ESTABILIDAD I

Sistemas de Fuerzas Distribuidas.

Cálculo del baricentro de una superficie o volumen

Baricentro de Áreas

*Momento de primer orden, o momento estático respecto de los ejes coordenados x e y:

$$Sx = \int y dA \qquad Sy = \int x dA$$

*Coordenadas del baricentro del Área:

$$Xg = \frac{Sy}{A} \qquad Yg = \frac{Sx}{A}$$

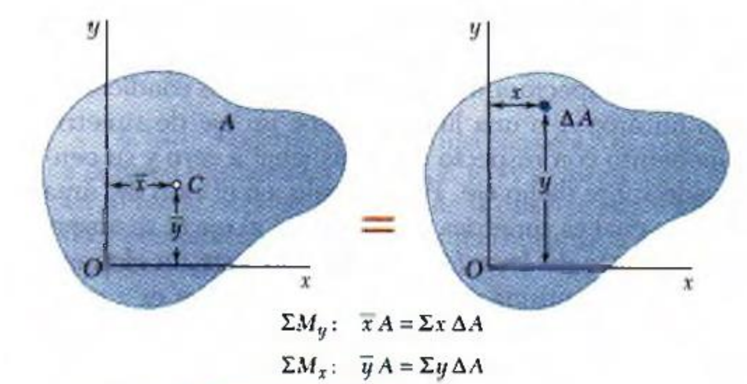
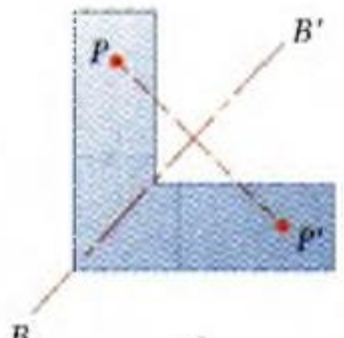


Figura 5.3 Centroide de un área.

Nota: en este apunte baricentro y centroide corresponden al mismo concepto.

Ref: Beer, Johnston, Eisenberg, "Mecánica Vectorial para Ingenieros"

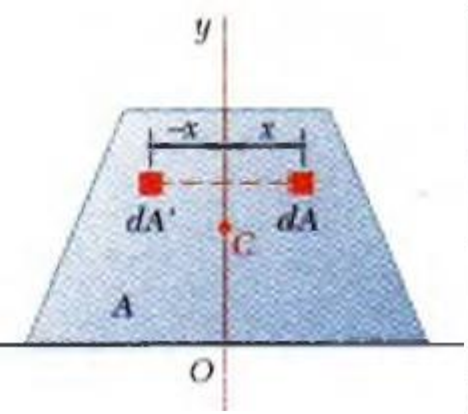
Centroides de Áreas

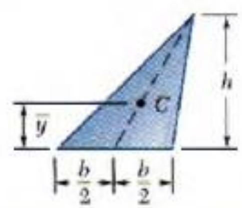
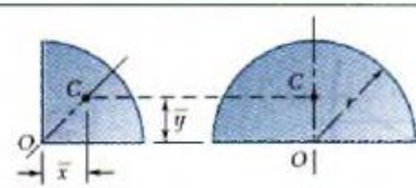


a)

Si el área posee un eje de simetría, el momento estático (o primer momento) respecto de ese eje es nulo => el centroide estará ubicado sobre dicho eje.

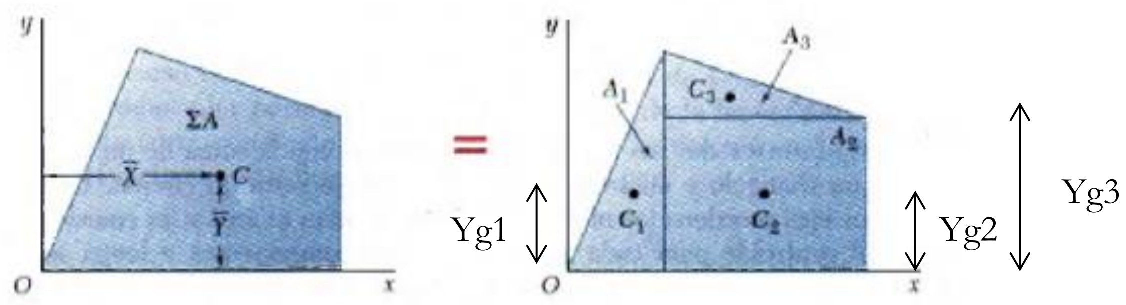
Si el área tiene 2 ejes de simetría, el centroide estará ubicado en la intersección de los mismos.



Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$

Ref: Beer, Johnston, Eisenberg, “Mecánica Vectorial para Ingenieros”

Centroides de Áreas Compuestas

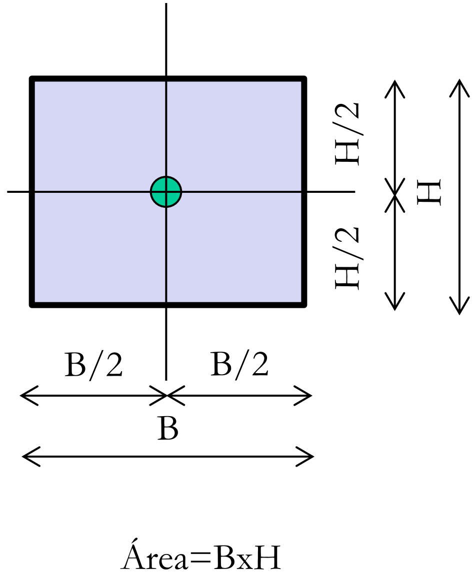


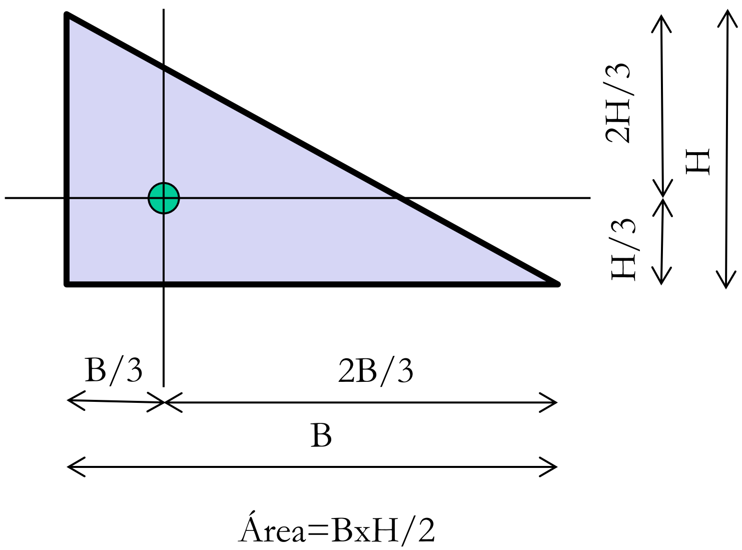
$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$y_G \cdot A = s_{x1} + s_{x2} + s_{x3}$$

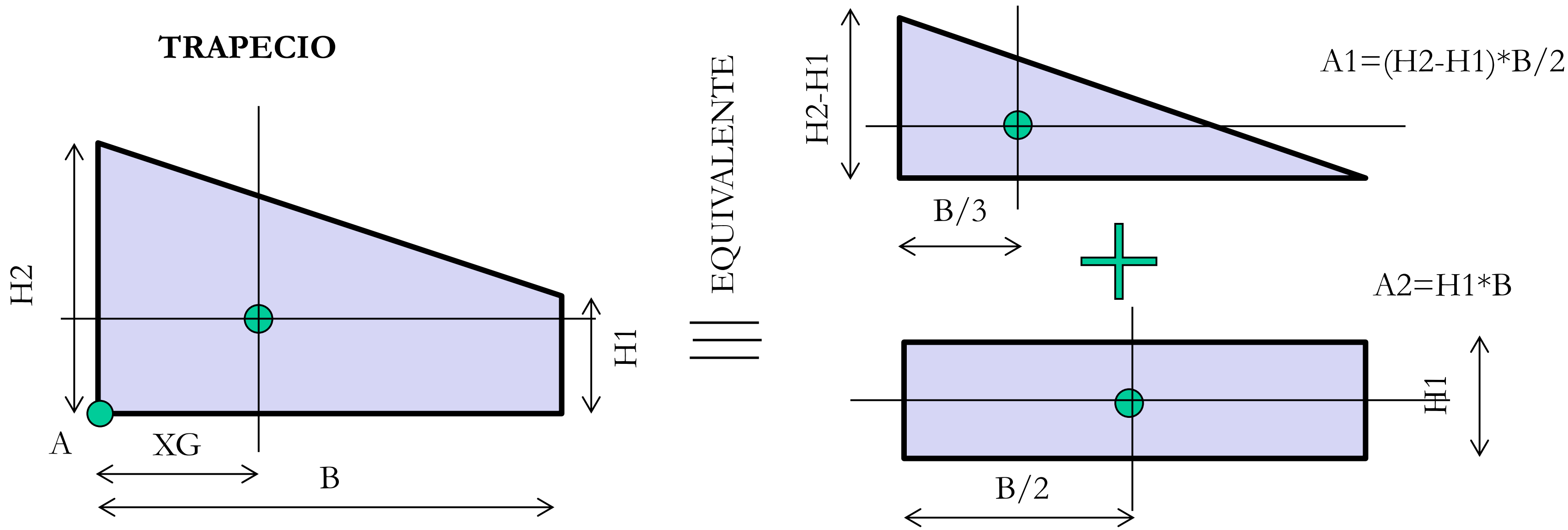
Áreas simples y compuestas

Utilizadas frecuentemente para Fuerzas Distribuidas





Áreas simples y compuestas



Área=Bx(H1+H2)/2

Área=A1+A2=(H2-H1)*B/2+H1*B

(MOMENTO ESTATICO PARA UN EJE VERTICAL PASANTE POR A)

