



Universidad de Buenos Aires

FACULTAD DE INGENIERIA



ESTABILIDAD I

Tema 3

Equilibrio-Cuerpos Vinculados



Algunas definiciones

Estructura: Conjunto de cuerpos unidos entre sí de forma tal de poder soportar las cargas actuantes sobre ellos.

Clasificación de elementos estructurales:

1. Lineales o unidimensionales (barras o piezas prismáticas): una dimensión predominante frente a las otras 2.
2. Superficiales o bidimensionales (placas, chapas o membranas): 2 dimensiones predominantes frente a la tercera
3. Volumétricos o tridimensionales (cuerpos): 3 dimensiones predominantes



Algunas definiciones

Pórtico (planos ó espaciales): estructura construida por una sucesión de barras, de eje rectilíneo o curvo.

Elementos inclinados o verticales: se denominan pilares

Elementos verticales: columnas

Elementos horizontales: vigas o dinteles

Pórtico plano: los ejes baricéntricos de las barras, vínculos y las cargas se encuentran todos en el mismo plano



Pórtico plano ó espacial???????





➤ Equilibrio de cuerpos vinculados

- Equilibrio de una partícula

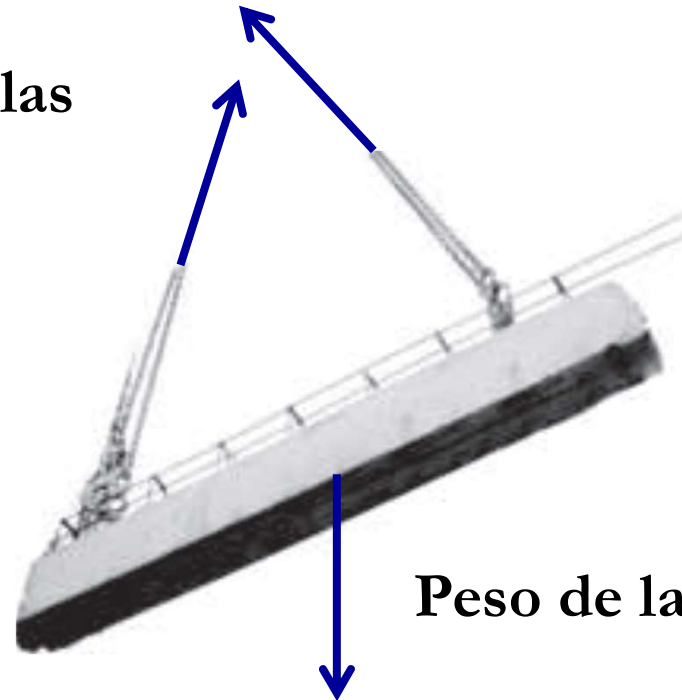
➔ Ecuaciones de equilibrio de fuerzas concentradas concurrentes

- Equilibrio de un cuerpo rígido

➔ Ecuaciones de equilibrio de sistemas de fuerzas generalizados



Fuerzas equilibrantes en las cadenas : Incógnitas



Peso de la viga: Dato

La viga está en equilibrio bajo las acciones de su peso y las fuerzas ejercidas por las cadenas.

En este capítulo se aplican ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas y pares desconocidos que actúan sobre los objetos.

Ref: Cap 5 Bedford Fowler



Grados de libertad de una partícula (o coordenadas libres)

- Partícula en el plano: 2 GL

Se necesitan 2 coordenadas independientes para indicar su posición

- Partícula en el espacio: 3 GL

Se necesitan 3 coordenadas independientes para indicar su posición

Nota: una traslación es una rotación en torno de un punto (polo) impropio



Grados de libertad (o coordenadas libres) de un cuerpo rígido

En el plano: 3 GL

Se necesitan 3 coordenadas independientes para indicar su posición

En el espacio: 6 GL

Se necesitan 6 coordenadas independientes para indicar su posición



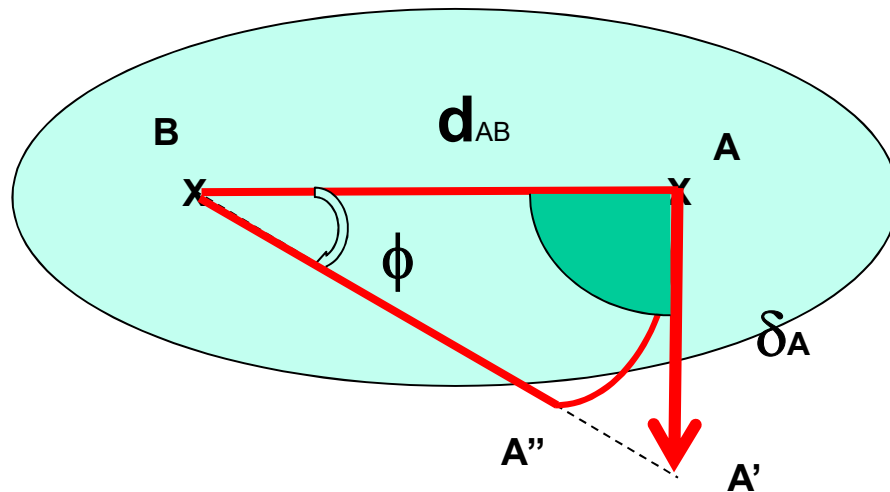
4º Principio de la Estática, acción y reacción.

Toda acción implica la existencia de una reacción,
de igual intensidad y sentido contrario.

Cuerpo rígido + pequeños desplazamientos



Repasemos: movimiento de un punto A de un cuerpo rígido en torno a un punto fijo B



Si se da un desplazamiento al punto A, se moverá en un arco de circunferencia de centro en B y radio d_{AB} .
Por hipótesis de pequeños desplazamientos, el arco AA'' y la tangente AA' se confunden, y siendo la tangente normal al radio d_{AB} , resulta que para desplazamientos pequeños, el corrimiento que experimenta el punto A resulta normal a la recta determinada por A y el centro de rotación (punto fijo o polo).

Pequeños desplazamientos



$$\text{tang } \phi = \phi$$



$$\delta_A = \phi \cdot d_{AB}$$

Distancia entre 2 puntos del cuerpo se mantiene invariable ante la acción de fuerzas exteriores



Equilibrio de un cuerpo rígido

- Reacciones en los soportes

Vínculo (ó soporte): toda condición geométrica que limite la posibilidad de movimiento de un cuerpo.

Si un vínculo previene la traslación de un cuerpo en una dirección dada, entonces una fuerza es desarrollada sobre el cuerpo en esa dirección. Igualmente, si el vínculo impide una rotación, sobre el cuerpo se ejerce un momento.

Por cada movimiento limitado, se dirá que se ha impuesto 1 condición de vínculo (CV)

Equilibrio de una partícula



- **Diagrama de cuerpo libre**

Poner en evidencia todas las fuerzas actuantes, activas y reactivas.

- fuerzas activas : tienden a poner la partícula en movimiento
- fuerzas reactivas: son el resultado de restricciones o soportes que tienden a impedir el movimiento.

- **Condiciones de equilibrio de una partícula**
(equilibrio de fuerzas concentradas concurrentes)

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{0}$$

(1° Ley de Newton)



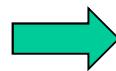
Cálculo de las reacciones en los soportes

Equilibrio de un cuerpo rígido



- Diagrama de cuerpo libre
- Condiciones de equilibrio del cuerpo rígido
(equilibrio de fuerzas concentradas no concurrentes
=> sistema de fuerzas generalizado)

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{0}$$

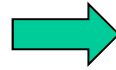


$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

$$\sum_i F_{z,i} = 0$$

$$\bar{M}_R^O = \sum_i \bar{M}_{F_i}^O = \bar{0}$$



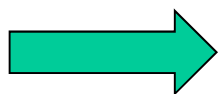
$$\sum_i M_{x,i}^O = 0$$

$$\sum_i M_{y,i}^O = 0$$

$$\sum_i M_{z,i}^O = 0$$

(2 ecuaciones vectoriales)

(6 ecuaciones escalares)



Cálculo de las reacciones en los soportes



Cuerpos Rígidos Vinculados.

Clasificación de los vínculos:

- **Externos o absolutos:** imponen condiciones geométricas que limitan la posición del cuerpo respecto de la tierra, supuesta fija (conectan la estructura a la tierra).
- **Internos o relativos:** limitan la movilidad entre los cuerpos (conectan partes de la estructura entre sí).
- **Bilaterales ó reversibles:** limitan el movimiento en ambos sentidos
- **Unilaterales** (ej: contacto): limitan el movimiento en un único sentido.



Cuerpos Rígidos Vinculados.

Clasificación de los vínculos según los GL - sistemas planos:

- Móvil (1 GL : 1° especie); CV=1
- Fijo (2 GL : 2° especie); CV=2
- Empotramiento (3 GL : 3° especie); CV=3
- Biela (1 GL : 1° especie); CV=1

Clasificación de los vínculos según los GL - sistemas espaciales:

- Móvil (1 ó 2 GL); CV=1
- Fijo (3 GL); CV=3
- Empotramiento (6 GL); CV=6
- Biela (1 GL : 1° especie); CV=1

2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas



5.1 Aplicaciones bidimensionales 197

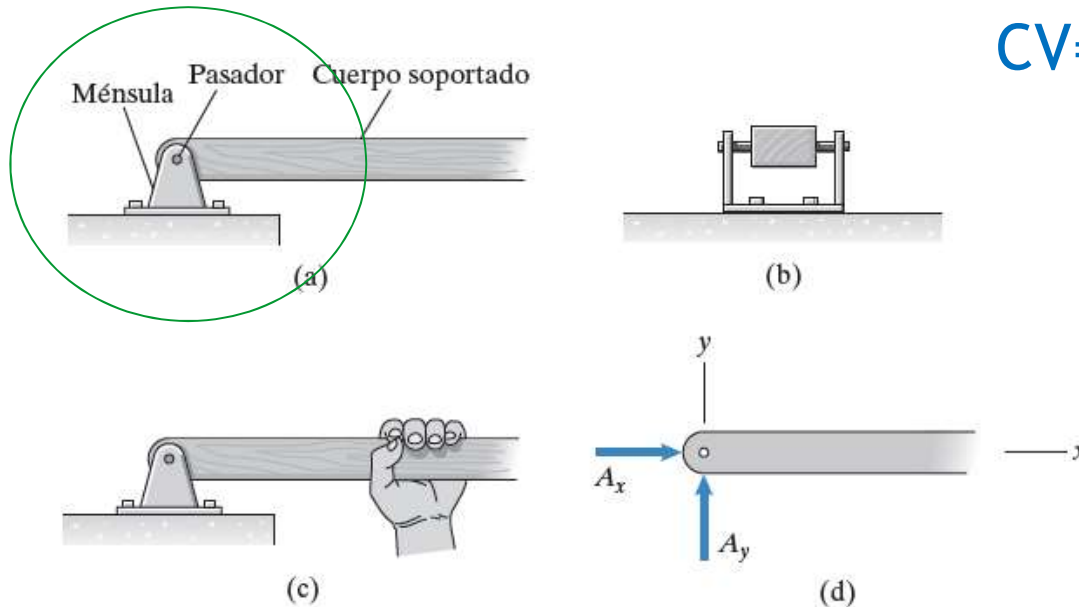
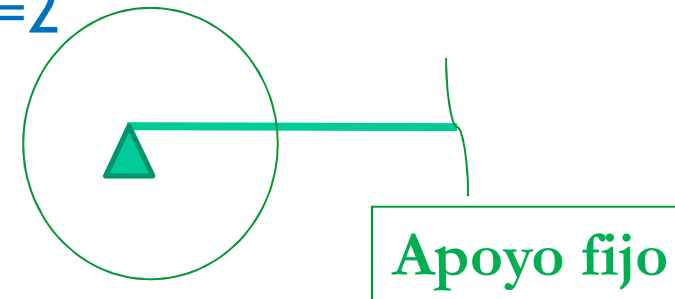


Figura 5.1

- (a) Soporte de pasador.
- (b) Vista lateral que muestra el pasador que atraviesa la viga.
- (c) Sujeción de una barra soportada.
- (d) El soporte de pasador es capaz de ejercer dos componentes de fuerza.

