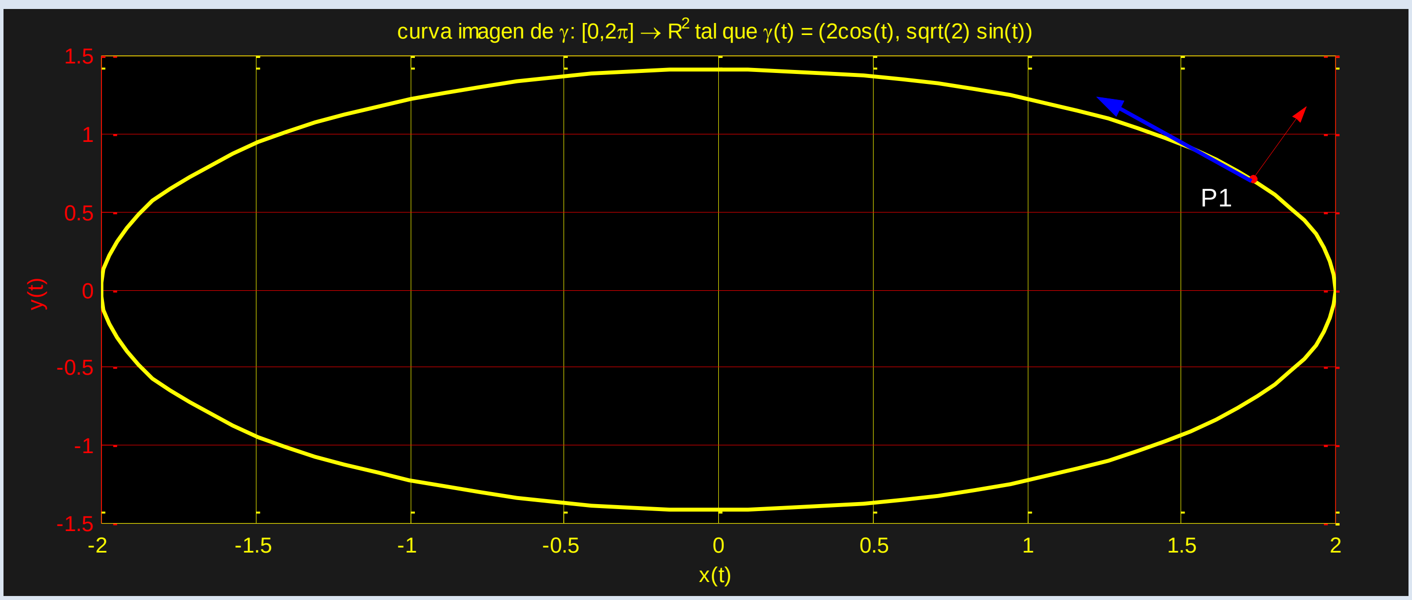
Ejercicio 1. Para el campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} 3x^2 - y^2 \; si \; y - x \geq 0 \\ -x \quad\quad si \; y - x < 0 \end{cases}$ se pide: (a) determinar la continuidad de f en $P_0 = (1, 1)$; (b) Describir en coordenadas polares el conjunto de nivel cero de f, esto es $C_0(f)$.

(a) El valor que toma f en P_0 es $f(P_0) = 3\,(1)^2 - (1)^2 = 2$. El punto P_0 es de acumulación de la región $H_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\text{: } y - x \geq 0\}$ y de la región $H_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\text{: } y - x < 0\}$. De este modo, todo entorno reducido $E^*(P_0)$ comprende puntos de H_1 y puntos de H_2, de manera que $\forall(x, y) \in E^*(P_0) \cap H_1$ es $\lim_{(x,y)\to P_0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to P_0} 3x^2 - y^\wedge 2 = 2$, mientras que $\forall(x, y) \in E^*(P_0) \cap H_2$ es $\lim_{(x,y)\to P_0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to P_0} -x = -1$. De esta manera, se concluye que el límite del campo escalar f cuando $P \to P_0$ no existe (se supone sabida la unicidad del límite). Luego, la función f tiene una discontinuidad esencial en el punto P_0[1].

(b) Como por definición es $C_0(f) = \{(x, y) \in H_1\text{: } \sqrt{3}\,|x| = |y|\} \cup \{(x, y) \in H_2\text{: } x = 0\}$, resulta claro que se trata de tres rayos que parten del origen de coordenadas con argumentos $\pi/3$, $2\pi/3$, $3\pi/2$. En coordenadas polares (r, θ) (tomando la determinación del argumento $\theta \in [0, 2\pi)$) el conjunto de nivel cero del campo escalar f es $C_0(f) = \{(r, \theta)\text{: } r \in \mathbb{R}_0^+,\ \theta = \pi/3 \vee \theta = 2\pi/3 \vee \theta = 3\pi/2\}$.