XG*(A1+A2)=A1*B/3+A2*B/2

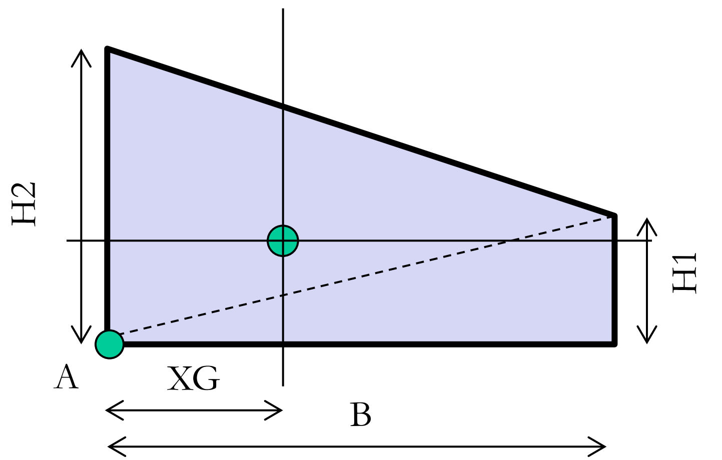
$$XG=\frac{A1*B/3+A2*B/2}{(A1+A2)}$$

! UBICAR EL CENTROIDE DE UN TRAPECIO MEDIANTE LA DESCOMPOSIÓN DEL AREA ES MÁS SENCILLO Y PRACTICO QUE POR FORMULAS !

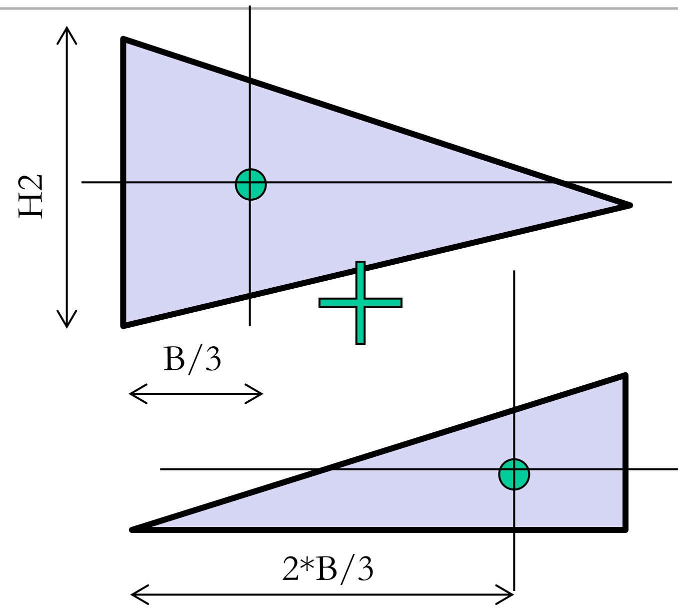
! EN FUERZAS DISTRIBUIDAS NOS INTERESA SOLAMENTE UBICARLO EN EL SENTIDO HORIZONTAL !

Áreas simples y compuestas

TRAPECIO (OTRO RAZONAMIENTO)



≡ EQUIVALENTE



A1=H2*B/2

A2=H1*B/2

Área=Bx(H1+H2)/2

Área=A1+A2=H2*B/2+H1*B/2

(MOMENTO ESTATICO PARA UN EJE VERTICAL PASANTE POR A)

$$XG^*(A1+A2)=A1^*B/3+A2^*2^*B/3$$

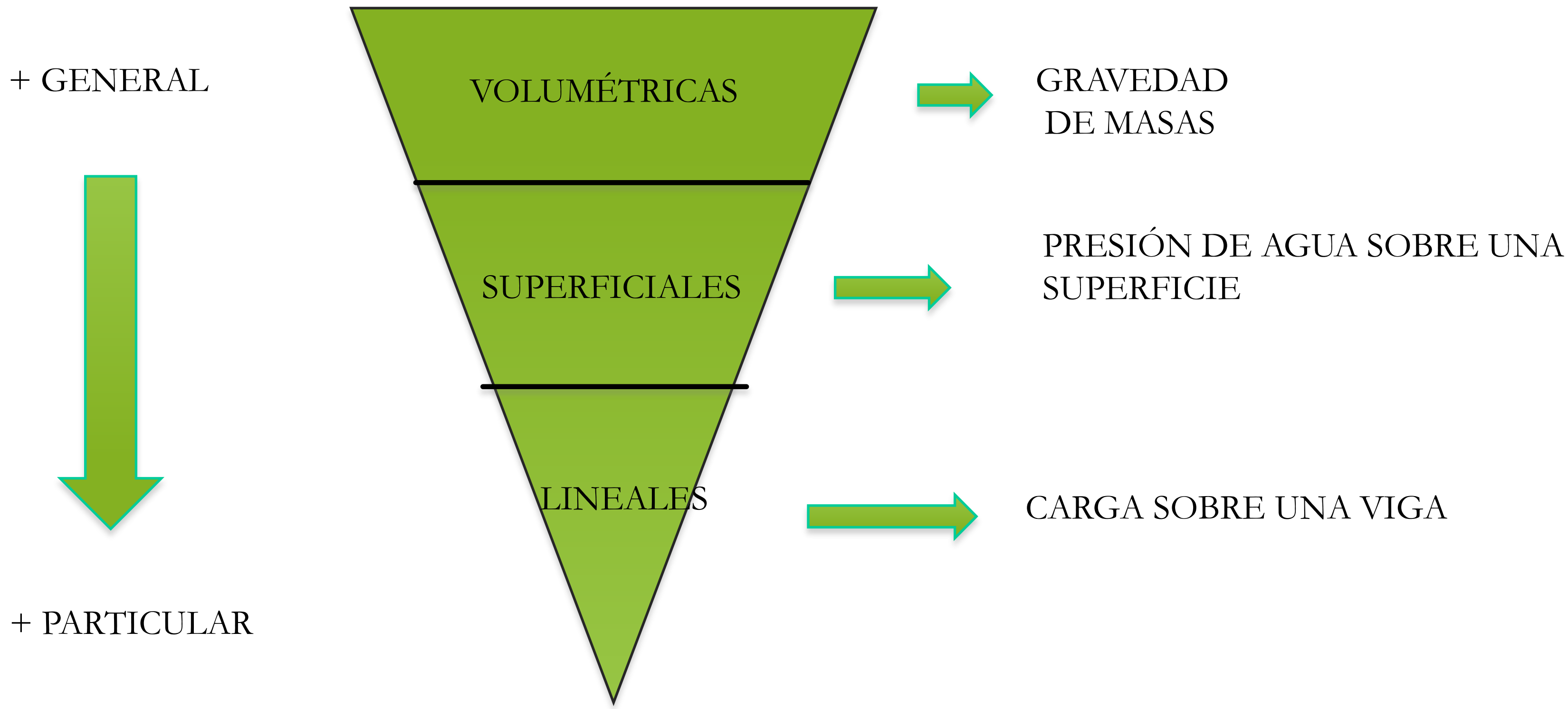
$$XG=\frac{A1^*B/3+A2^*2^*B/3}{(A1+A2)}$$