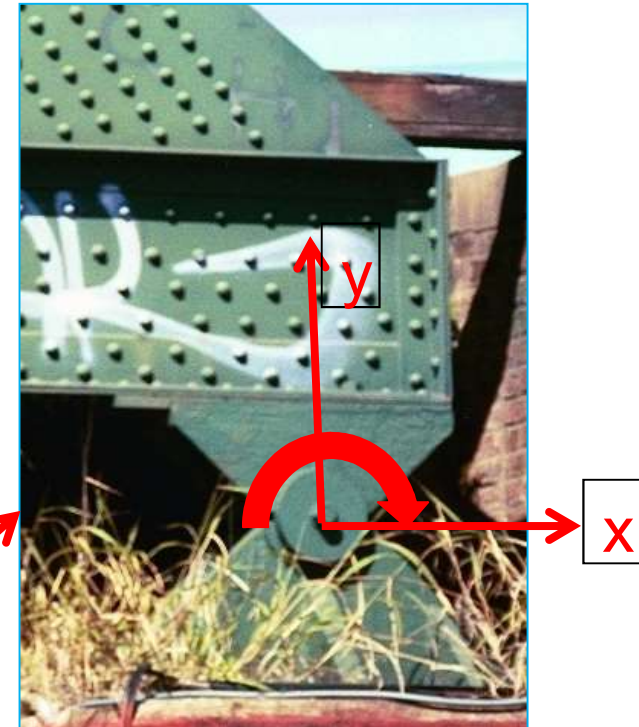
CV=2



Si se trata de mover la barra sin hacerla girar (es decir, trasladar la barra), el soporte ejerce una fuerza reactiva que lo impide. Sin embargo, se puede hacer girar la barra alrededor del eje del pasador. El soporte no puede generar un par respecto al eje del pasador para impedir el giro. Así, un soporte de pasador no puede generar un par respecto al eje del pasador, pero sí puede ejercer una fuerza sobre un cuerpo en cualquier dirección, lo que comúnmente se expresa representando la fuerza en términos de sus componentes (figura 5.1d).

Ref: Cap 5 Bedford Fowler

2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas



MODELO:

- Desplazamientos x, y : impedidos
- Giro según eje z : LIBRE



2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas



198 Capítulo 5 Objetos en equilibrio

CV=1

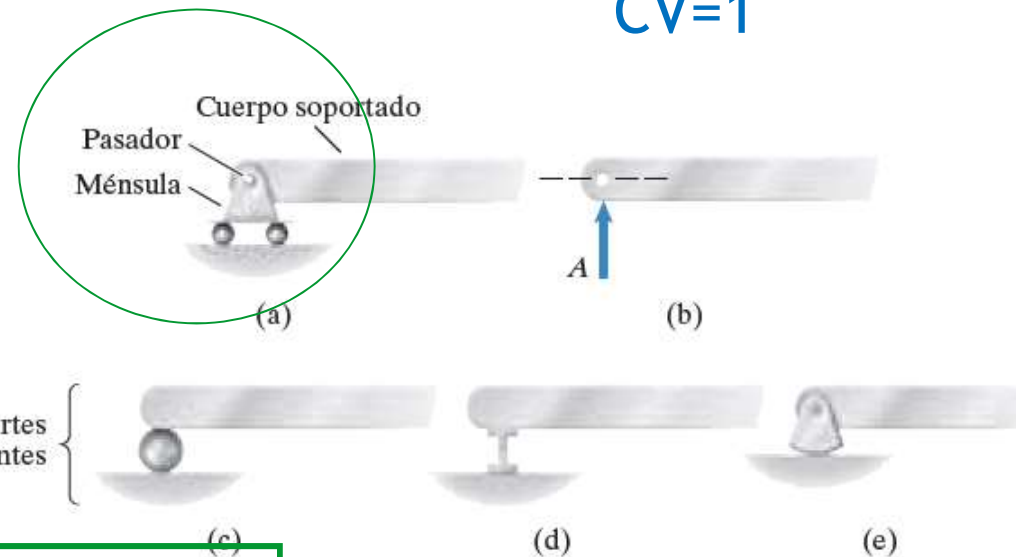
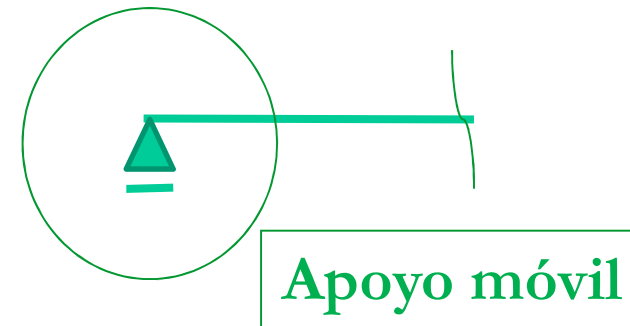


Figura 5.3

- (a) Soporte de rodillos.
- (b) La reacción consiste en una fuerza normal a la superficie.
- (c)–(e) Soportes equivalentes al soporte de rodillos.

Como el soporte de pasador, éste no puede generar un par respecto al eje del pasador. Dado que puede moverse libremente en la dirección paralela a la superficie sobre la que rueda, no puede generar una fuerza paralela a la superficie, sino sólo una fuerza normal (perpendicular) a ella (figura 5.3b). En las figuras 5.3c-e se muestran otras convenciones usadas comúnmente como equivalentes al soporte de rodillo.

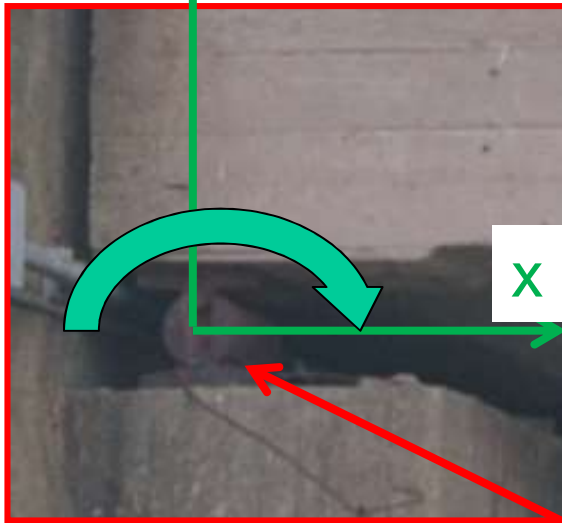
Las ruedas de vehículos y que soportan partes de máquinas son soportes de rodillo si las fuerzas de fricción ejercidas sobre ellas son insignificantes en comparación con las fuerzas normales.



Apoyo móvil

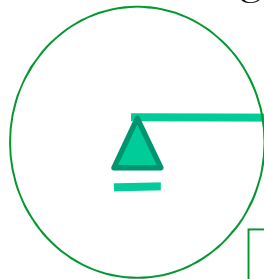
Ref: Cap 5 Bedford Fowler

2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanarios de fuerzas



MODELO:

- Desplazamiento: x LIBRE
- Giro según eje z: LIBRE



Apoyo móvil

2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas



Empotramiento

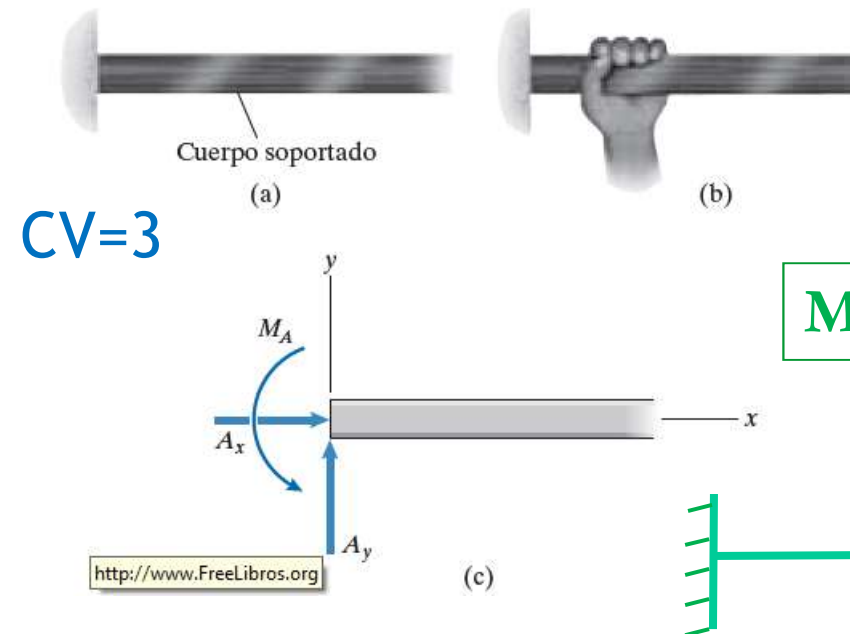


Figura 5.6

- (a) Soporte fijo.
- (b) Sujeción de una barra empotrada.
- (c) Reacciones que es capaz de ejercer un soporte fijo.

Soporte fijo El *soporte fijo* presenta el objeto soportado literalmente empotrado en la pared (figura 5.6a). Esta convención también se denomina soporte empotrado. Para entender sus reacciones, imagínese sujetando una barra unida a un soporte fijo (figura 5.6b). Si intenta trasladar la barra, el soporte genera una fuerza reactiva que lo impide; si trata de hacerla girar, el soporte genera un par reactivo que lo impide. Un soporte fijo puede generar dos componentes de fuerza y un par (figura 5.6c). El término M_A es el par generado por el soporte y la flecha curva indica su dirección.

Ref: Cap 5 Bedford Fowler

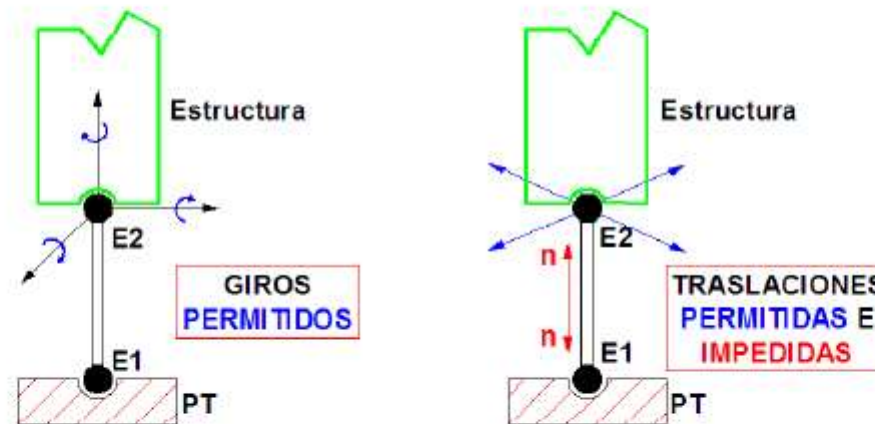
2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas



Bielas

Concepto de biela.

Es el dispositivo de vínculo más elemental y se trata de una barra rígida con dos esferas en sus extremos, una de ellas conectada al planeta (PT) y la otra a la estructura. Permite a la misma rotar según tres ejes independientes pasantes por el centro de la Esfera 2 a la vez que trasladarse en dos direcciones independientes. El movimiento impedido será en la dirección de la barra rígida (n-n). Gráficamente:



EL ANÁLISIS EFECTUADO RESPETA LA TEORÍA DE PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS.

Las esferas **E1** y **E2** reciben el nombre de rótulas. Por otra parte el dispositivo de vínculo se denomina de primera especie por aplicar al cuerpo una condición de vínculo.

2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas



Bielas

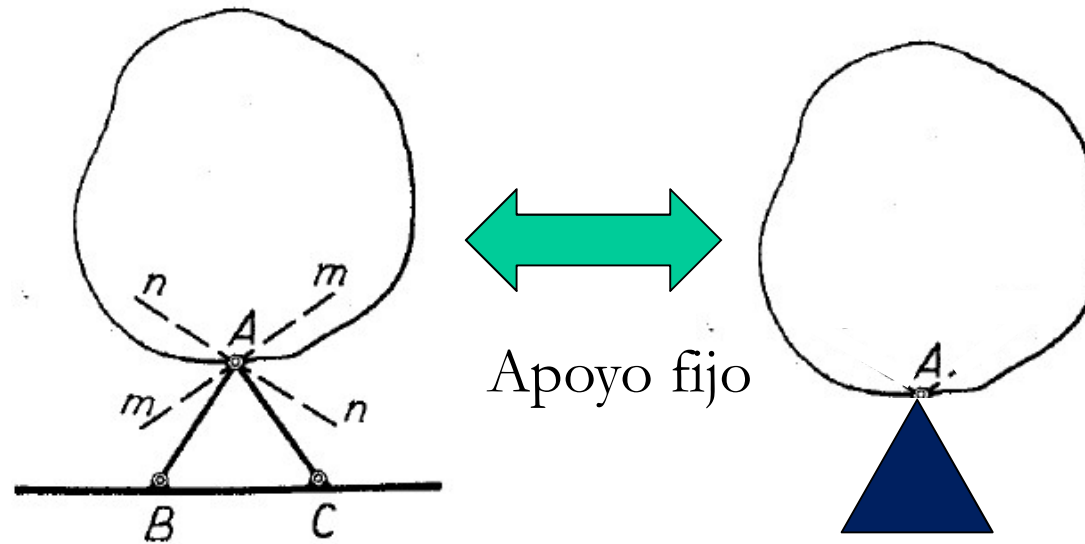


Fig. 6.12.

