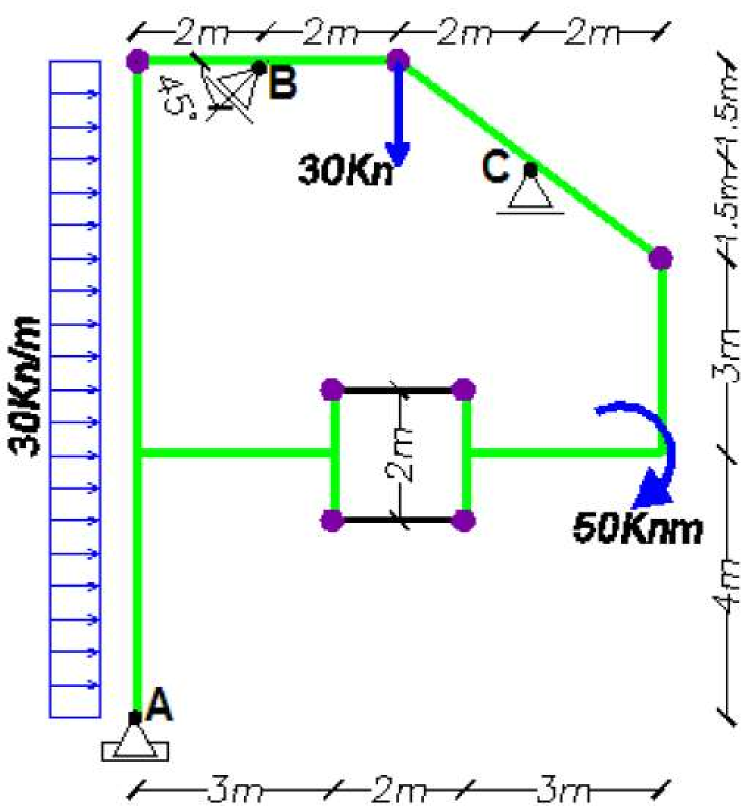
Separación por la articulación ficticia que corresponde a las bielas E: vemos que es más simple plantear el equilibrio del ***DCL*** que involucra sólo al ***C4***, (fig.v).

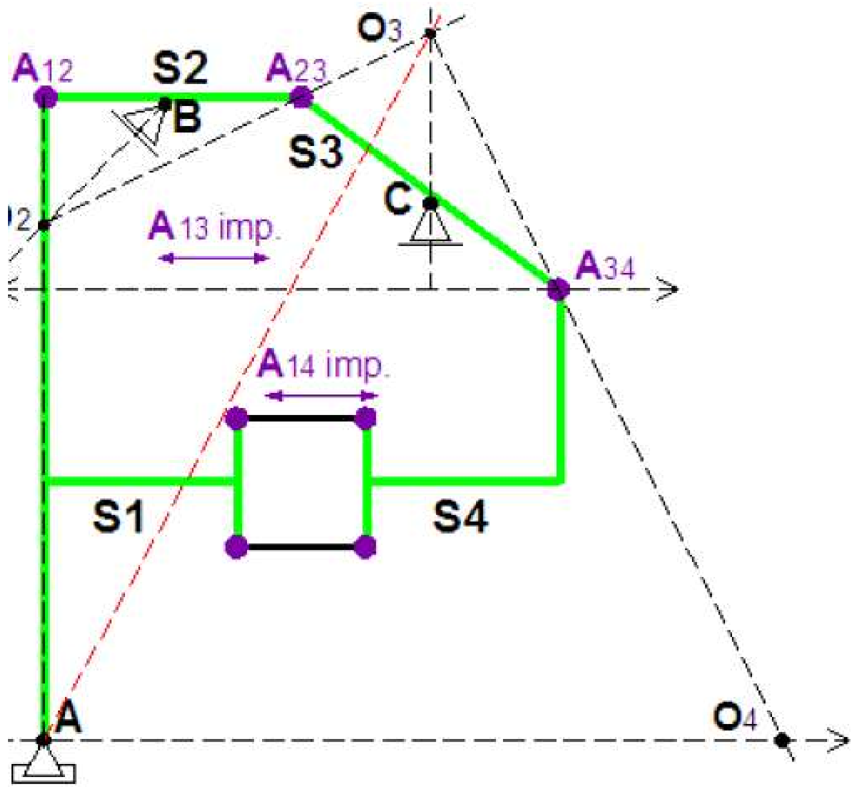
Para que no aparezcan en las incógnitas la fuerzas internas E_1 y E_2 usamos como ecuación de equilibrio la resultante nula de la suma de fuerzas en ***Y***:

$$F_{RY}^{(C4} = -A_Y - A_{Y1} = 0 \qquad (28)$$

La solución del sistema de seis ecuaciones (17), (18), (19), (26), (27) y (28), da las reacciones externas A_X, A_Y, B, D, y las fuerzas de interacción A_{X1}, A_{Y1} del ***C1*** con la articulación múltiple ***A***, que se exponen cuando se transforma la cadena cerrada en abierta. Con ellas luego se pueden determinar las restantes interacciones internas con los ***DCL*** de cada cuerpo y articulación.