! UBICAR EL CENTROIDE DE UN TRAPECIO MEDIANTE LA DESCOMPOSIÓN DEL AREA ES MÁS SENCILLO Y PRACTICO QUE POR FORMULAS !

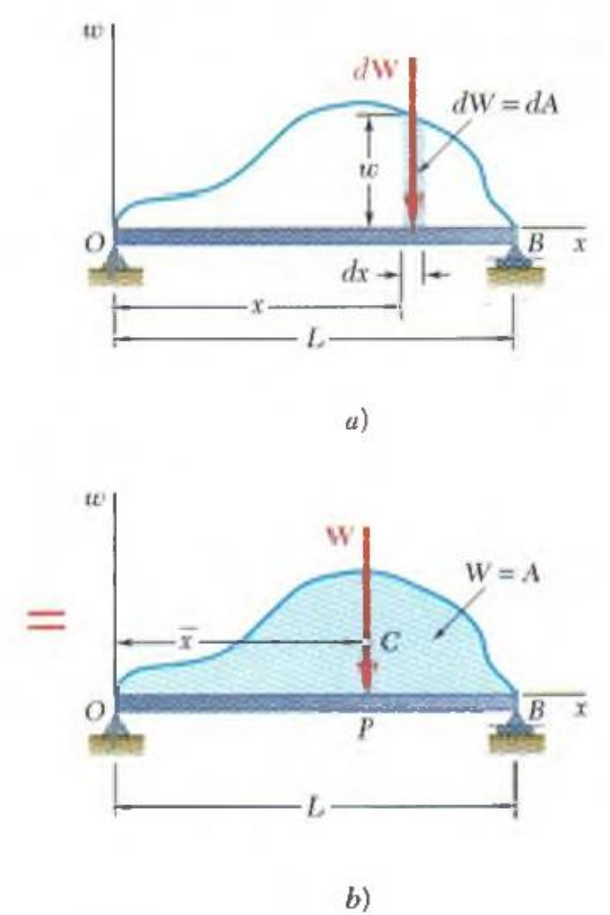
! EN FUERZAS DISTRIBUIDAS NOS INTERESA SOLAMENTE UBICARLO EN EL SENTIDO HORIZONTAL !

Sistemas de Fuerzas Distribuidas

Sistemas de Fuerzas Distribuidas



Sistemas de Fuerzas Distribuidas en Vigas



1.Resultante W de la carga distribuida w

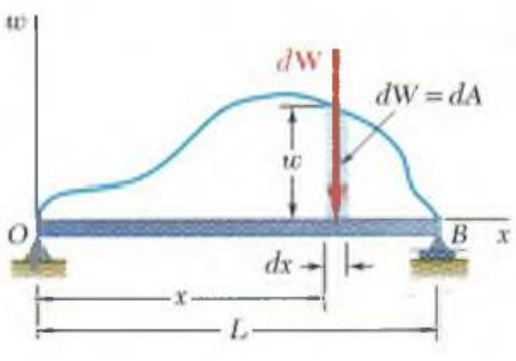
Carga distribuida w=w(x)

Magnitud de la fuerza resultante:

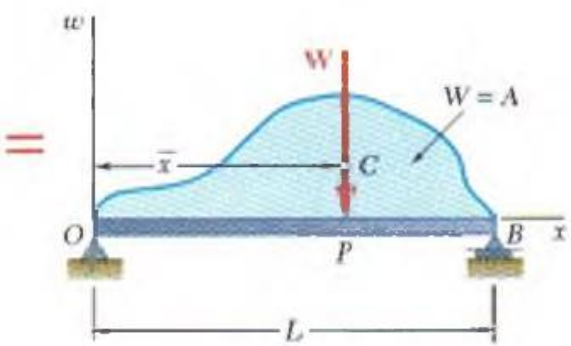
$$\boldsymbol{W = \int w(x)dx}$$

= Superficie bajo la curva

Sistemas de Fuerzas Distribuidas en Vigas



a)



b)

2.Ubicación de la resultante W

La ubicación de la resultante de las fuerzas distribuidas es el baricentro del área de la carga.