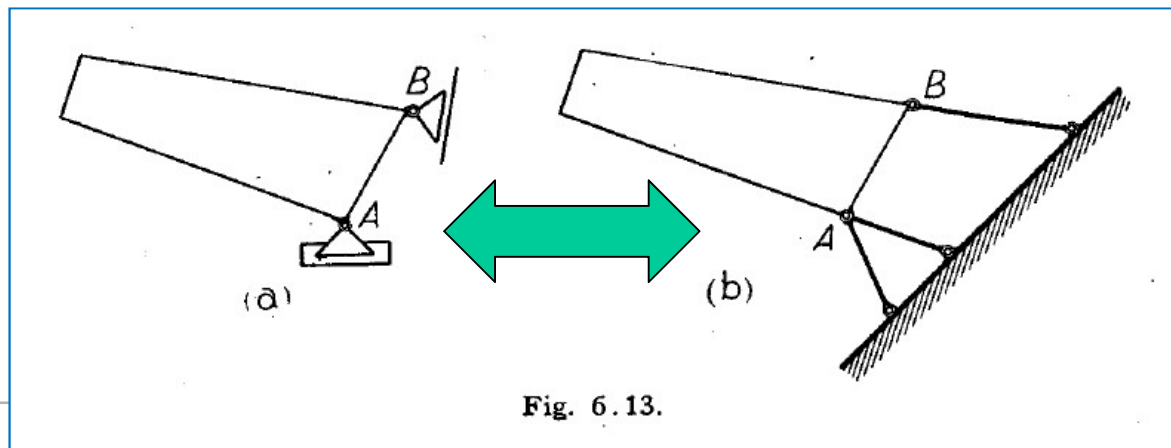
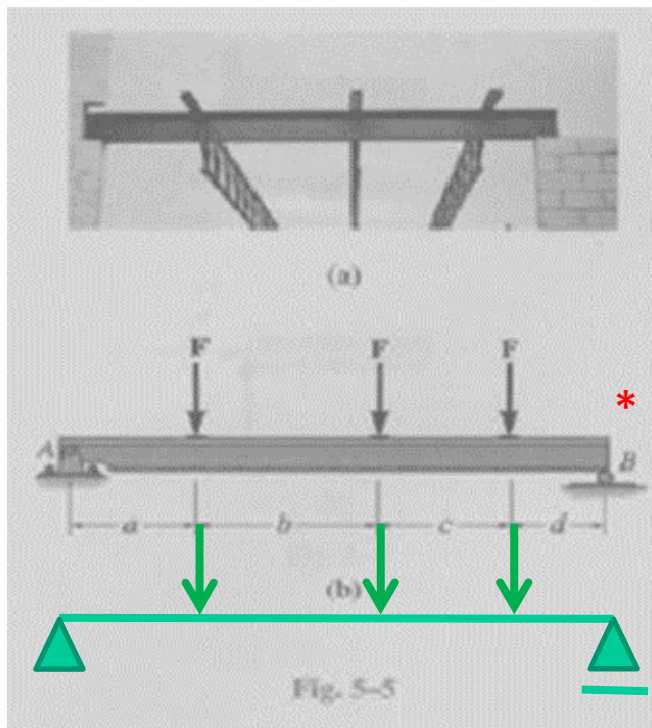


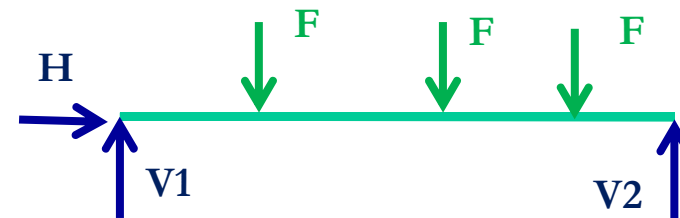
Fig. 6.13.



Modelización



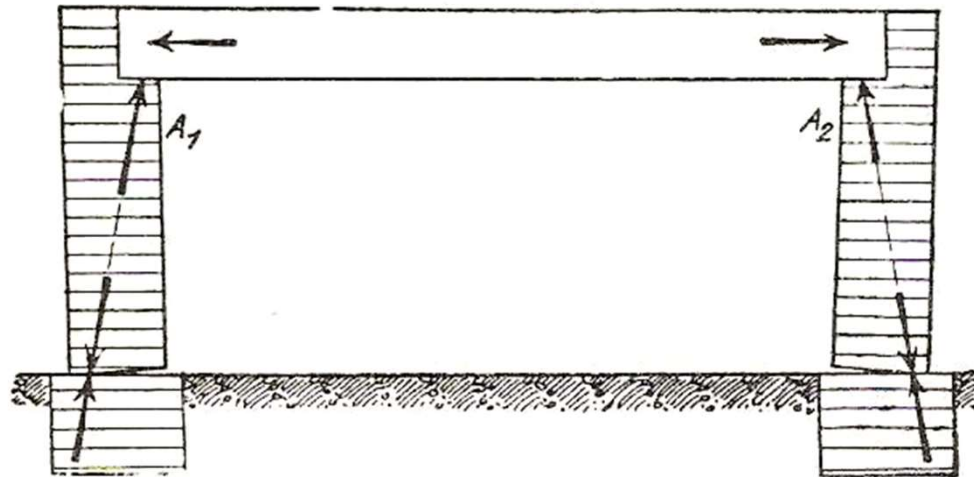
Para ilustrar qué se requiere para desarrollar un modelo apropiado, consideraremos ahora algunos casos. Como se ve en la figura 5-5a, la viga de acero va a ser usada para soportar los largueros del techo de un edificio. En un análisis de fuerza, es razonable suponer que el material es rígido ya que sólo ocurrirán muy pequeñas deflexiones cuando la viga sea cargada. Una conexión con pernos en *A* permitirá cualquier ligera rotación que ocurra cuando la carga se aplique, por lo que para este soporte puede ser considerado un *pasador*. En *B* puede considerarse un *rodillo* ya que ahí el soporte no ofrece resistencia al movimiento horizontal. Los requisitos del código de construcción se tienen en cuenta para especificar la carga de techo que resulta en el cálculo de las cargas *F* de los largueros. Estas fuerzas serán mayores que cualquier carga real sobre la viga ya que toman en cuenta los casos extremos de carga y los efectos dinámicos o de vibración. El peso de la viga generalmente se ignora cuando es pequeño comparado con la carga que la viga soporta. El modelo idealizado de la viga se muestra con dimensiones promedio *a*, *b*, *c* y *d* en la figura 5-5b.



DCL: Diagrama de Cuerpo Libre

*Se asume que puede deslizar

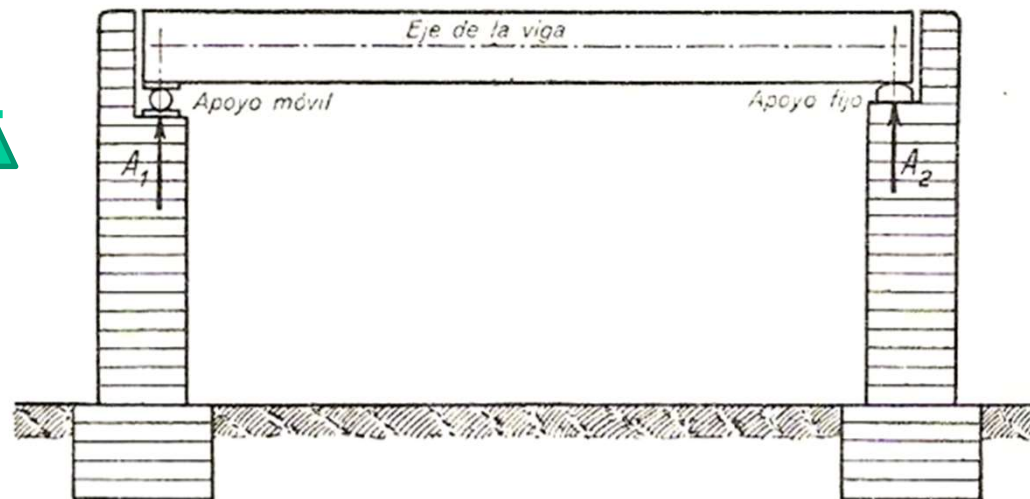
Modelización: viga puente



Dilatación de una viga a causa del calor, y grietas que aparecen en los muros



Viga con sustentación fija y móvil

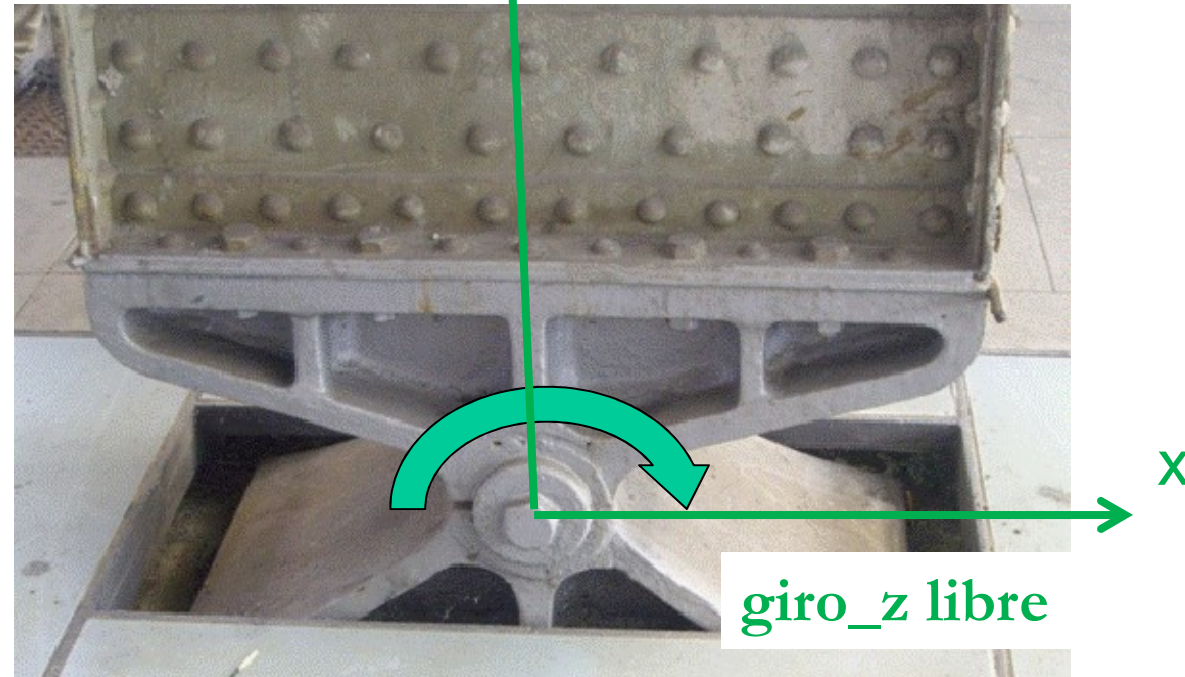


Camino de carga



3 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas de fuerzas tridimensionales





MODELO:

- Desplazamientos x , y , z : impedidos
- Giros en según ejes x , y : podemos suponerlos impedidos
- Giro según eje z : LIBRE

z



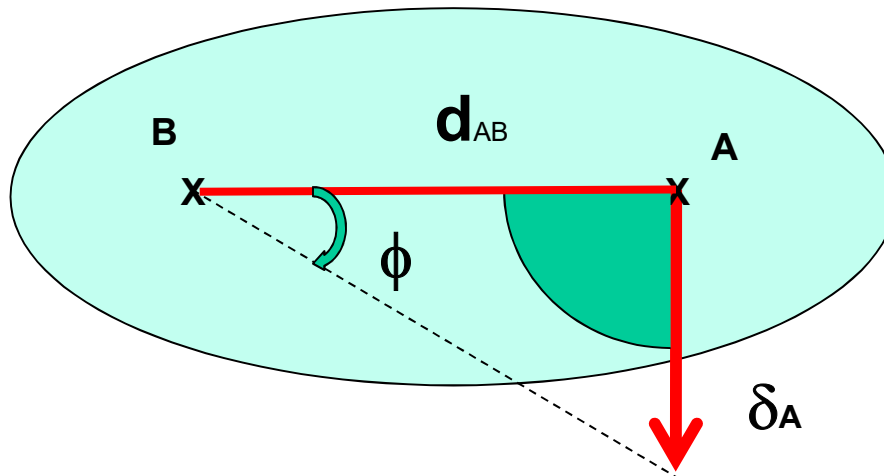
Vinculación aparente

Vinculación aparente: cuando la condición geométrica impuesta a un cuerpo no altera las posibilidades de desplazamiento del mismo.

Vinculación aparente



Para desplazamientos pequeños, el corrimiento que experimenta el punto A resulta normal a la recta determinada por A y el centro de rotación (punto fijo o polo).