Ejercicio 2. Sean los campos escalares $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \exp(y^2) + \cos(x+y)$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = x^2 + 2y^2$, y el punto $P_0 = (\pi/2, 0)$. Obtener $D\,f\,(P_0, \overline{v})$, siendo $\overline{v}$ un versor tangente al conjunto de nivel 4 de g (esto es $C_4(g)$) en el punto $P_1 = (\sqrt{3}, \sqrt{2}/2)$.

Es claro que el campo escalar f es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dado que es la composición de funciones polinómicas con exponencial y coseno, todas de la misma clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$; también g, que es un polinomio, es obviamente $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Luego el gradiente del campo escalar g en el punto P_1 debe ser normal al conjunto de nivel que acierta a pasar por P_1, esto es $C_k(g)$, con $k = g(P_1) = 4$, de modo que $\overline{\nabla} g(P_1) \perp C_4(g)$, y entonces puede obtenerse $\overline{v}$ como cualquier versor ortogonal al vector $\overline{\nabla} g(P_1)$; como $\overline{\nabla} g(x, y) = (2x, 4y)$, es $\overline{\nabla} g(P_1) = (2\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ y entonces puede tomarse[2] $\overline{v} = (-\sqrt{2}/\sqrt{5}, \sqrt{3}/\sqrt{5})$. Para la derivada direccional vale la expresión $D\,f\,(P_0, \overline{v}) = \overline{\nabla} f(P_0) \cdot \overline{v}$ (puesto que f es diferenciable en P_0, al ser $C^\infty(\mathbb{R}^2)$). Como $f_x(x, y) = -\sin(x+y)$, $f_y(x, y) = 2y \exp(y^2) - \sin(x+y)$, queda $\overline{\nabla} f(P_0) = (-1, -1)$, de modo que remplazando en la expresión anterior resulta $D\,f\,(P_0, \overline{v}) = (-1, -1) \cdot (-\sqrt{2}/\sqrt{5}, \sqrt{3}/\sqrt{5}) = \sqrt{2}/\sqrt{5} - \sqrt{3}/\sqrt{5}$.



Observación: alternativamente, pudo haberse preferido dar una parametrización regular en P_1 del conjunto de nivel $C_4(g)$, esto es de la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$, la que podría ser $\overline{\gamma}: [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{\gamma}(t) = (2\cos(t), \sqrt{2}\sin(t))$, y observar que $P_1 = \overline{\gamma}(\pi/6)$, de modo que un vector tangente a C en P está dado por $\overline{\gamma}'(\pi/6) = (-2\sin(\pi/6), \sqrt{2}\cos(\pi/6)) = (-1, \sqrt{3}/\sqrt{2})$ y de allí el versor $v = (-\sqrt{2}/\sqrt{5}, \sqrt{3}/\sqrt{5})$. La resolución concluye como antes.

Ejercicio 3. Sea S la superficie parametrizada por el campo vectorial $\overline{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\overline{T}(u, v) = (u + 1, u^2 + v, u + v^2)$. Se pide: (a) hallar la ecuación del plano tangente a S en $P_0 = (0, 1, -1)$; (b) Si C es la curva parametrizada por la función vectorial $\overline{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\overline{\gamma}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{T}(u, 2)$, probar que C está contenida en el plano de ecuación $z - x = 3$.

[1] El ejercicio puede ser profundizado preguntándose por la continuidad de f en todo el espacio $\mathbb{R}^2$, que se recomienda analizar. La conclusión es que resulta ser continua en el interior de H_1, en H_2 y en los puntos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (-½, ½)$.

[2] El otro versor tangente (que correspondería a una orientación opuesta de la elipse que es el conjunto de nivel 4 de g) es el opuesto al elegido.

