# Análisis Matemático 2

## Una resolución de ejercicios con hipervínculos a videos on-line

Autor: Martín Maulhardt
Revisión: Fernando Acero y Ricardo Sirne

Análisis Matemático II y II "A"
Facultad de Ingeniería - U.B.A.

# Una Resolución de Ejercicios

Segundo cuatrimestre de 2018.

Ejercicio 1.

Sea $f : R^2 \to R$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \ sen(y)}{x^2 + y^2} & si \ (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ (x, y) = (0,0) \end{cases}.$$

Analice la derivabilidad según distintas direcciones en $(0,0)$.

Solución.

Para analizar la derivabilidad según distintas direcciones sea $\breve{v} = (a, b)$ con $a^2 + b^2 = 1$. Entonces, por definición de derivada direccional, de existir y ser finito el límite, tenemos

$$f'((0,0), \breve{v}) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(ha, \ hb) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(ha)^2 \; sen(hb)}{(ha)^2 + (hb)^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 a^2 \; sen(hb)}{h^3(a^2 + b^2)}$$

es decir

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^2 \; sen(hb)}{h} .$$

Debemos ahora considerar dos casos, a saber:

$a = 0 \; \vee \; b = 0$ y $a \neq 0 \; \wedge \; b \neq 0$.

Caso 1: Si $a = 0 \; \vee \; b = 0$ tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^2 \; sen(hb)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Caso 2 : Si $a \neq 0 \; \wedge \; b \neq 0$ tenemos, aplicando la regla de L'Hospital

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^2 \; sen(hb)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^2 \; cos(hb) \, . \, b}{1} = a^2 b.$$

Por lo tanto

$$f'((0,0),\breve{v}) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = \begin{cases} a^2 b & si \quad a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 0 \\ 0 & si \quad a = 0 \ \vee \ b = 0 \end{cases}.$$

*Observación. Como* $a^2 b$ *es igual a cero si* $a = 0 \ \vee \ b = 0$ *se podría escribir el resultado más sintéticamente así:*

$$f'((0,0),\breve{v}) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = a^2 b$$

*o más aún recordando que* $a^2 + b^2 = 1$

$$f'((0,0),\breve{v}) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = (1 - b^2)b.$$

Ver video on-line

Ejercicio 2.

Sea $C$ una curva cuyos puntos pertenecen a la superficie de ecuación $x^2z - y^2 + z = 4$. Sabiendo que la proyección ortogonal de $C$ sobre el plano $xy$ tiene ecuación $y = x^2$ analice si la recta tangente a $C$ en el punto $(2,4,z_0)$ interseca en algún punto al eje $z$.

Solución.

Si la proyección de $C$ sobre el plano $xy$ tiene ecuación $y = x^2$ podemos parametrizar $C$ en la forma

$$\vec{\gamma}(t) = (t, t^2, z(t)) \qquad\qquad t \in R.$$

Por estar $C$ contenida en la superficie de ecuación

$$x^2z - y^2 + z = 4$$

tenemos $z(1+x^2)=4+y^2$ entonces $z=\dfrac{4+y^2}{1+x^2}$.

Luego

$$\vec{\gamma}(t)=\left(t,\,t^2,\,\frac{4+t^4}{1+t^2}\right) \qquad\qquad t\in R$$

es una posible parametrización regular de $C$.

El valor del parámetro $t$ para el cual $\vec{\gamma}(t)=(2{,}4{,}z_0)$ es evidentemente $t=2$ de modo que debemos analizar si la recta tangente en $\vec{\gamma}(2)=(2{,}4{,}4)$ interseca al eje $z$.

Como $\vec{\gamma}(t)=\left(t,\,t^2,\,\dfrac{4+t^4}{1+t^2}\right)$ tenemos derivando que

$$\vec{\gamma}'(t)=\left(1{,}2t,\frac{4t^3\;(1+t^2)-(4+t^4)\;2t}{(1+t^2)^2}\right).$$

Luego

$$\vec{\gamma}'(2) = \left(1,\ 4,\ \frac{16}{5}\right).$$

Por lo tanto, los puntos del espacio $xyz$ que pertenecen a la recta tangente recta tangente en $\vec{\gamma}(2) = (2,4,4)$ son

$$(x, y, z) = (2,4,4) + u\left(1,\ 4,\ \frac{16}{5}\right) \qquad \forall u \in R$$

es decir

$$(x, y, z) = \left(2 + u,\ 4 + 4u,\ 4 + \frac{16}{5}u\right) \qquad \forall u \in R.$$

Si queremos que dicha recta interseque al eje $z$, cuyos puntos son del tipo $(0,\ 0,\ z_0)$, debemos tener simultáneamente

$$\begin{cases} 2 + \ \ u = 0 \Longrightarrow u = -2 \\ 4 + 4u = 0 \Longrightarrow u = -1 \end{cases}.$$

Absurdo! Luego la recta tangente a $C$ en el punto $(2,4,4)$ no interseca al eje $z$.