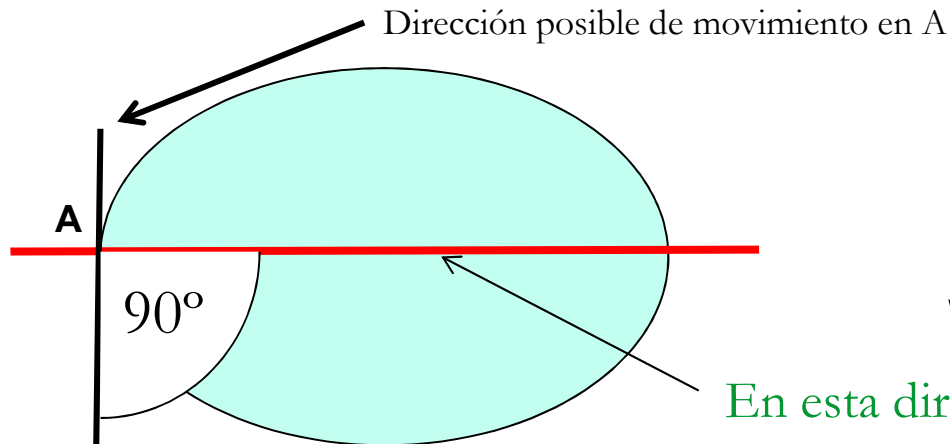


$$\delta_A = \phi \cdot d_{AB}$$

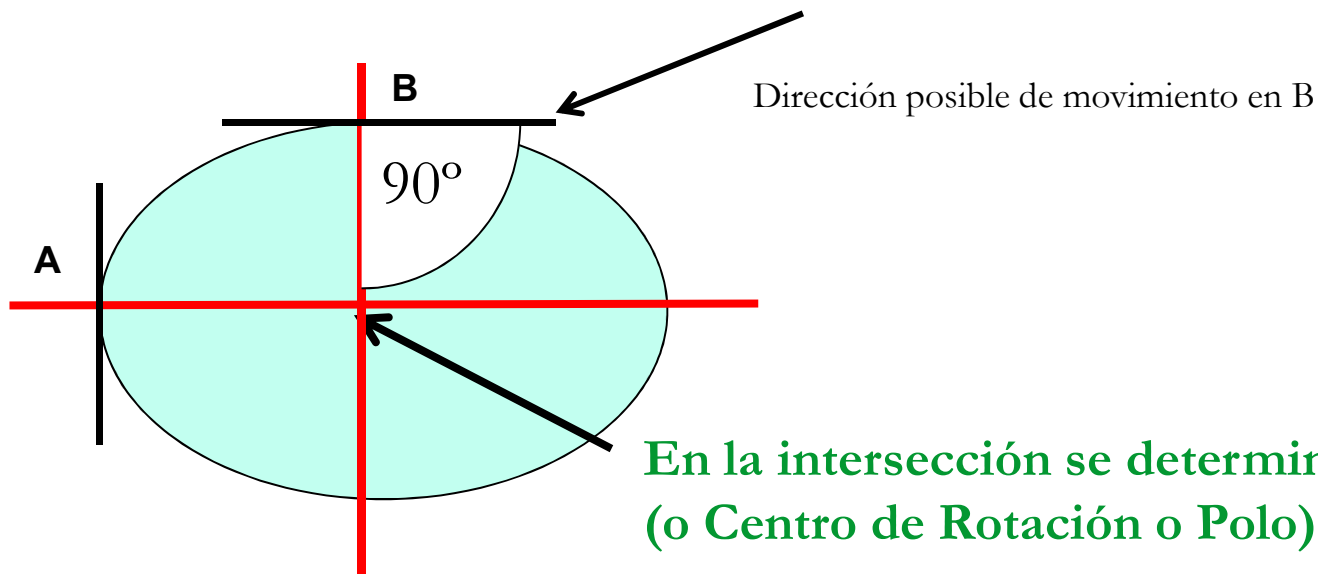


La intersección de las direcciones de 2 apoyos móviles constituyen un punto fijo.

Vinculación aparente



La intersección de las direcciones de 2 apoyos móviles constituyen un punto fijo.

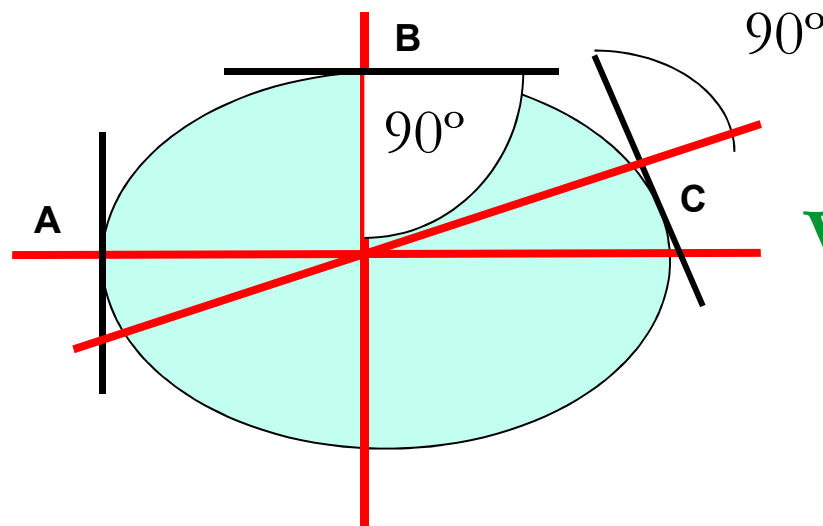




Vínculos aparentes

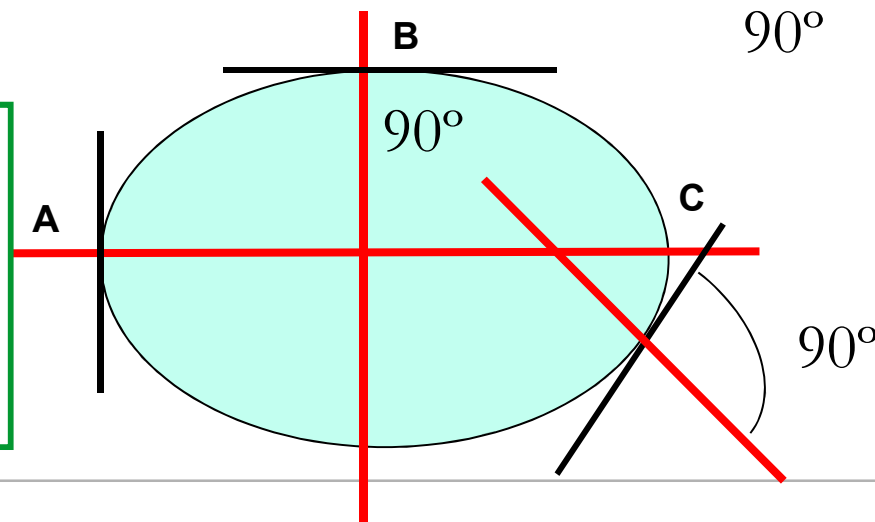
Dirección posible de movimiento en A

La intersección de las direcciones de 2 apoyos móviles constituyen un punto fijo.



VINCULACIÓN APARENTE

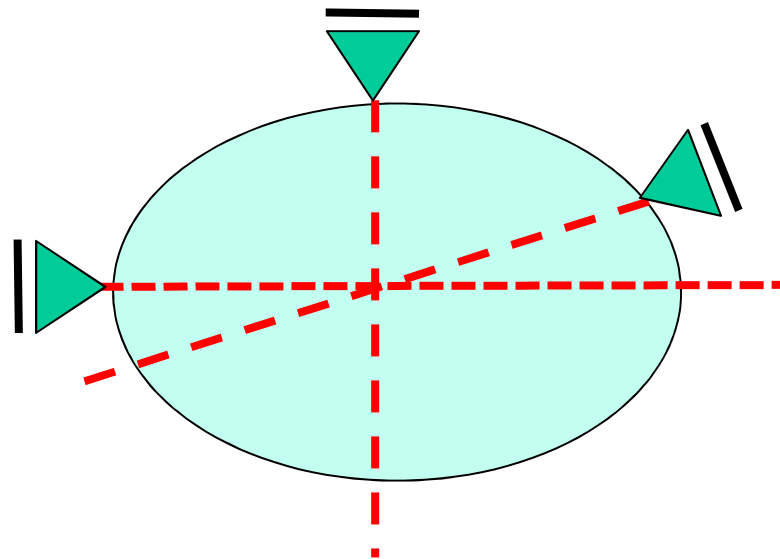
NO HAY VINCULACIÓN APARENTE: las normales a las direcciones de los posibles movimientos no se cortan en el mismo punto





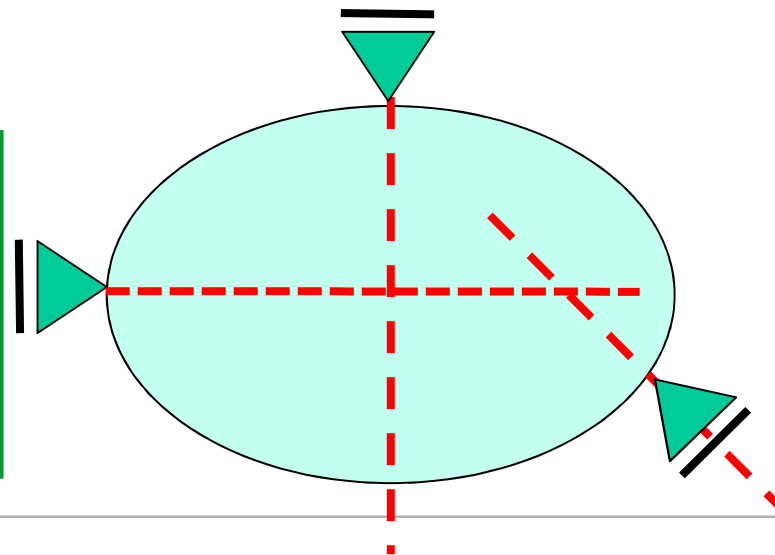
Vínculos aparentes

La intersección de las direcciones de 2 apoyos móviles constituyen un punto fijo.



VINCULACIÓN APARENTE

NO HAY VINCULACIÓN APARENTE: las normales a las direcciones de los posibles movimientos no se cortan en el mismo punto





Isoestaticidad (ó isostaticidad)


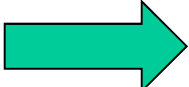
En Mecánica de Estructuras se llama resolver una estructura a calcular el valor de los esfuerzos que actúan sobre cada una de las secciones de todas las piezas que componen la estructura.

Cuando ese cálculo puede realizarse íntegramente utilizando sólo *las ecuaciones de la estática*, la estructura se llama *isostática o estáticamente determinada*.

En caso contrario, se la llama *hiperestática o estáticamente indeterminada*.



Clasificación de los sistemas estructurales según su vinculación

- $GL=CV$ Condición necesaria pero NO suficiente de isoestaticidad
- $GL < CV$  Hiperestáticos
- $GL > CV$  Hipostáticos

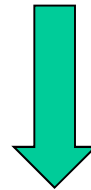
Dónde:

- GL: Grados libertad
- CV : número de Condiciones de Vínculos



Isoestaticidad (ó isostaticidad)

Si $GL=CV$ y **NO** hay Vinculación aparente



Estructura Isostática
(ó estáticamente determinada)



Análisis estructural:

Resolución de sistemas vinculados

1. Verificar la isoestaticidad del sistema
 - Verificar $GL=CV$ (condición necesaria de isoestaticidad, pero no suficiente)
 - Verificar que no hay vinculación aparente (Cinemáticamente Invariable)

Si se verifican estos 2 ítems  ***SISTEMA***
ESTÁTICAMENTE DETERMINADO



Análisis estructural:

Resolución de sistemas vinculados

2. Resolución

- Diagrama de cuerpo libre.
- Planteo y solución ecuaciones de equilibrio
- Verificar resultados

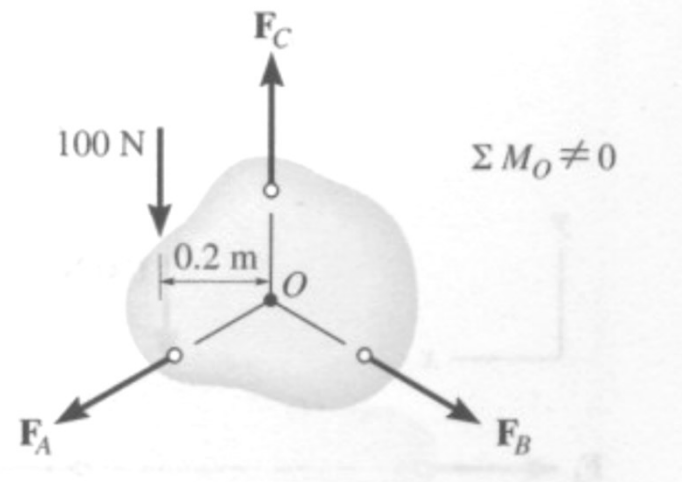
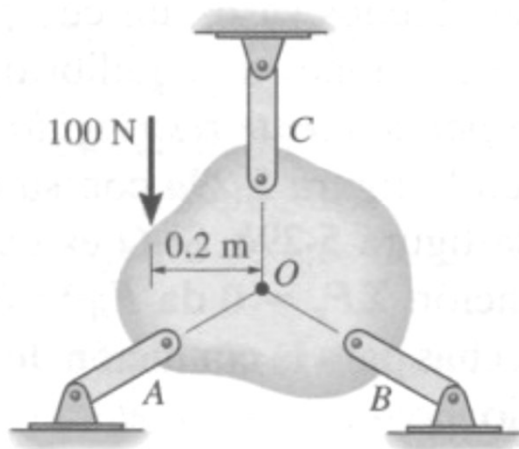
De las reacciones de vínculo conocemos punto de aplicación y dirección, pero no conocemos módulo ni sentido.