En este sentido, una carga distribuida que actúa sobre una viga puede reemplazarse por una carga concentrada, la magnitud de dicha carga es igual al área bajo la curva de carga y su línea de acción pasa a través del centroide de dicha área. Sin embargo, se debe señalar que la carga concentrada es equivalente a la carga distribuida dada sólo en lo que respecta a las fuerzas externas. Esta carga concentrada puede utilizarse para determinar reacciones pero no debe ser empleada para calcular fuerzas internas y deflexiones.

Sistemas de Fuerzas Distribuidas Superficiales

Fuerzas distribuidas superficiales, se deben a la acción que ejercen sobre un cuerpo, por contacto directo, otros cuerpos sólidos o fluidos.

Se define **presión** a la intensidad de la carga perpendicular a una superficie y **fricción** a la paralela a la tangente de la superficie.

La acción superficial por contacto con otros cuerpos sólidos o de un fluido en reposo (hidrostática) es en general una presión.

Cuando la superficie de contacto entre los cuerpos es muy reducida frente a la superficie del cuerpo, puede reemplazarse la fuerza superficial por su resultante aplicada en un punto.

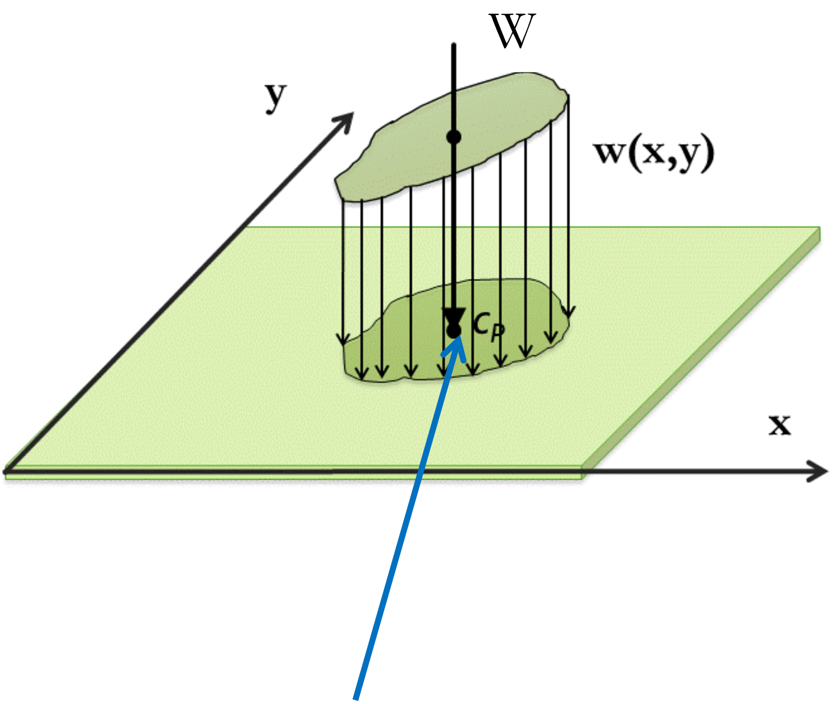
Se trata el caso más común de carga de presión distribuida actuando sobre una placa (superficie plana).

Se busca reemplazar la carga distribuida con una carga puntual equivalente llamada resultante R.

La magnitud de la fuerza resultante es equivalente a la suma de todas las fuerzas del sistema.

Sistemas de Fuerzas Distribuidas Superficiales

Resultante: W es la fuerza concentrada equivalente



Magnitud de la fuerza resultante:

$$W = \int w(x, y)\,dA = V$$

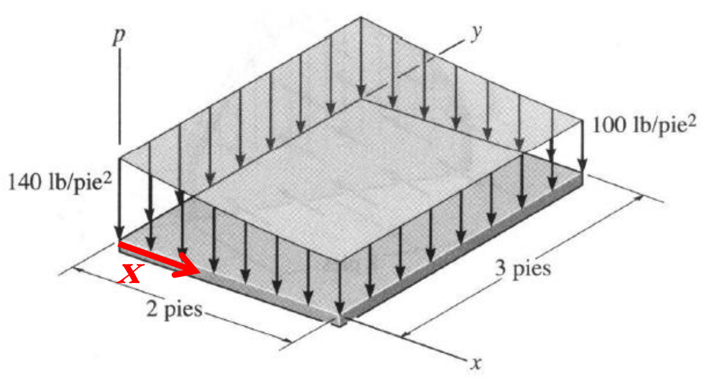
= Volumen bajo la superficie

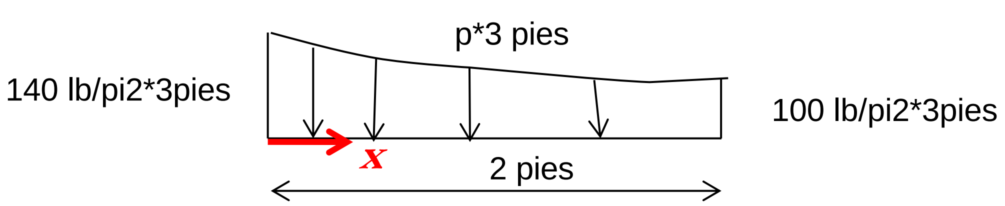
Cp (centro de presiones): punto de ubicación de la resultante sobre la superficie