Ver video on-line

Ejercicio 3.

Siendo $h(x,y) = f(x - y^2, 2x + y)$ calcule aproximadamente $h(1.02, 0.99)$ usando una aproximación lineal sabiendo que $w = f(u,v)$ queda definida implícitamente mediante la ecuación $wu + ln(w + v - u) = 0$ en un entorno de $(u_0, v_0) = (0,3)$.

Solución.

Puesto que debemos calcular aproximadamente. $h(1.02, 0.99)$, y puesto que el punto $(1.02, 0.99)$ está “cerca” del punto $(1, 1)$ consideremos una aproximación lineal de la función diferenciable $h(x,y)$ en un entorno del punto $(1, 1)$, es decir, consideremos la aproximación

$$h(x,y) \approx h(1,1) + h'_x(1,1)\ (x-1) + h'_y(1,1)\ (y-1)$$

Como $h(1,1) = f(0,\ 3)$ tenemos, de la definición implícita de $w = f(u, v)$ mediante la ecuación $wu + ln(w + v - u) = 0$, que

$$w.0 + ln(w + 3 - 0) = 0 \Longrightarrow w = -2.$$

Luego

$$h(1,1) = f(0,\ 3) = -2.$$

Para calcular ahora $f'_u(0,3)$ y $f'_v(0,3)$ apliquemos la fórmula de la derivación de funciones definidas implícitamente

$$f'_u(0,3) = -\left.\frac{F'_u}{F'_w}\right|_{(0,3,-2)} \qquad f'_v(0,3) = -\left.\frac{F'_v}{F'_w}\right|_{(0,3,-2)}$$

donde hemos llamado $F(u, v, w) = wu + ln(w + v - u)$.

Tenemos entonces calculando que

$$f'_u(0,3) = -\left.\frac{w + \frac{-1}{w+v-u}}{u + \frac{1}{w+v-u}}\right|_{(0,3,-2)} = -\frac{-3}{1} = 3$$

y

$$f'_v(0,3) = -\left.\frac{\frac{1}{w+v-u}}{u + \frac{1}{w+v-u}}\right|_{(0,3,-2)} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Finalmente si $(u, v) = \overrightarrow{g}(x, y) = (x - y^2,\ 2x + y)$ obtenemos que la matriz Jacobiana $D\overrightarrow{g}$ es

$$(D\overrightarrow{g})(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}(x, y)$$

y evaluando

$$(D\overrightarrow{g})(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, como la composición de funciones diferenciables es diferenciable, podemos aplicar la regla de la cadena para obtener

$$Dh(1{,}1) = Df(\overrightarrow{g}(1{,}1))\ (D\overrightarrow{g})(1{,}1) =$$

$$= Df(0{,}3)\ (D\overrightarrow{g})(1{,}1) = (3\ \ -1)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ -7).$$

Poniendo todos estos valores en la aproximación lineal del comienzo del ejercicio tenemos

$$h(x,y) \approx h(1{,}1) + h'_x(1{,}1)\ (x-1) + h'_y(1{,}1)\ (y-1) =$$

$$= -2 + 1\ (x-1) - 7\ (y-1).$$

Llegamos así al resultado final

$$h(1.02,\ 0.99) \approx -2 + 1\ (1.02-1) - 7\ (0.99-1) = -1.91.$$

Ver video on-line

Ejercicio 4.

Dada $f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 2x)$ definida en $D = \{(x, y) \in R^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 2\}$ determine en qué puntos de $D$ se produce el máximo y mínimo absolutos de $f(x, y)$ y calcule los valores de dichos extremos.

Solución.

Como la función $f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 2x)$ es continua en el conjunto compacto $D = \{(x, y) \in R^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 2\}$ sabemos, por el teorema de Weierstrass, que existen los valores máximo y mínimos absolutos de $f$ en $D$.

Si estos valores se alcanzan en el interior de $D$ entonces, puesto que $f \in C^2(R^2)$ y en particular en el interior de $D$, es necesario que en ese punto interior

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = (0,0).$$

Como $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2x^2$ debemos resolver entonces el sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}.$$

De la segunda obtenemos $x = 0 \quad \vee \quad y = 0$.

Si $x = 0$ entonces, sustituyendo en la primera, obtenemos $y^2 = 0$ de donde $y = 0$.