Vinculación aparente

1. Vinculación aparente en sistemas planos

- Las reacciones de los vínculos móviles son concurrentes a un punto

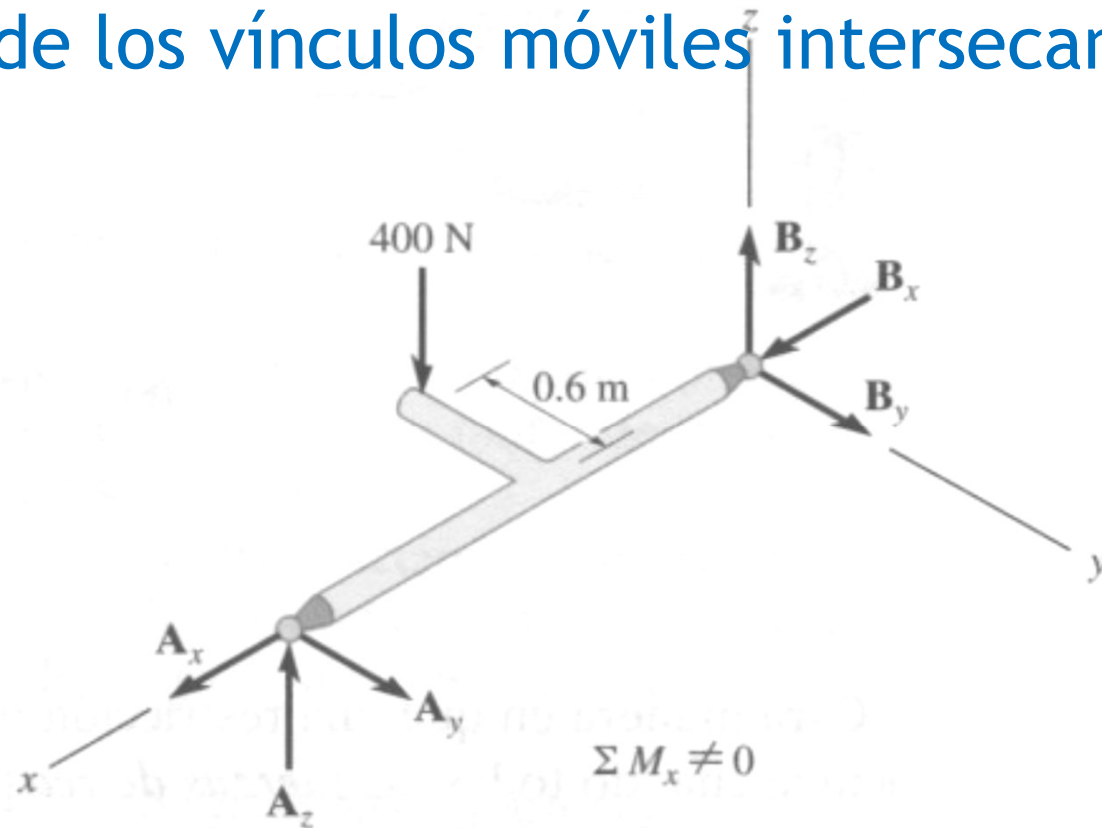
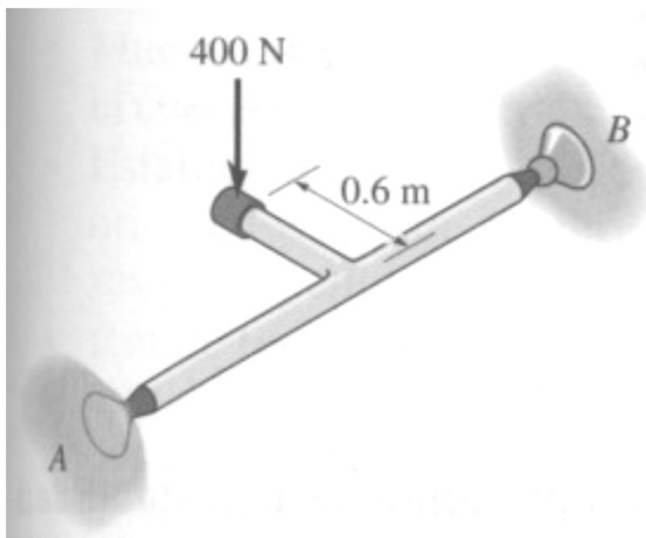


Vinculación aparente



2. Vinculación aparente en sistemas tridimensionales

- Las reacciones de los vínculos móviles intersecan un eje común





Principio de superposición de efectos

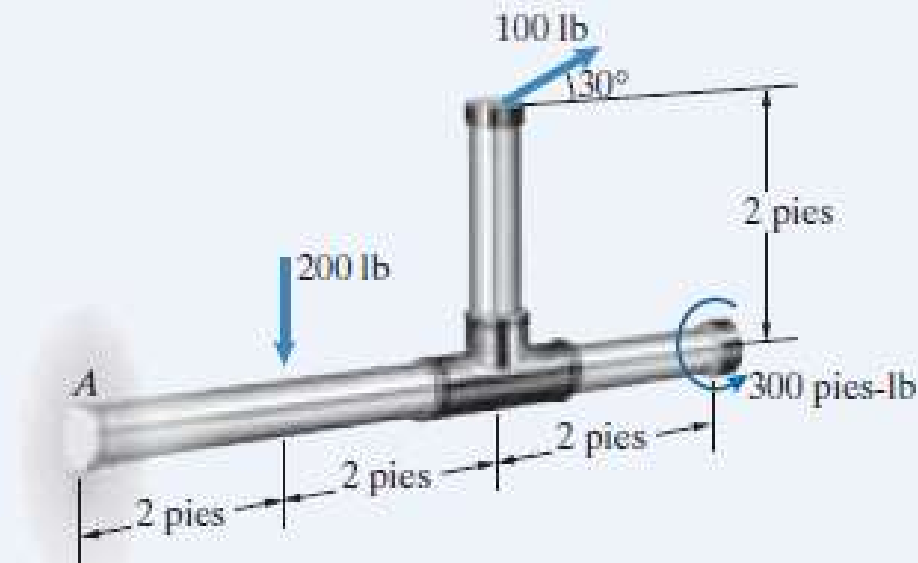
**Sólo aplicable a sistema
lineales: proporcionalidad entre
causa y efecto**



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas planos

El objeto de la figura tiene un soporte fijo en A y está sometido a dos fuerzas y un par. ¿Qué valor tienen las reacciones en el soporte?

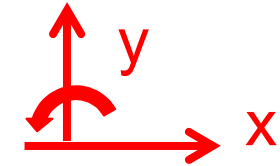


Ref: Cap 5 Bedford Fowler



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas planos



Ecuaciones:

1. Suma de proyecciones sobre eje Y :

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

2. Suma de proyecciones sobre eje X:

$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

3. Suma de momentos respecto al extremo A (o a cualquier otro punto del plano)

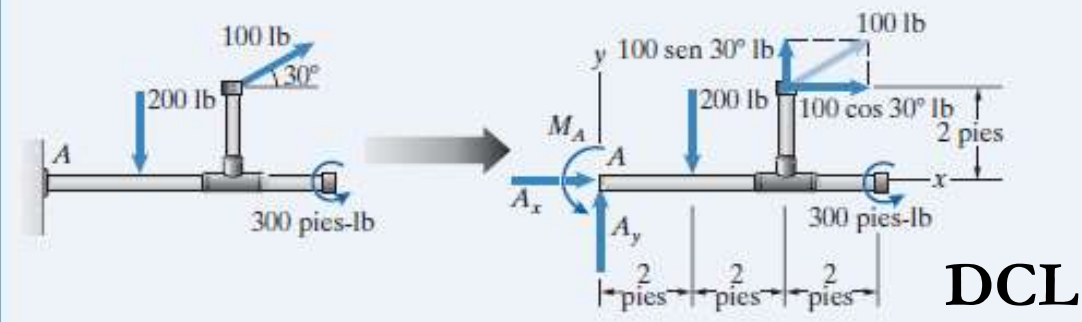
$$\sum_i M_{z,i}^O = 0$$

Estrategia

Se obtendrá un diagrama de cuerpo libre aislando el objeto del soporte fijo en A y mostrando las reacciones ejercidas en dicho punto, se incluirá el par que puede ser ejercido por un soporte fijo. Luego pueden determinarse las reacciones desconocidas al aplicar las ecuaciones de equilibrio.

Solución

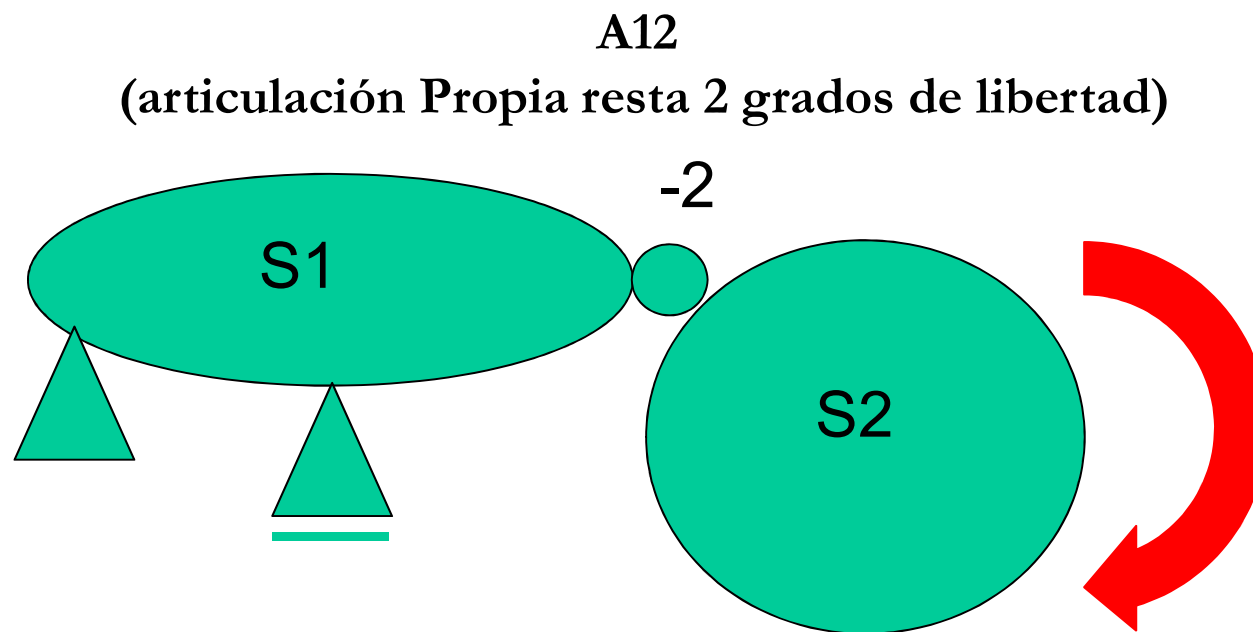
Dibujo del diagrama de cuerpo libre. Se aísla el cuerpo de su soporte y se muestran las reacciones en el soporte fijo (figura a). Hay tres reacciones desconocidas: dos componentes de fuerza A_x y A_y y un par M_A (recuerde que las direcciones de esas flechas pueden escogerse de manera arbitraria). También se puede descomponer la fuerza de 100 lb en sus componentes.