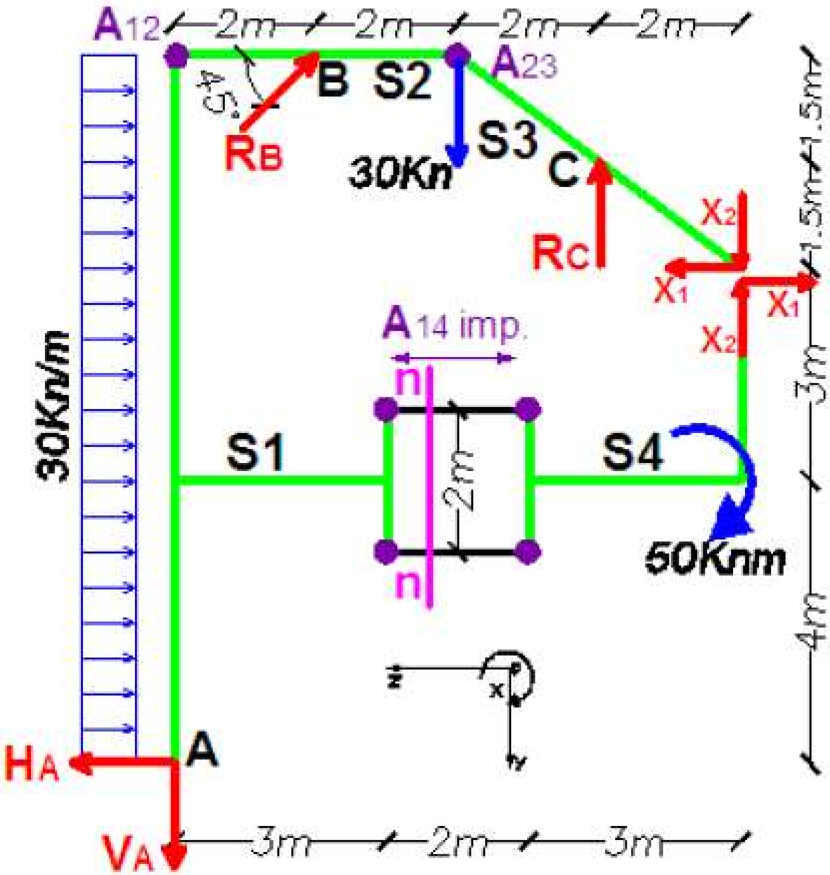






b)-<u>Se comprueba la eficiencia de la vinculación</u>. La chapa **S1** presenta un punto fijo **A** como consecuencia del apoyo fijo. La chapa **S2** presenta un punto fijo (**O_2**) en la intersección de las direcciones de la biela interna **A-A_{12}** y el apoyo móvil ubicado en el punto **B.** La chapa **S3** presenta un punto fijo (**O_3**) en la intersección de las direcciones de la biela interna **O_2-A_{23}** y el apoyo móvil ubicado en el punto **C.** La chapa **S4** presenta un punto fijo (**O_4**) en la intersección de las direcciones de la biela interna **O_3-A_{34}** y la biela interna **A-$A_{14imp.}$**
Las chapas **S1** y **S3** conforman un **arco de 3 articulaciones** y la articulación relativa es **$A_{13imp.}$** (ver figura de análisis) y como la recta que contiene los puntos fijos no contiene a la articulación relativa entonces **S1** y **S3** están fijas. Consecuentemente **S2** y **S4** también están fijas

Ref: UTN Ing Eduardo Marco



Ecuaciones de equilibrio absoluto.

$$R_Z=0 \longrightarrow H_A - 0.7071R_B - 300\ Kn=0$$

$$R_Y=0 \longrightarrow V_A - 0.7071R_B - R_C + 30\ Kn=0$$

$$M_X^{A}=0 \longrightarrow 5.6568mR_B - 6mR_C + 1670\ Knm=0$$

Ecuaciones de equilibrio relativo.

$$R_{n\text{-}n}\ S_4=0 \longrightarrow \boxed{X_2=0}$$

$$M_X^{A23}S_3=0 \longrightarrow 3mX_1 - 2mR_C=0 \longrightarrow \boxed{R_C=1.5X_1}$$