Si $y = 0$ entonces $3x^2 - 4x = 0$. Luego $x = 0 \quad \vee \quad x = 4/3$.

Tenemos entonces por ahora dos puntos críticos posibles para alcanzar los extremos de $f(x,y)$ en el interior de $D$, a saber:

$$P_1 = (0,0) \qquad P_2 = (4/3,0).$$

Notemos que estos puntos críticos son ambos interiores a $D$, por lo tanto debemos considerarlos.

*Observación: No es necesario el análisis de la Hessiana pues se buscan los extremos absolutos de $f$ y cualquier conclusión de ella será de carácter relativo. Pero también sería correcto analizar cuál o cuáles de estos puntos produce un extremo relativo (máximo o mínimo) a través de la Hessiana y descartar así los puntos de ensilladura para luego compararlos con los extremos en la frontera. Ambos caminos conducen, por supuesto, a la solución correcta.*

Para hallar los posibles extremos de $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2x^2$ en la curva borde de $D$ parametricemos dicho borde en la forma

$$\overrightarrow{c}(t) = (1 + \sqrt{2}\ cos(t), \sqrt{2}\ sen(t)) \qquad t \in [0,2\pi].$$

Consideremos entonces la función

$$f\left(1 + \sqrt{2}\ cos(t), \sqrt{2}\ sen(t)\right) = g(t).$$

Obtenemos que

$$g(t) = \left(1 + \sqrt{2}cos(t)\right)\left(\left(1 + \sqrt{2}cos(t)\right)^2 + 2sen^2(t) - 2\left(1 + \sqrt{2}cos(t)\right)\right)$$

y calculando

$$g(t) = 1 + \sqrt{2}cos(t).$$

Los extremos de esta función se alcanzan en los valores de $t$ tales que

$$g'(t) = -\sqrt{2}sen(t) = 0 \ \ , t \in (0,2\pi)$$

o en

$$t = 0 \ \vee \ t = 2\pi .$$

Como $\overrightarrow{c}(t) = (1 + \sqrt{2}\ cos(t), \sqrt{2}\ sen(t))$ tenemos

$$\overrightarrow{c}(0) = \overrightarrow{c}(2\pi) = (1 + \sqrt{2},0) \ \text{ y } \ \overrightarrow{c}(\pi) = (1 - \sqrt{2},0).$$

Luego tenemos cuatro posibles puntos críticos donde la función alcanzará sus extremos absolutos:

$$P_1 = (0,0) \quad P_2 = (4/3,0)$$
$$P_3 = (1+\sqrt{2},0) \quad P_4 = (1-\sqrt{2},0).$$

Evaluando obtenemos

$$f(P_1) = 0 \qquad f(P_2) = -\frac{32}{27} \approx -1{,}18$$
$$f(P_3) = 1+\sqrt{2} \quad f(P_4) = 1-\sqrt{2}.$$

Entonces el máximo absoluto de $f$ se alcanza en $P_3 = (1+\sqrt{2},0)$ y vale $f(P_3) = 1+\sqrt{2}$ y el mínimo absoluto en $P_2 = (4/3,0)$ y vale $f(P_2) = -\frac{32}{27}$.

*Segunda observación. Los valores máximo y mínimo de la función* $cos(t)$ *con* $t \in [0,2\pi]$ *son* $1$ *y* $-1$ *respectivamente. El primero se alcanza en* $t = 0$ *y* $t = 2\pi$ *mientras que el segundo se alcanza en*

$t = \pi$. *De esto deducimos sin necesidad de derivar que el valor máximo de la función* $g(t) = 1 + \sqrt{2}cos(t)$ *es* $g(0) = g(2\pi) = 1 + \sqrt{2}$ *y el mínimo es* $g(\pi) = 1 - \sqrt{2}$.

Ver video on-line

Ejercicio 5.

Sea $f: R^2 \rightarrow R : f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$. Analice si $f$ admite derivada parcial de primer orden respecto de $x$ en todo punto de su dominio.

Solución.

Evidentemente el dominio de $f$ es $D_f = R^2$.