Ref: Cap 5 Bedford Fowler



Cadena abierta de n chapas

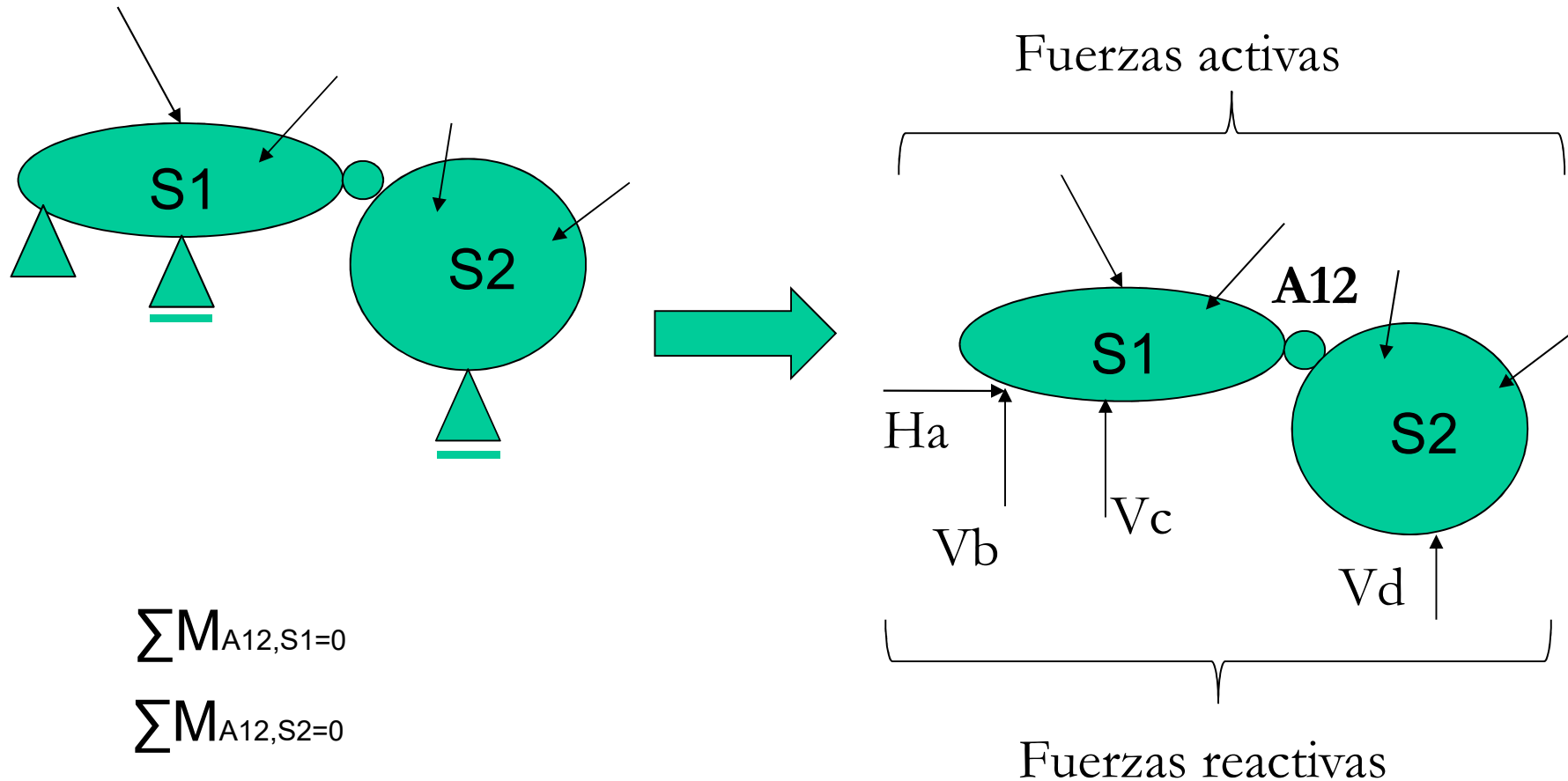


$$GL=3+3-2-1-2=1$$

GL remanente: giro en
torno de A12

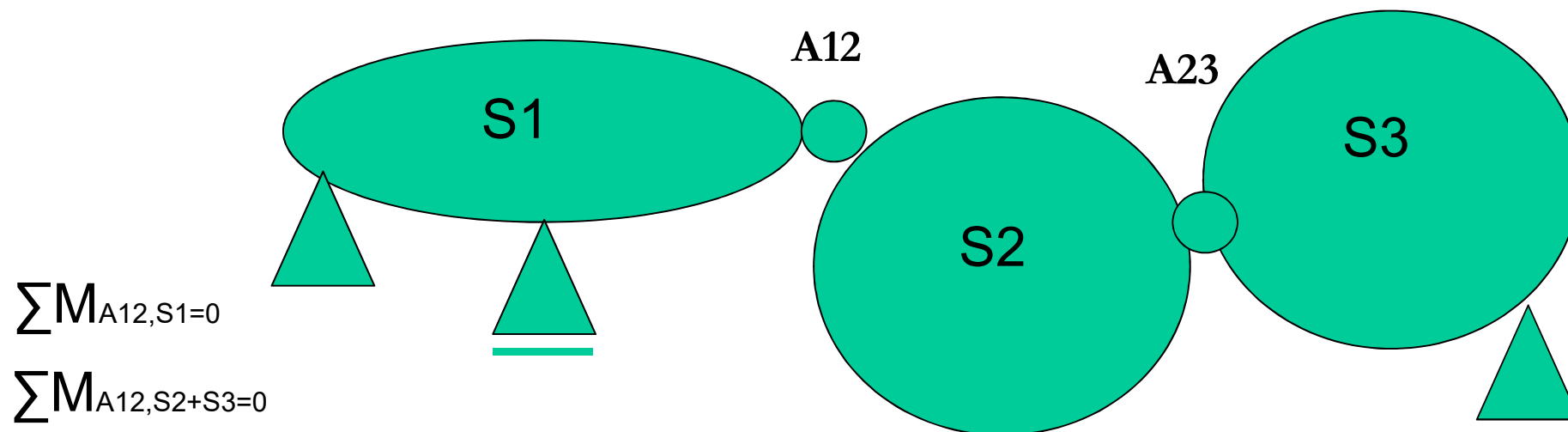


Cadena abierta de n chapas





Cadena abierta de n chapas

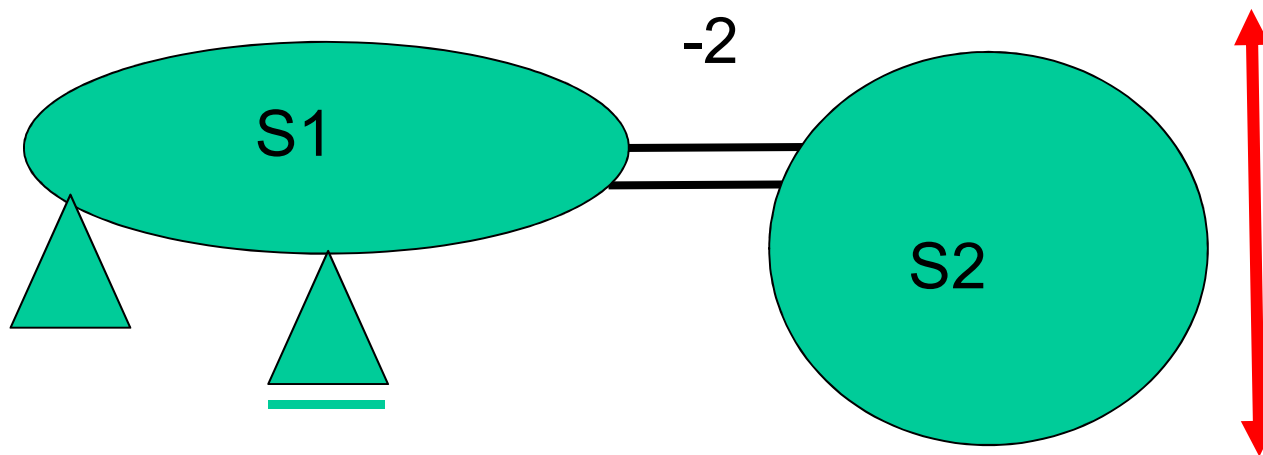


$$GL = 3n - 2(n-1) = n + 2$$



Cadena abierta de n chapas

A12_impropia
(articulación Impropia resta 2 grados de libertad)



$$GL=3+3-2-1-2=1$$

GL remanente: giro en torno de
A12_impropia => traslación
perpendicular al eje de las bielas



Esquemas de vínculos (ó soportes)

2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas



Tabla 5.1 Soportes usados en aplicaciones bidimensionales.

Soportes	Reacciones
<p>Cuerda o cable Resorte</p>	<p>Una fuerza colineal</p>
<p>Apoyo móvil</p> <p>Contacto con una superficie lisa</p>	<p>Una fuerza normal a la superficie de soporte</p>
<p>Contacto con una superficie rugosa</p>	<p>Dos componentes de fuerza</p>
<p>Apoyo fijo</p> <p>Soporte de pasador</p>	<p>Dos componentes de fuerza</p>

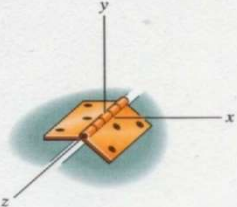
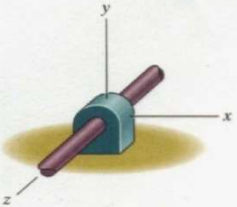
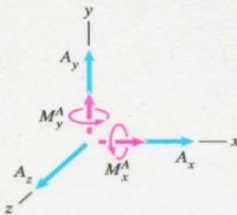
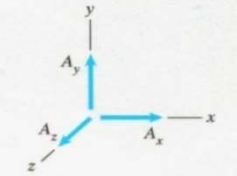
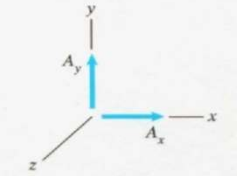
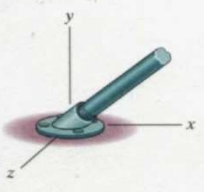
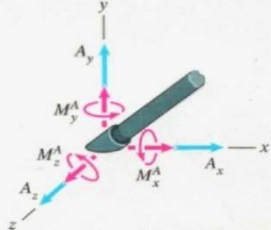
<p>Apoyo móvil</p> <p>Soporte de rodillo</p>	<p>Una fuerza normal a la superficie de soporte</p>
<p>Equivalentes</p>	
<p>Apoyo móvil</p> <p>Pasador guiado o collarín</p>	<p>Una fuerza normal</p>
<p>Empotramiento</p> <p>Soporte fijo (empotrado)</p>	<p>Dos componentes de fuerza y un par</p>

Ref: Cap 5 Bedford Fowler

3 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas espaciales de fuerzas




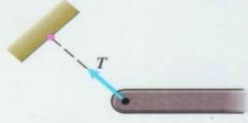
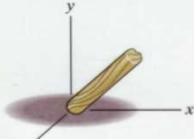
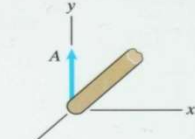
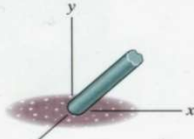
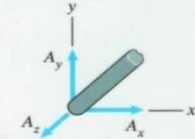
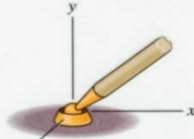
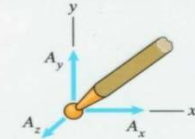
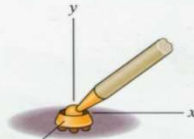
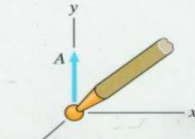
3D

Supports	Reactions
 <p>Hinge (The z axis is parallel to the hinge axis.)</p>  <p>Bearing (The z axis is parallel to the axis of the supported shaft.)</p>	 <p>Three Force Components, Two Couple Components</p>  <p>(When no couples are exerted)</p>  <p>(When no couples and no axial force are exerted)</p>
 <p>Built-in (Fixed) Support</p>	 <p>Three Force Components, Three Couple Components</p>

3 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas espaciales de fuerzas



3D

Supports	Reactions
 <p>Rope or Cable</p>	 <p>One Colinear Force</p>
 <p>Contact with a Smooth Surface</p>	 <p>One Normal Force</p>
 <p>Contact with a Rough Surface</p>	 <p>Three Force Components</p>
 <p>Ball and Socket Support</p>	 <p>Three Force Components</p>
 <p>Roller Support</p>	 <p>One Normal Force</p>



EJERCICIOS

Equilibrio de una partícula



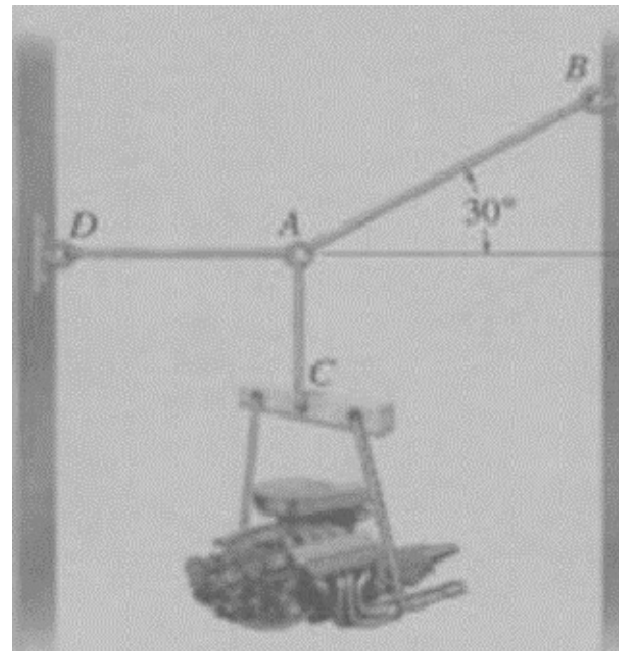
- Sistemas de fuerzas coplanares

EJEMPLO 3.2

Determine la tensión en los cables AB y AD para mantener en equilibrio el motor de 250 kg mostrado en la figura 3-6a.