Sistemas de Fuerzas Distribuidas Superficiales: Carga simétrica sobre placa de ancho constante

Resultante: W es la fuerza concentrada equivalente

9-119. La carga de presión sobre la placa está descrita por la función $p = 10[6/(x + 1) + 8]$ lb/pie^2. Determine la magnitud de la fuerza resultante y las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del punto donde la línea de acción de la fuerza interseca la placa.





Sistemas de Fuerzas Distribuidas sobre Superficies sumergidas

1. Superficie rectangular => b (ancho de la compuerta) constante

El procediamiento usado en la sección anterior puede emplearse para determinar la resultante de las fuerzas de presión hidrostática ejercidas sobre una *superficie rectangular* sumergida en un líquido. Considérese la placa rectangular mostrada en la figura 5.18, la cual tiene una longitud L y un ancho b, donde b se mide perpendicular al plano de la figura. Como se señaló en la sección 5.8, la carga ejercida sobre un elemento de la placa de longitud dx es $w\,dx$, donde w es la carga por unidad de longitud. Sin embargo, esta carga también puede expresarse como $p\,dA = pb\,dx$, donde p es la presión manométrica en el líquido[1] y b es el ancho de la placa; por tanto, $w = bp$. Como la presión manométrica en un líquido es $p = \gamma h$, donde γ es el peso específico del líquido y h es la distancia vertical a partir de la superficie libre, se concluye que

