Ecuaciones en diferencias de orden 1

Mario Martín Azcueta

29 de marzo de 2012

1. Ecuaciones en diferencias de orden 1

En este documento vamos a resolver la forma general de las ecuaciones en diferencias de orden 1 para condiciones iniciales y finales de reposo. Estas ecuaciones poseen la siguiente forma general:

$$y(n) = ay(n-1) + \sum_k b_k x(n-k) \tag{1}$$

Para nuestro análisis comenzaremos considerando la ecuación más simple

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \tag{2}$$

y luego la extenderemos al caso más general. Para resolver esta ecuación conviene comenzar a iterar. De la ecuación anterior, es fácil ver que:

$$y(n-l) = ay(n-l-1) + x(n-l) \qquad l \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

Comenzando la iteración, se va reemplazando $y(n-1)$, $y(n-2)$, $y(n-3)$, ... en la ecuación (2) sucesivamente:

$$\begin{aligned}
y(n) &= ay(n-1) + x(n) && (4)\\
&= a^2y(n-2) + ax(n-1) + x(n) && (5)\\
&= a^3y(n-3) + a^2x(n-2) + ax(n-1) + x(n) && (6)\\
&= a^4y(n-4) + a^3x(n-3) + a^2x(n-2) + ax(n-1) + x(n) && (7)\\
&\vdots \\
&= \lim_{k\to\infty} a^k y(n-k) + \sum_{m=o}^{k-1} a^m x(n-m) && (8)
\end{aligned}$$

Ahora es cuando entran en juego las condiciones iniciales. Decimos que un sistema posee *condiciones iniciales de reposo* cuando su respuesta es nula desde el "comienzo de los tiempos"[1]. En términos más matemáticos, esto implica:

$$\lim_{k \to \infty} y(n-k) = 0 \tag{9}$$

con lo cual la ecuación (8) termina siendo finalmente:

$$y(n) = \sum_{m=o}^{\infty} a^m x(n-m) = a^n u(n) \star x(n) \tag{10}$$

De esta ecuación se deduce naturalmente que la respuesta al impulso del sistema es

$$h(n) = a^n u(n) \tag{11}$$

Como la respuesta al impulso es de extensión infinita (es decir, de *soporte no acotado*) a estos sistemas se lo denominan IIR[2]. Un sistema es IIR siempre que sea *recursivo*, es decir, siempre que la salida $y(n)$ sea función de ella misma evaluada en instantes anteriores o posteriores. Si el sistema no es recursivo, es decir si $y(n)$ solo depende de $x(n)$, se los denomina FIR[3], debido a que la respuesta al impulso posee soporte acotado[4].

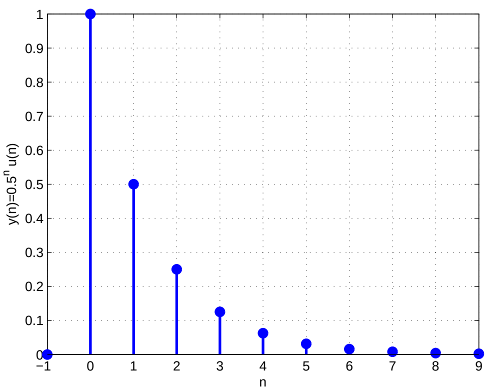

Figura 1: Respuesta al impulso $h(n)$ para $a = 0{,}5$. Es una función a derecha y se extiende hasta el infinito.

Como la salida está dada por una convolución, también se deduce automáticamente que el sistema es LTI. Además resulta causal, y su estabilidad depende del módulo de a (probarlo!).

[1]Otra forma de expresar la condición inicial de reposo: $y(n_0) = 0$ si $x(n) = 0$ para $n \leq n_0$. Notar que esta condición no es fija sino que *depende de la entrada* $x(n)$.

[2]IIR: Infinite Impulse Response.

[3]FIR: Finite Impulse Response.

[4]Ejemplo de sistema FIR, un diferenciador: $y(n) = x(n+1) - x(n)$ donde se deduce que $h(n) = \delta(n+1) - \delta(n)$ (soporte acotado, dura solo 2 muestras)

Generalización: el término $x(n)$ en la ecuación 2 es en su forma general $\sum_k b_k x(n-k)$[5]. No hay problema! Utilicemos el hecho de que el sistema es LTI y reemplacemos esto en la ecuación 10 para obtener:

$$y(n) = h(n) \star \sum_k b_k x(n-k)$$

Por propiedades de la convolución tenemos:

$$y(n) = \sum_k b_k h(n) \star x(n-k) = \sum_k b_k h(n-k) \star x(n)$$

con lo cual obtenemos que la respuesta al impulso general resulta ser

$$h_{general}(n) = \sum_k b_k h(n-k) \tag{12}$$

y se aplican las mismas conclusiones que para el caso menos general.