$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$



Equilibrio de una partícula



- Sistemas de fuerzas coplanares

$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

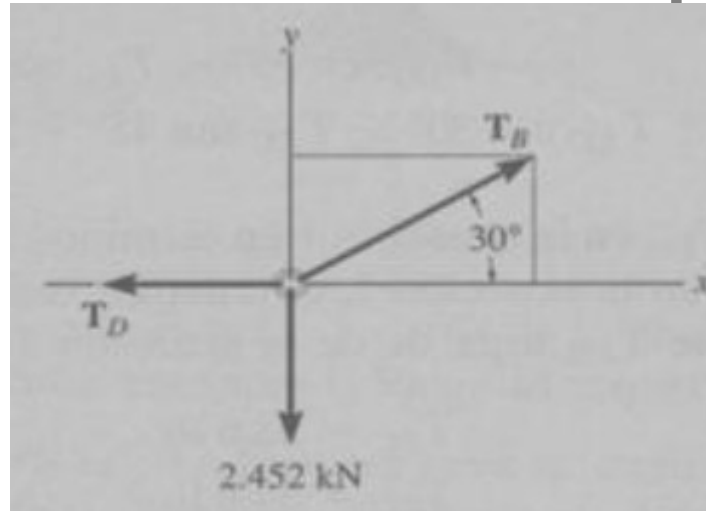


Diagrama de cuerpo libre

Equilibrio interno

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad T_B \cos 30^\circ - T_D = 0 \quad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_B \sen 30^\circ - 2.452 \text{ kN} = 0 \quad (2)$$

Al despejar T_B de la ecuación 2 y sustituirla en la ecuación 1 para obtener T_D resulta

$$T_B = 4.90 \text{ kN} \quad \text{Respuesta}$$

$$T_D = 4.25 \text{ kN} \quad \text{Respuesta}$$



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas planos

Ejemplo 5.4

Análisis de un portaequipaje (► Relacionado con los problemas 5.65–5.68)

En la figura se muestran un portaequipaje mantenido en equilibrio en posición inclinada y su diagrama de cuerpo libre. Si el portaequipaje soporta un peso $W = 50$ lb, $\alpha = 30^\circ$, $a = 8$ pulg, $b = 16$ pulg y $d = 48$ pulg, ¿qué fuerza F debe ejercer el usuario?

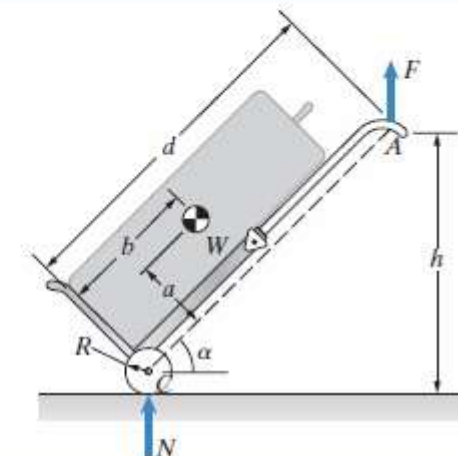
Estrategia

Las reacciones desconocidas en el diagrama de cuerpo libre son la fuerza F y la fuerza normal N ejercida por el piso. Sumando momentos respecto al centro de la rueda C , se obtiene una ecuación donde F es la única reacción desconocida.



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas planos



Solución

Sumando momentos respecto a C,

$$\Sigma M_{(\text{punto } C)} = d(F \cos \alpha) + a(W \sin \alpha) - b(W \cos \alpha) = 0,$$

y despejando F , se obtiene

$$F = \frac{(b - a \tan \alpha)W}{d}.$$

Sustituyendo los valores de W , α , a , b y d , la solución es $F = 11.9 \text{ lb}$.

Ref: Cap 5 Bedford Fowler



Equilibrio de un cuerpo rígido

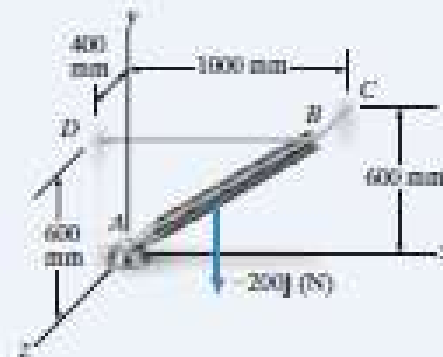
Sistemas espaciales (3D)

230 Capítulo 5 Objetos en equilibrio

Ejemplo activo 5.7

Determinación de las reacciones en tres dimensiones (► Relacionado con el problema 5.86)

La barra AB de la figura está soportada por los cables BC y BD y por un soporte de bola y cuenco en A . El cable BC es paralelo al eje z y el cable BD es paralelo al eje x . La fuerza de 200 N actúa en el punto medio de la barra. Determine el valor de las tensiones en los cables y las reacciones en A .



Ref: Cap 5 Bedford Fowler



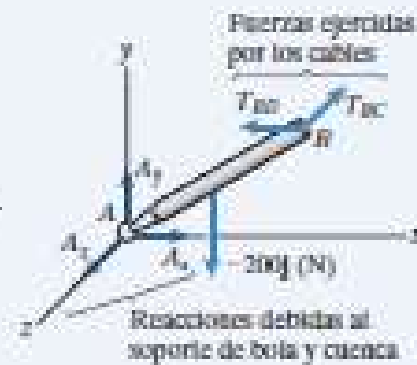
Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas espaciales (3D)

Solución

Dibujo del diagrama de cuerpo libre de la barra

Aísla la barra y muestre las reacciones ejercidas por los cables y el soporte de bola y cuenca.



Aplicación de las ecuaciones de equilibrio

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x &= A_x - T_{AB} = 0, \\ \Sigma F_y &= A_y - 200 \text{ N} = 0, \\ \Sigma F_z &= A_z - T_{BC} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Las sumas de las fuerzas en cada dirección coordenada son iguales a cero.

Ref: Cap 5 Bedford Fowler



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas espaciales (3D) 5.3 Aplicaciones tridimensionales 231

$$\begin{aligned}\Sigma M_{\text{punto A}} &= [r_{AB} \times (-T_{BC}k)] + [r_{AB} \times (-T_{BD}i)] + \left[\frac{1}{2} r_{AB} \times (-200j) \right] \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & -T_{BC} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0.6 & 0.4 \\ -T_{BD} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & -200 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-0.6T_{BC} + 40)i + (T_{BC} - 0.4T_{BD})j + (0.6T_{BD} - 100)k.\end{aligned}$$

La suma de los momentos respecto a cualquier punto es igual a cero.

Las componentes de este vector (las sumas de los momentos respecto a los tres ejes coordenados) deben ser iguales a cero.

$$\Sigma M_x = -(0.6 \text{ m})T_{BC} + 40 \text{ N}\cdot\text{m} = 0,$$

$$\Sigma M_y = (1 \text{ m})T_{BC} - (0.4 \text{ m})T_{BD} = 0,$$

$$\Sigma M_z = (0.6 \text{ m})T_{BD} - 100 \text{ N}\cdot\text{m} = 0.$$

Al resolver las seis ecuaciones de equilibrio escalares se obtiene
 $A_x = 166.7 \text{ N}$, $A_y = 200 \text{ N}$, $A_z = 66.7 \text{ N}$, $T_{BC} = 66.7 \text{ N}$,
y $T_{BD} = 166.7 \text{ N}$.

Ref: Cap 5 Bedford Fowler

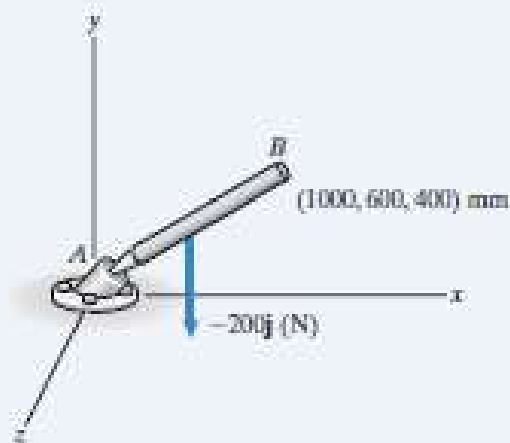


Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas espaciales (3D)

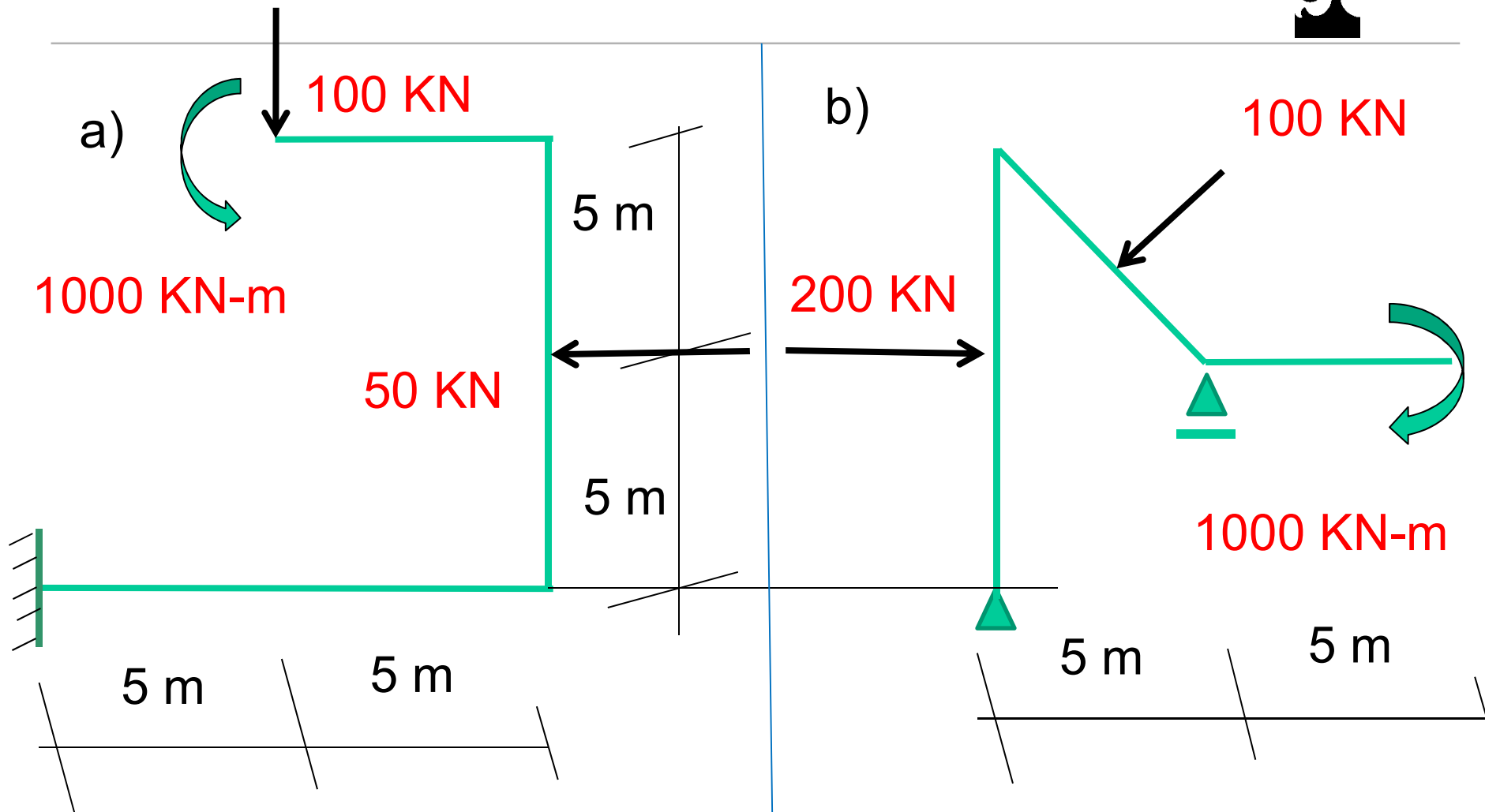
Empotramiento (6GL)

Problema de práctica Suponga que los cables BC y BD se remueven y que la unión de bola y cuenca en A se reemplaza por un soporte fijo. Determine las reacciones en A .