(a) El campo vectorial $\overline{T}$ es de clase $C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ pues las funciones escalares que tiene por componentes son polinomios. Como el punto P_0 es la imagen a través de $\overline{T}$ del punto $P_1 = (-1, 0)$, esto es $P_0 = \overline{T}(P_1)$, una normal al plano tangente pedido en P_0 se obtiene mediante el producto vectorial fundamental $\overline{N} = \overline{T}_u(P_1) \times \overline{T}_v(P_1)$, suponiendo que los vectores $\overline{T}_u(P_1)$, $\overline{T}_v(P_1)$ sean linealmente independientes (esto es que la superficie S sea regular en P_0). Como $\overline{T}_u(u, v) = (1, 2u, 1)$, $\overline{T}_v(u, v) = (0, 1, 2v)$, se tiene que $\overline{T}_u(P_1) = (1, -2, 1)$, $\overline{T}_v(P_1) = (0, 1, 0)$, de modo que $\overline{N} = (-1, 0, 1)$, y por lo tanto la ecuación vectorial del plano tangente a S en P_0 es $(X - P_0) \cdot \overline{N} = 0$, esto es $(x, y - 1, z + 1) \cdot (-1, 0, 1) = 0$, lo que produce la ecuación cartesiana del plano pedido como $-x + z + 1 = 0$.
(b) La curva $\overline{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\overline{\gamma}(u) \overset{\text{def}}{=} \overline{T}(u, 2) = (u + 1, u^2 + 2, u + 4)$ es plana, pues $z = u + 4$, $x = u + 1$ verifican, para todo u, la ecuación $z - x = 3$.

Ejercicio 4. Se sabe que en un entorno del punto $P_0 = (1, -1, 1)$ la ecuación $e^{z+y} + x z^2 = 2$ define implícitamente el campo escalar z en función de x e y, esto es $z = g(x, y)$. Dado $P_1 = (0.99, -1.02)$, estimar $g(P_1)$ mediante una aproximación lineal.

Definiendo el campo escalar de clase $C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ dado por $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = e^{z+y} + x z^2 - 2$ se observa que $f(P_0) = 0$, y siendo $f_x(x, y, z) = z^2$, $f_y(x, y, z) = e^{z+y}$, $f_z(x, y, z) = e^{z+y} + 2xz$, es $f_x(P_0) = 1$, $f_y(P_0) = 1$, $f_z(P_0) = 3 \neq 0$, de modo que, por el teorema de la función implícita, efectivamente existe un (único) campo escalar g definido en un entorno del punto $P_2 = (1, -1)$, esto es $g: E(P_2) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $z = g(x, y)$ es $C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, y para todo punto de un entorno de P_0 satisface $f(x, y, g(x, y)) = 0$, $1 = g(P_2)$, y sus dos derivadas parciales se calculan como $g_x(P_2) = -f_x(P_0) / f_z(P_0) = -1/3$, $g_y(P_2) = -f_y(P_0) / f_z(P_0) = -1/3$. En cuanto a la aproximación lineal pedida, sabemos que $g(P_1) \cong g(P_2) + \overline{\nabla} f(P_2) \cdot (P_1 - P_2) = 1 + (-1/3, -1/3) \cdot (-0.01, -0.02) = 1 + 0.01 = 1.01$.

Ejercicio 5. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de segundo orden en el punto $P_1 = (2, -1)$ es $p(u, v) = 4 - 3u - 2v + u^2 - 2v^2$. Se define el campo escalar $g(x, y) \overset{\text{def}}{=} f(xy + 2, x^2 + 2y^2 - 1)$. Sea $P_0 = (0, 0)$. Se pide: (a) Probar que g tiene un punto estacionario en P_0; (b) Calcular $g_{xx}(P_0)$ y, sabiendo que el determinante de la matriz Hessiana de g en P_0 es positivo, clasificar el punto estacionario P_0.