$$\boxed{w = bp = b\gamma h} \qquad (5.13)$$

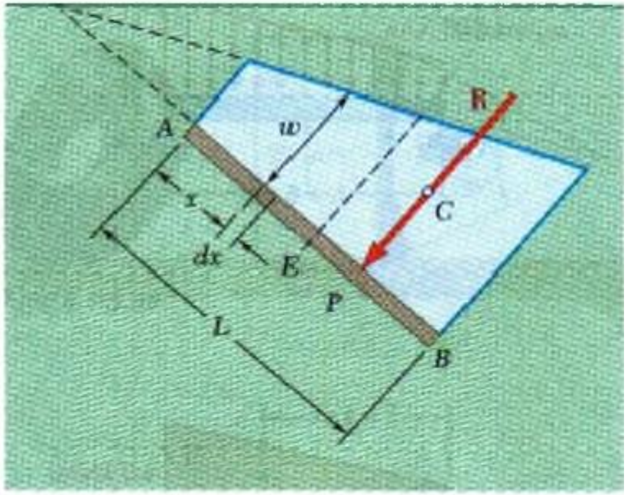


Figura 5.18

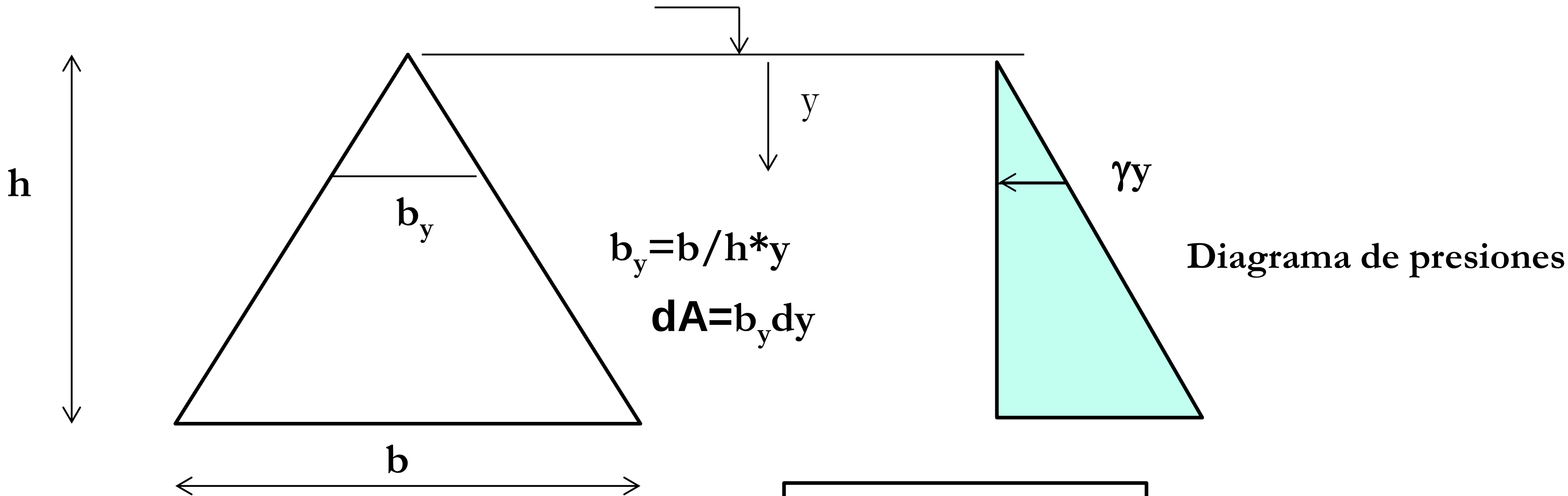
Resultante W=área del trapecio

Ubicación de W (centro de presión cp): centroide del trapecio de carga

Nota: la presión actúa SIEMPRE perpendicular a la superficie

Sistemas de Fuerzas Distribuidas sobre Superficies sumergidas

1. Superficie rectangular => by (ancho de la compuerta)variable



$$\boxed{q(y)=\gamma\ y\ d_A}$$

Resultante=Volumen de carga

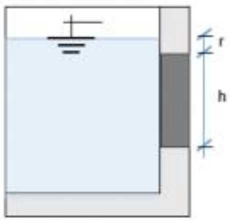
Cp (centro de presiones): punto de ubicación de la resultante sobre la superficie

Nota: la presión actúa SIEMPRE perpendicular a la superficie

Sistemas de Fuerzas Distribuidas sobre Superficies sumergidas

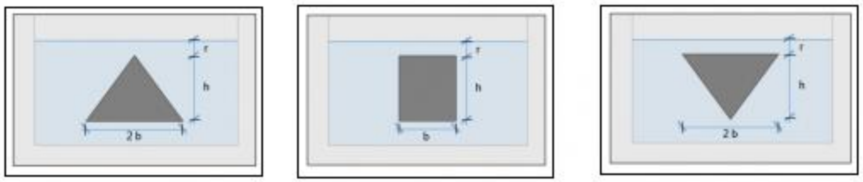
1. Superficie rectangular => by (ancho de la compuerta) variable

Dado el siguiente perfil de compuerta sometido al empuje hidroestático de un líquido. Asumiendo que la superficie expuesta al empuje en las 3 compuertas es la misma, ordenarlas de acuerdo al valor del empuje horizontal R.



mayor R

menor R

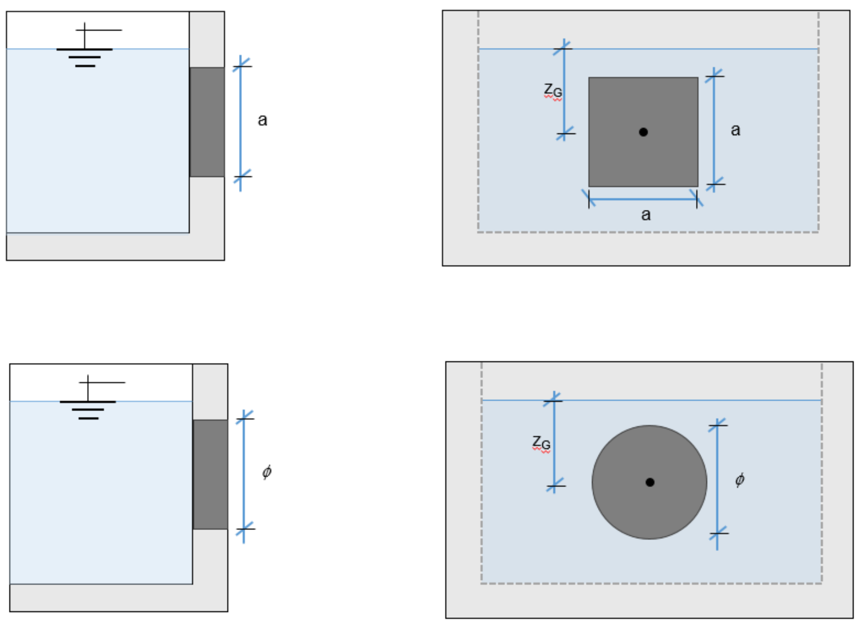


Sistemas de Fuerzas Distribuidas sobre Superficies sumergidas

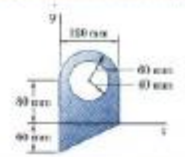
1. Superficie rectangular => by (ancho de la compuerta) variable

Para las compuertas cuadrada y circular de igual superficie, con el baricentro a la misma profundidad, según se muestra en la figura.

Cuál de las dos compuertas tiene un empuje más profundo?



Centroides de Áreas Compuestas

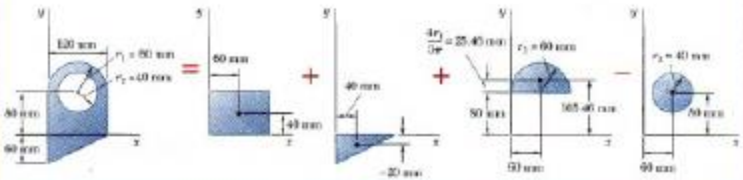


PROBLEMA RESUELTO 5.1

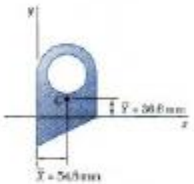
Para el área plana mostrada en la figura, determine: *a*) los primeros momentos con respecto a los ejes *x* y *y*, y *b*) la ubicación de su centroide.