Qué sucede cuando el sistema posee condiciones finales de reposo? Decimos que un sistema posee *condiciones finales de reposo* cuando su respuesta es nula en el "final de los tiempos"[6]. Nuevamente, en términos más matemáticos, esto implica:

$$\lim_{k\to\infty} y(n+k) = 0 \tag{13}$$

Para poder aplicar esta condición, reescribimos la ecuación (2) poniendo a $y(n)$ en función de $y(n+1)$:

$$y(n) = \frac{1}{a} y(n+1) - \frac{1}{a} x(n+1) \tag{14}$$

y empezamos a iterar de manera similar al caso anterior, solo que ahora reeplazamos los términos $y(n+1)$, $y(n+2)$, $y(n+3)$, ... en la ecuación 14 sucesivamente:

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \frac{1}{a} y(n+1) - \frac{1}{a} x(n+1) && (15)\\
&= \frac{1}{a^2} y(n+2) - \frac{1}{a^2} x(n+2) - \frac{1}{a} x(n+1) && (16)\\
&= \frac{1}{a^3} y(n+3) - \frac{1}{a^3} x(n+3) - \frac{1}{a^2} x(n+2) - \frac{1}{a} x(n+1) && (17)\\
&= \frac{1}{a^4} y(n+1) - \frac{1}{a^4} x(n+4) - \frac{1}{a^3} x(n+3) - \frac{1}{a^2} x(n+2) - \frac{1}{a} x(n+1) && (18)\\
&\vdots\\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{a^k} y(n+k) - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{a^m} x(n+m) && (19)
\end{aligned}
$$

[5]En el caso general la condición inicial de reposo es: $y(n_0) = 0$ si $\sum_k b_k x(n-k) = 0$ para $n \leq n_0$.

[6]Otra forma de expresar la condición final de reposo: $y(n_0) = 0$ si $x(n) = 0$ para $n \geq n_0$.

Utilizando la ecuación (13) se obtiene finalmente:

$$y(n) = \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{1}{a^m} x(n+m) = -a^n u(-n-1) \star x(n) \tag{20}$$

De esta ecuación se deduce naturalmente que la respuesta al impulso del sistema es

$$h(n) = -a^n u(-n-1) \tag{21}$$

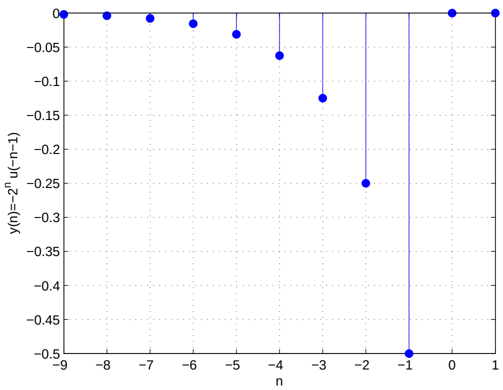

Figura 2: Respuesta al impulso $h(n)$ para $a = 2$. Es una función a izquierda.

Notamos que este *difiere* del caso con condiciones iniciales de reposo. Tenemos otra realización posible del mismo sistema, debido a que cambiaron las condiciones de contorno. Para una entrada $x(n)$ general se aplica el mismo razonamiento que antes y que conduce a la misma ecuación (12) obtenida anteriormente.

2. Conclusiones

1. Un sistema dado por una ecuación en diferencias de primer orden necesita de condiciones de borde para definir su comportamiento, y posee 2 realizaciones diferentes posibles si es LTI.

2. Si el sistema posee condiciones iniciales de reposo, la respuesta al impulso es una función a derecha de tipo exponencial.

3. Si el sistema posee condiciones finales de reposo, la respuesta al impulso resultante es una función a izquierda de tipo exponencial.

4. En ambos casos, el sistema es IIR y es LTI.

5. El sistema *no resulta* TI si en lugar de condiciones iniciales o finales de reposo posee una condición *fija* para un tiempo dado[7], es decir $y(n_0) = K$ (por ejemplo $y(-1) = 0$). Si $K = 0$ el sistema es lineal, y si $K \neq 0$ no (probarlo!).

6. Para sistemas de orden 2 o mayor, se utilizará transformada Z para su análisis. En general, un sistema de orden N posee N+1 realizaciones diferentes posibles.

3. Ejercicios

1. Demostrar que el sistema de la ecuación (2) con condición $y(-1) = 0$ es lineal pero no TI, y con la condición $y(-1) = 1$ no es lineal ni TI.

2. Establecer las condiciones sobre a para que el sistema resulte estable con condiciones iniciales o finales de reposo (ambos casos).

3. Obtener la respuesta al impulso del sistema dado por la ecuación (2) con condiciones iniciales nulas y siendo $x(n) \triangleq 0{,}5x(n+1) - x(n) + 0{,}5x(n-1)$.

[7]Si bien la condición inicial o final de reposo puede expresarse como una condición del tipo $y(n_0) = 0$, recordar que n_0 *no está fijo* sino que depende de la entrada $x(n)$.