Calculando tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + y^4}} \qquad \text{si} \qquad (x, y) \neq (0,0).$$

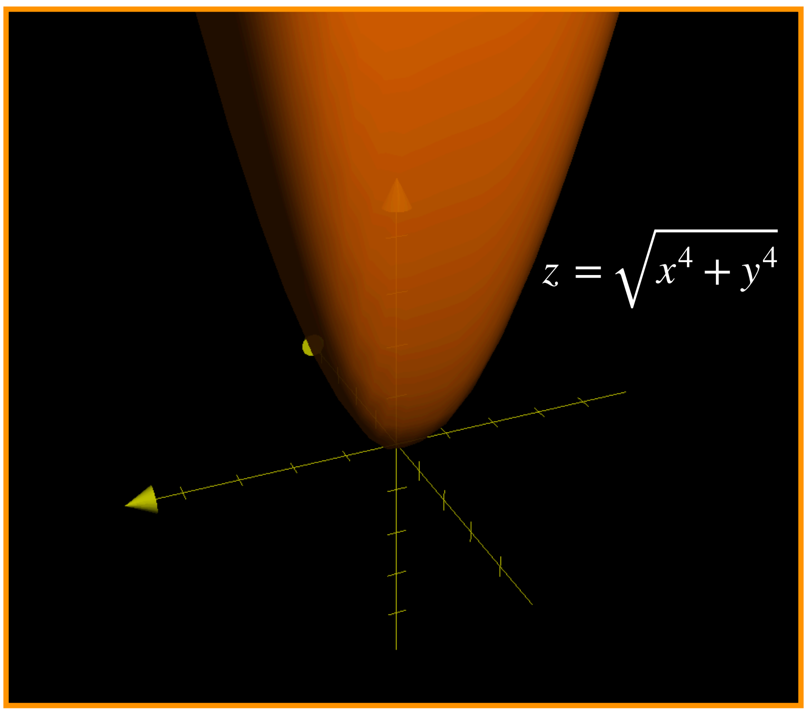
Si $(x, y) = (0,0)$ debemos usar la definición de derivada parcial. Tenemos que, si el límite existe y es finito,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$




Ver video on-line

Ejercicio 6.

Dada la curva $C$ definida como la intersección de las superficies $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$ cuyas ecuaciones son

$$\Sigma_1 : z = x^2 + y + 1 \quad \text{con} \quad (x, y) \in R^2$$

$$\Sigma_2 : \overrightarrow{X} = (u, u^2, v) \quad \text{con} \quad (u, v) \in R^2.$$

Analice si la recta tangente a $C$ en $(2, y_0, z_0)$ tiene algún punto en común con el plano $xz$.

Solución.

De la definición de $\Sigma_2$ obtenemos que sus puntos satisfacen la condición $y = x^2$, $z = v$ con $v \in R$, es decir $z \in R$ .

La curva $C$ se puede definir entonces por el sistema de ecuaciones cartesianas

$$\begin{cases} x^2 + y + 1 - z = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}.$$

Del sistema que define a la curva $C$ deducimos entonces que $(2,y_0,z_0) = (2,4,9)$.

Definamos ahora las funciones $F, G \in C^{\infty}(R^2)$ siguientes:

$$F(x,y,z) = x^2 + y + 1 - z \qquad \text{y} \qquad G(x,y,z) = x^2 - y.$$

Un vector tangente a $C$ en el punto $(2,4,9)$ es entonces

$$\nabla F\ (2,4,9)\ \times\ \nabla G\ (2,4,9).$$

Calculando vemos que

$$\nabla F(x,y,z) = (2x,1,-1) \quad \text{y} \quad \nabla G(x,y,z) = (2x,-1,0)$$

y evaluando en $(2,4,9)$ tenemos

$$\nabla F(2,4,9) = (4,1,-1) \qquad \text{y} \qquad \nabla G(2,4,9) = (4,-1,0).$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\nabla F(2,4,9) \times \nabla G(2,4,9) = (-1, -4, -8).$$

Este vector permite dirigir la recta tangente a la curva. El método que hemos hallado es válido pues el punto $(2,4,9)$ pertenece a ambas superficies $\nabla F(x, y, z)$ y $\nabla G(x, y, z)$ son funciones continuas en un entorno del punto $(2,4,9)$ y el producto vectorial $\nabla F(2,4,9) \times \nabla G(2,4,9) = (-1, -4, -8)$ resultó no nulo.