SOLUCIÓN

Componentes del área. El área se obtiene con la suma de un rectángulo, un triángulo y un semicírculo y después se resta un círculo. Utilizando los ejes coordenados mostrados, se determinan el área y las coordenadas del centroide para cada una de las áreas componentes y luego se introducen en la tabla que aparece en la parte inferior. El área del círculo se indica como negativa puesto que debe restarse de las demás áreas. Nótese que la coordenada $\bar{y}$ del centroide del triángulo es negativa para los ejes mostrados. Los primeros momentos de las áreas componentes con respecto a los ejes coordenados se calculan y se introducen en la tabla.



Componente	A, mm²	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm³	$\bar{y}A$, mm³
Rectángulo	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triángulo	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicírculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$



a) ***Primeros momentos del área.*** Con las ecuaciones (5.8), se escribe

$$Q_x = \Sigma\bar{y}A = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_x = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$Q_y = \Sigma\bar{x}A = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_y = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

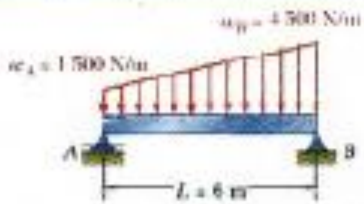
b) ***Ubicación del centroide.*** Si se sustituyen los valores dados en la tabla, dentro de las ecuaciones que definen el centroide de un área compuesta se obtiene

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A: \qquad \bar{X}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm}$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A: \qquad \bar{Y}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm}$$

228

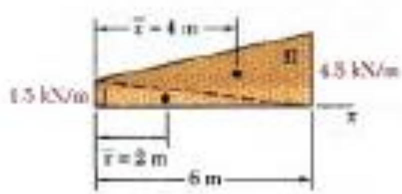
Sistemas de Fuerzas Distribuidas en Vigas



PROBLEMA RESUELTO 5.9

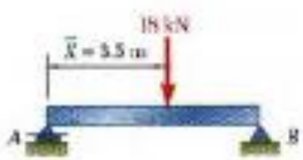
Una viga soporta una carga distribuida como lo muestra la figura; *a*) determine la carga concentrada equivalente y *b*) determine las reacciones en los apoyos.

SOLUCIÓN



a) **Carga concentrada equivalente.** La magnitud de la resultante de la carga es igual al área bajo la curva de carga y la línea de acción de la resultante pasa a través del centroide de dicha área. Se divide el área bajo la curva de carga en dos triángulos y se construye la tabla que se presenta a continuación. Para simplificar los cálculos y la tabulación, las cargas por unidad de longitud dadas se han convertido a kN/m.

Componente	A, kN	$\bar{x}$, m	$\bar{x}A$, kN · m
Triángulo I	4.5	2	9
Triángulo II	13.5	4	54
	$\Sigma A = 18.0$		$\Sigma \bar{x}A = 63$



Por tanto, $\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A$: $\quad \bar{X}(18\ \text{kN}) = 63\ \text{kN} \cdot \text{m} \quad \bar{X} = 3.5\ \text{m}$

La carga concentrada equivalente es

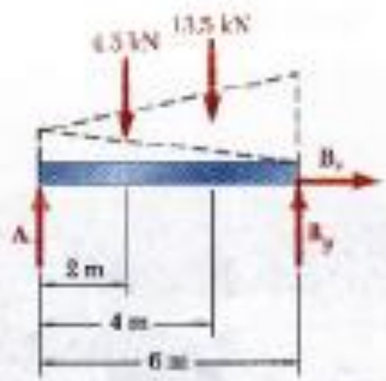
$$\mathbf{W} = 18\ \text{kN} \downarrow$$

y su línea de acción está localizada a una distancia

$$\bar{X} = 3.5\ \text{m a la derecha de } A$$

Sistemas de Fuerzas Distribuidas en Vigas

Equilibrio



b) **Reacciones.** La reacción en *A* es vertical y se representa con **A**; la reacción en *B* está representada por sus componentes $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$. Como se muestra en la figura, la carga dada se puede considerar como la suma de dos cargas triangulares. La resultante de cada carga triangular es igual al área del triángulo y actúa en su centroide. Se escriben las siguientes ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre mostrado:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$: $\qquad \mathbf{B}_x = 0$ ◀

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$: $\qquad -(4.5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (13.5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + B_y(6 \text{ m}) = 0$

$\mathbf{B}_y = 10.5 \text{ kN} \uparrow$ ◀

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$: $\qquad +(4.5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + (13.5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - A(6 \text{ m}) = 0$

$\mathbf{A} = 7.5 \text{ kN} \uparrow$ ◀

Solución alternativa. La carga distribuida dada se puede reemplazar por su resultante, la cual se determinó en la parte *a*. Las reacciones pueden determinarse con las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$. De nuevo se obtiene

$\mathbf{B}_x = 0 \qquad \mathbf{B}_y = 10.5 \text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{A} = 7.5 \text{ kN} \uparrow$ ◀

PREGUNTAS

- ¿Existen en la naturaleza acciones sobre un cuerpo concentradas en un punto? ¿Cómo actúan realmente?
-
- Dar ejemplos de cargas distribuidas superficiales que actúan sobre una estructura.
- ¿Cómo calcula la resultante de una carga distribuida?
- ¿Por dónde pasa la línea de acción de la resultante de un sistema de fuerzas distribuidas?
-
- De acuerdo a la ley de Pascal, dar la expresión de la presión que ejerce un fluido incompresible, de densidad γ a una profundidad z. Unidades.