Respuestas: $A_x = 0$, $A_y = 200$ N, $A_z = 0$, $M_{Ax} = -40$ N·m, $M_{Ay} = 0$, $M_{Az} = 100$ N·m.

Ref: Cap 5 Bedford Fowler



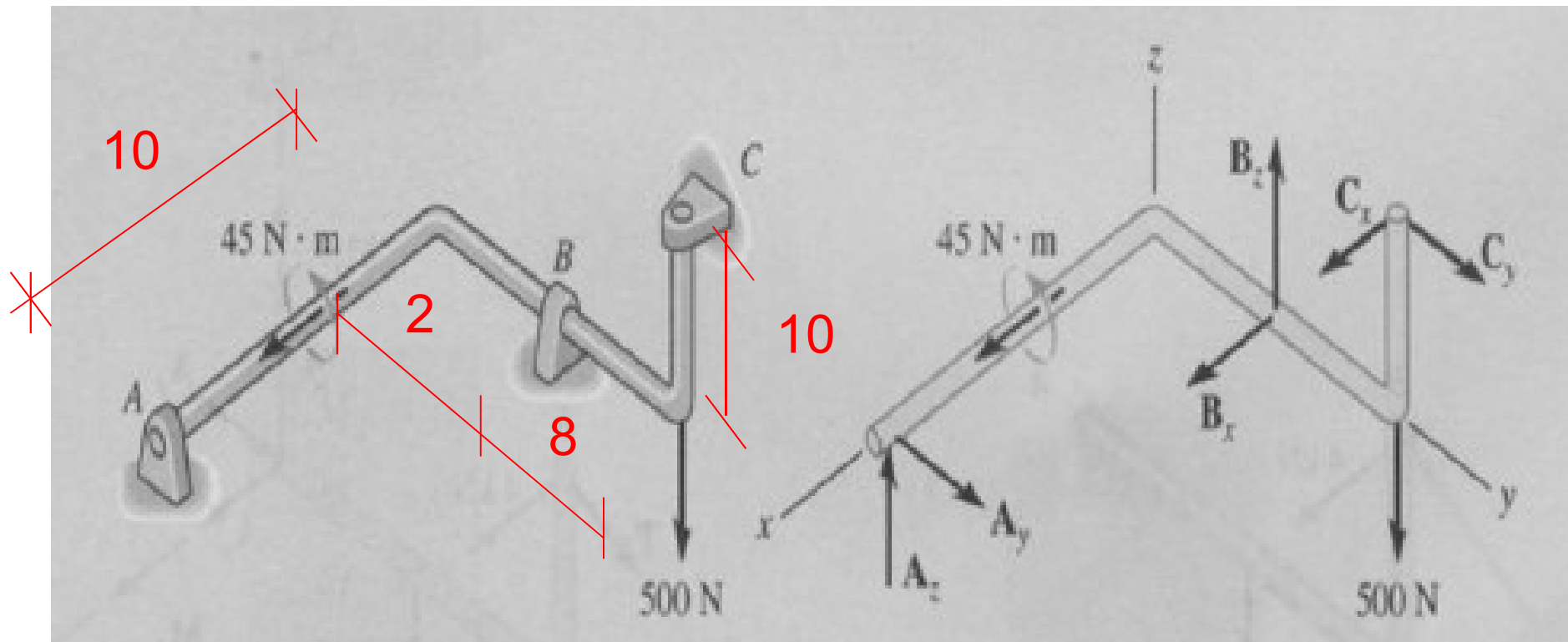
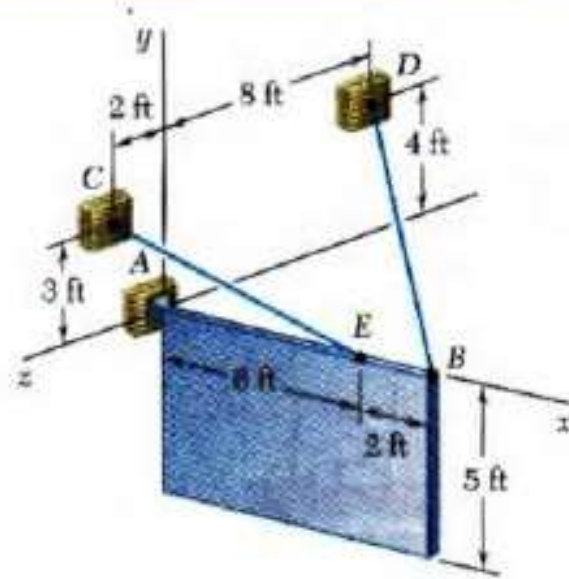


Diagrama cuerpo libre

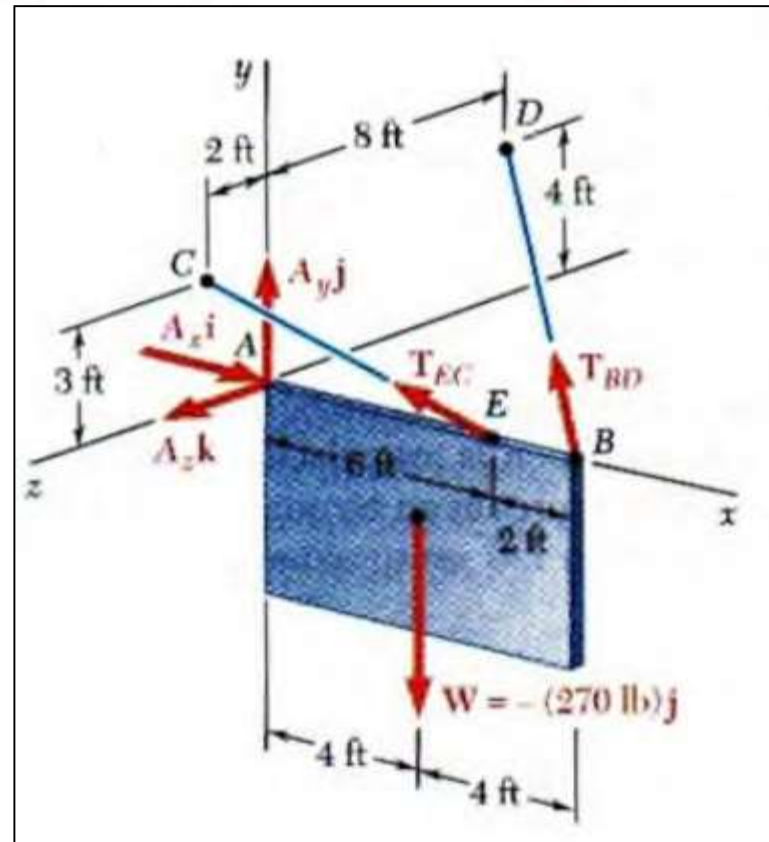
Equilibrio de un cuerpo rígido



PROBLEMA RESUELTO 4.8

Un anuncio de densidad uniforme de 5×8 ft pesa 270 lb y está apoyado por una rótula en A y por dos cables. Determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

- Diagrama de cuerpo libre



Ref: Beer, Johnston, Eisenberg

Equilibrio de un cuerpo rígido

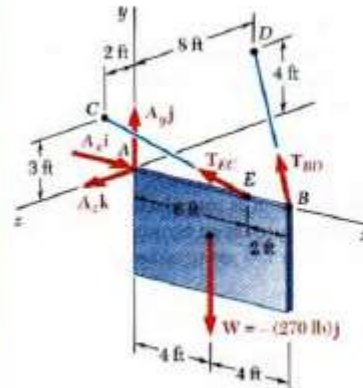


SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del anuncio. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso $W = -(270 \text{ lb})\mathbf{j}$ y las reacciones en A , B y E . La reacción en A es una fuerza cuya dirección es desconocida y se representa con tres componentes desconocidas. Como las direcciones de las fuerzas ejercidas por los cables son conocidas, cada una de dichas fuerzas sólo involucra una incógnita: las magnitudes T_{BD} y T_{EC} . Como sólo hay cinco incógnitas, el anuncio tiene restricción parcial. Éste puede rotar libremente alrededor del eje x ; sin embargo, el anuncio está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma M_x = 0$.

➤ Hipostáticos : $GL > CV$

Equilibrio de un cuerpo rígido



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del anuncio. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso $\mathbf{W} = -(270 \text{ lb})\mathbf{j}$ y las reacciones en A , B y E . La reacción en A es una fuerza cuya dirección es desconocida y se representa con tres componentes desconocidas. Como las direcciones de las fuerzas ejercidas por los cables son conocidas, cada una de dichas fuerzas sólo involucra una incógnita: las magnitudes T_{BD} y T_{EC} . Como sólo hay cinco incógnitas, el anuncio tiene restricción parcial. Éste puede rotar libremente alrededor del eje x ; sin embargo, el anuncio está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma M_x = 0$.

Las componentes de las fuerzas \mathbf{T}_{BD} y \mathbf{T}_{EC} pueden expresarse en términos de las magnitudes desconocidas T_{BD} y T_{EC} al escribir

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{BD} = \frac{-(8 \text{ ft})\mathbf{i} + (4 \text{ ft})\mathbf{j} - (8 \text{ ft})\mathbf{k}}{12 \text{ ft}} \quad BD = 12 \text{ ft}$$

$$\frac{\overrightarrow{EC}}{EC} = \frac{-(6 \text{ ft})\mathbf{i} + (3 \text{ ft})\mathbf{j} + (2 \text{ ft})\mathbf{k}}{7 \text{ ft}} \quad EC = 7 \text{ ft}$$

$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD} \left(\frac{\overrightarrow{BD}}{BD} \right) = T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC} \left(\frac{\overrightarrow{EC}}{EC} \right) = T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right)$$

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre el anuncio forman un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

$$(A_x - \frac{2}{3}T_{BD} - \frac{6}{7}T_{EC})\mathbf{i} + (A_y + \frac{1}{3}T_{BD} + \frac{3}{7}T_{EC} - 270 \text{ lb})\mathbf{j} + (A_z - \frac{2}{3}T_{BD} + \frac{2}{7}T_{EC})\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_A = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$(8 \text{ ft})\mathbf{i} \times T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) + (6 \text{ ft})\mathbf{i} \times T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right) + (4 \text{ ft})\mathbf{i} \times (-270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

$$(2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1080 \text{ lb})\mathbf{k} + (5.333T_{BD} - 1.714T_{EC})\mathbf{j} = 0 \quad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de \mathbf{j} y \mathbf{k} en la ecuación (2), se obtienen dos ecuaciones escalares que deben resolverse para T_{BD} y T_{EC} :

$$T_{BD} = 101.3 \text{ lb} \quad T_{EC} = 315 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

Al igualar a cero los coeficientes de \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} en la ecuación (1), se obtienen otras tres ecuaciones que proporcionan las componentes de \mathbf{A} . Así, se tiene que

$$\mathbf{A} = +(338 \text{ lb})\mathbf{i} + (101.2 \text{ lb})\mathbf{j} - (22.5 \text{ lb})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PREGUNTAS

- ¿Qué tiene que cumplirse para que un cuerpo esté en equilibrio?
- Definir vínculo o soporte.
- Si un vínculo impide un desplazamiento de un cuerpo en una coordenada determinada, ¿qué puede decir de la fuerza que se desarrolla sobre ese cuerpo ?
- ¿Qué diferencia hay entre vínculo y condición de vínculo?
- ¿Qué es la “especie” de un vínculo?
- ¿A qué llamamos “configuración de vínculo aparente” o “vinculación aparente”?
- ¿A qué llamamos “Estructura”.
- ¿Cuándo una estructura es isostática?
- ¿Cuándo una estructura es hipostática?
- ¿Cuándo una estructura es hiperestática?
- ¿Cuándo un sistema es cinemáticamente variable?
- ¿Cuándo un sistema es cinemáticamente invariable?
- Justifique:
 - “Un sistema isostático siempre es cinemáticamente invariable”. ¿Verdadero o falso?
 - “Un sistema hiperestático siempre es cinemáticamente invariable”. ¿Verdadero o falso?
 - “Un sistema hipostático siempre es cinemáticamente invariable”. ¿Verdadero o falso?
- Definir superposición de efectos. Hipótesis. Ejemplo.
- Definir grados de libertad. ¿Cuántos grados de libertad tiene una partícula? ¿Y un cuerpo rígido?
- Definir pórtico plano. Ejemplificar.