Luego, una ecuación para la recta tangente a $C$ en el punto $(2,4,9)$ es

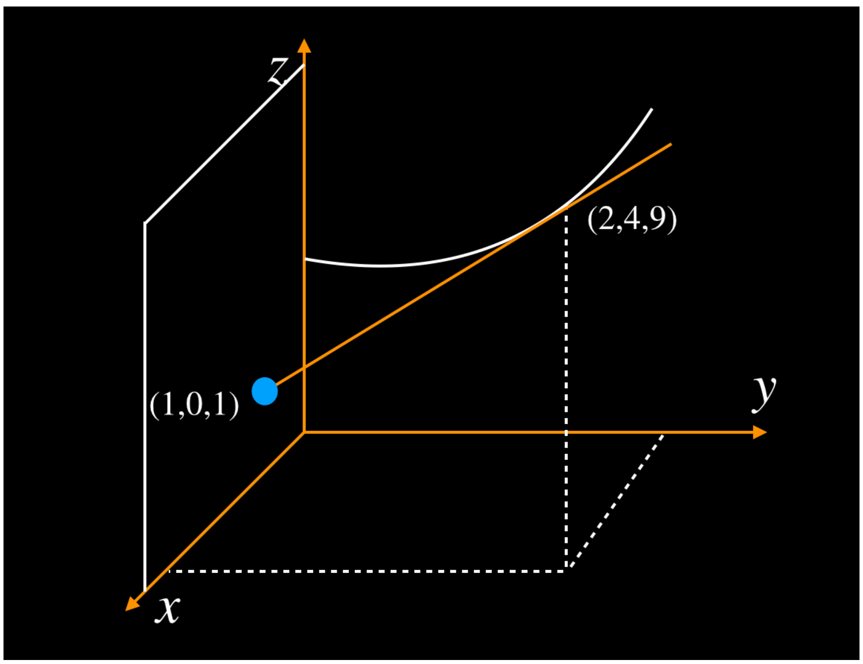
$$\vec{r}(t) = (2,4,9) + t(-1, -4, -8) \qquad \forall t \in R.$$

Si esta recta va a intersecar al plano $xz$ cuyos puntos son del tipo $(x_0, 0, z_0)$ su segunda componente debe ser $0$, es decir

$$4 - 4t = 0 \Longrightarrow t = 1.$$

Por lo tanto, el punto de intersección en el que la recta tangente en el punto $(2,4,9)$ a la curva intersección de las superficies dadas es común con el plano $xz$ es el punto

$$\vec{r}(1) = (1,0,1).$$




Ver video on-line

Ejercicio 7.

Sabiendo que $h(x,y) = f(\overrightarrow{g}(x,y))$ admite la aproximación lineal $h(x,y) \approx 3x + 2y - 1$ en un entorno de $(1,2)$ y que $\overrightarrow{g}(x,y) = (x^2 - y,\ 2xy)$, $f \in C^1$ calcule la máxima derivada direccional de $f$ en el punto $(-1,4)$ e indique en qué dirección se produce dicha derivada.

Solución.

Sea $p(x,y) = 3x + 2y - 1$ el polinomio de Taylor de primer orden de $h(x,y)$ en un entorno de $(1,2)$. Entonces

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,2) = \frac{\partial p}{\partial x}(1,2) = 3 \text{ y } \quad \frac{\partial h}{\partial y}(1,2) = \frac{\partial p}{\partial y}(1,2) = 2.$$

De aquí obtenemos que la matriz Jacobiana

$$Dh(1,2) = (3\ \ 2).$$

Como las funciones involucradas $f, \overrightarrow{g} \in C^1$ concluimos que la función $h = (f \circ \overrightarrow{g}) \in C^1$ y entonces aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$Dh(1,2) = Df(\overrightarrow{g}(1,2))\ D\overrightarrow{g}(1,2).$$

Calculando vemos que $\overrightarrow{g}(1,2) = (-1,4)$ y entonces

$$Dh(1,2) = Df(-1,4))\ D\overrightarrow{g}(1,2).$$

La matriz Jacobiana

$$D\overrightarrow{g}(x,y) = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

donde hemos llamado

$$u(x,y) = x^2 - y \qquad v(x,y) = 2xy$$

da, evaluada en $(1,2)$ la matriz

$$D\overrightarrow{g}(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Llamando entonces a la matriz Jacobiana de $f$ en el punto $(-1,4)$

$$Df(-1,4) = (\alpha \quad \beta)$$

obtenemos entonces el sistema lineal

$$(3 \quad 2) = (\alpha \quad \beta) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{cases} 2\,\alpha + 4\,\beta = 3 \\ -\,\alpha + \ \beta = 2 \end{cases}$$

que produce el resultado

$$\nabla f(-1,4) = (\alpha, \beta) = (-5/6,\ 7/6).$$

Luego, por ser $f$ diferenciable, la derivada direccional máxima de $f$ en el punto $(-1,4)$ se produce en la dirección del vector

$$\nabla f(-1,4) = (-5/6,\ 7/6)$$

es decir, normalizando, en la dirección del versor

$$\left(\frac{-5}{\sqrt{74}}, \frac{7}{\sqrt{74}}\right)$$

y vale

$$\| \nabla f(-1,4) \| = \sqrt{\frac{74}{36}}.$$

Ver video on-line