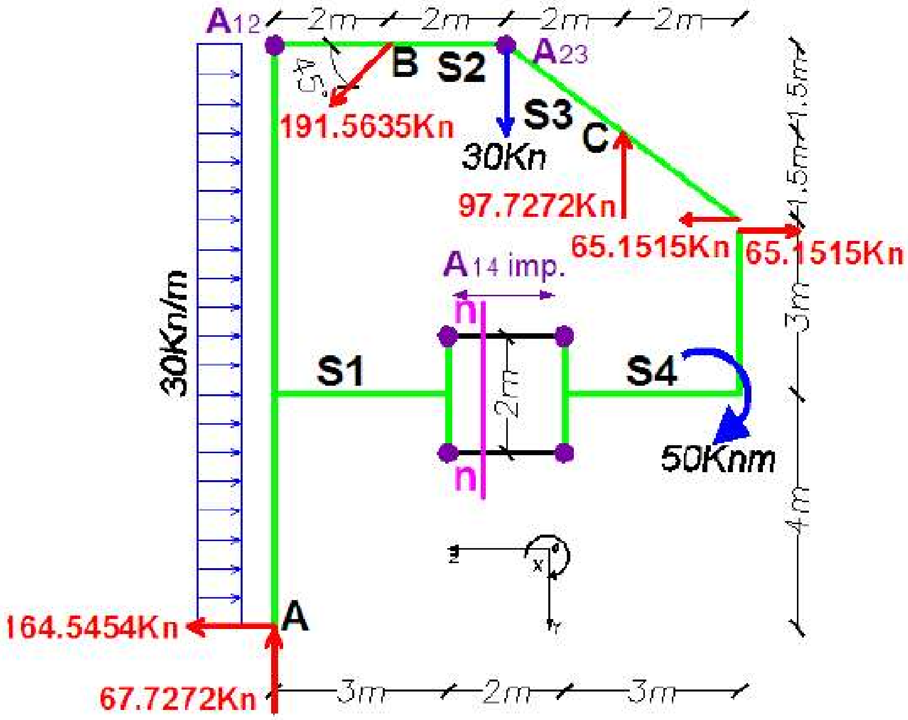
$$M_X^{A12}S_{1;}S_4=0 \longrightarrow 10mH_A - 3mX_1 - 1450\ Knm=0$$

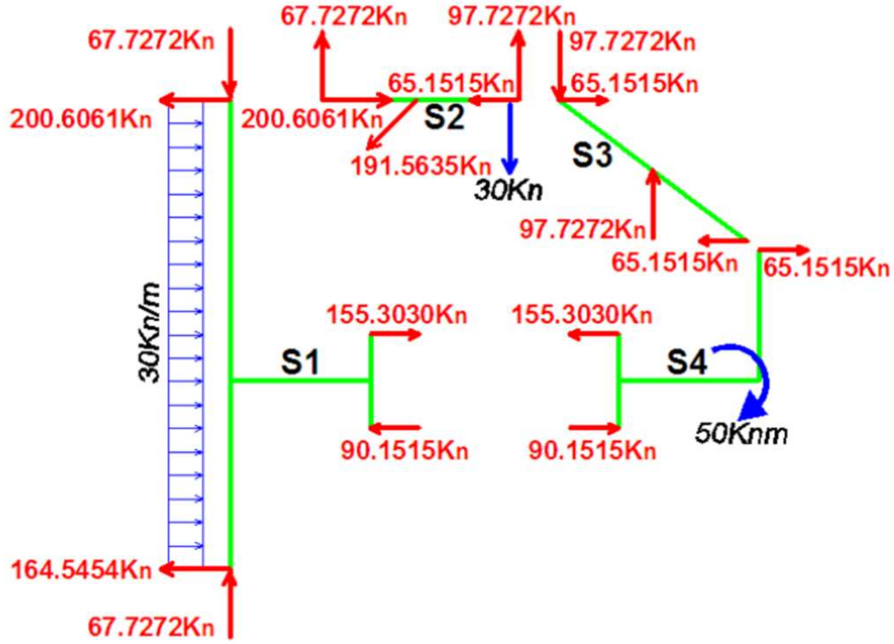
Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\boxed{H_A=164.5454Kn\ \ V_A=-67.7272Kn\ \ R_B=-191.5635Kn\ \ R_C=97.7272Kn}$$

$$\boxed{X_1=65.1515Kn\ \ X_2=0Kn}$$

Ref: UTN Ing Eduardo Marco





Ref: UTN Ing Eduardo Marco