(a) Del campo escalar f se sabe (por definición del polinomio p de Taylor de orden 2 de f en el punto P_1) que $f(P_1) = p(P_1) = 2$, $f_u(P_1) = p_u(P_1) = 1$, $f_v(P_1) = p_v(P_1) = 2$, $f_{uu}(P_1) = p_{uu}(P_1) = 2$, $f_{uv}(P_1) = p_{uv}(P_1) = 0$, $f_{vv}(P_1) = p_{vv}(P_1) = 4$. En cuanto a la función $g = f \circ \overline{h}$ se sabe que es $C^3(\mathbb{R}^2)$, pues es la composición de f que es $C^3(\mathbb{R}^2)$ con un campo vectorial vectorial $\overline{h}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{h}(x, y) = (xy + 2, x^2 + 2y^2 - 1)$ que es $C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$; además, se observa que $P_1 = \overline{h}(P_0)$, y por lo tanto $g(P_0) = f(\overline{h}(P_0)) = f(P_1)$. Las funciones derivadas parciales de la función compuesta g en el punto P_0 son todos campos escalares de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos como $g_x(x,y) = f_u(\overline{h}(x, y))\, y + f_v(\overline{h}(x, y))\,(2x)$, $g_y(x,y) = f_u(\overline{h}(x, y))\, x + f_v(\overline{h}(x, y))\,(4y)$, de modo que $g_x(P_0) = f_u(P_1)\,(0) + f_v(P_1)\,(0) = 0$, $g_y(P_0) = f_u(P_1)\,(0) + f_v(P_1)\,(0) = 0$. De este modo, queda probado que $g_x(P_0) = g_y(P_0) = 0$, de modo que P_0 es un punto estacionario del campo escalar g.
(b) Ahora se puede obtener el campo escalar $g_{xx}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g_{xx}(x, y) = [f_{uu}(\overline{h}(x, y))\, y + f_{uv}(\overline{h}(x, y))\,(2x)]\, y + [f_{vu}(\overline{h}(x, y))\, y + f_{vv}(\overline{h}(x, y))\,(2x)]\,(2x) + f_v(\overline{h}(x, y))\,(2)$, de modo que en $P_0 = (0, 0)$ es $g_{xx}(P_0) = [f_{uu}(P_1)\,(0) + f_{uv}(P_1)\,(0)]\,(0) + [f_{vu}(P_1)\,(0) + f_{vv}(P_1)\,(0)]\,(0) + 2\, f_v(P_1) = (2)\,(2) = 4$. Como la matriz hessiana del campo g en P_0 tiene un determinante positivo, y es $g_{xx}(P_0) > 0$, resulta que la matriz es definida positiva, de donde puede decirse que en P_0 el campo escalar g alcanza un mínimo local, de valor $g(P_0) = f(P_1) = 2$.

Observaciones (podrían no ser inútiles)

Definitud y especificidad: el indefinido 'un'. El concepto de definitud se distingue, gramaticalmente, del de especificidad, y la distinción de la primera dimensión se introduce en la lengua mediante los artículos. Pero si bien un artículo definido como 'el' se opone a un indefinido como 'un' en la propiedad de definitud, esa oposición no se extiende a la especificidad (puede verse la diferencia entre ambos en la Nueva Gramática de la lengua española 14.1. 1c). En el enunciado del ejercicio 2 se habla de 'un versor tangente a...': algunos alumnos escribieron en su examen que había dos, lo que es verdad, pero no constituye una objeción. El indefinido 'un' ha perdido –hace ya mucho tiempo– la cardinalidad que tenía en el latín (*unu* de *unum* como acusativo de *unus*). Por eso mismo el enunciado dice 'un' (indefinido) y no 'el' (definido), sin perder la capacidad de especificidad. 'El profesor universitario de tres años de edad' denota una entidad definida (e inexistente). 'Un vector tangente a la curva' denota un individuo específico (existente, que debe seleccionarse –libremente– entre dos).

Los argumentos de las funciones. Cuando se escribe f: A -> B tal que f(x) = x + 2, se indican los tres elementos de la terna ordenada que constituye una función. La letra x indica el argumento de la función f, que recoge valores del conjunto A y los devuelve en el conjunto B, tras procesar ese argumento (o señal de entrada) para devolver en B la salida x + 2 (suponiendo que los elementos de A admiten el proceso 'sumarle 2', y que el proceso 'sumar 2' es conocido). El argumento x no es opcional, no es algo que pueda omitirse si se quiere indicar el modo en que los valores de entrada son convertidos por la función f en una salida.

Cuando, en cambio, se escribe solamente f, se sobrentiende que es una terna ordenada (A, B, f) que define una relación particular entre A y B (o, si se quiere hablar el lenguaje de conjuntos en A x B) que satisface cierta condición (todo elemento de A tiene asignado a través de f un único elemento en B). Finalmente, por f(3) se entiende el elemento que ha resultado de procesar el número 3 con la función f (resultando la salida 5). Las tres cosas, entonces, son bien diversas y distinguirlas es un requisito previo para que la expresión tenga sentido para un lector. Omitirlas no solo deja al que lee en la oscuridad: declara que el que escribe no percibe diferencia alguna entre un proceso, un estímulo y una respuesta, ladrillo de cualquier balbuceo en la ingeniería. Una viga, por poner un ejemplo de la ingeniería civil, puede ser pensada de muchas formas, pero todas tienen en común que 'funcionan'. Así, puede pensarse como una función que recibe como argumentos cargas (su propio peso, una carga de sismo, un impacto, una carga móvil...) y que las procesa para devolver reacciones en sus apoyos. La viga en acción se describe como R = V(C), donde C es un argumento vectorial (las cargas) y R es también un argumento vectorial (fuerzas, cuplas...) constituido por las reacciones que son originadas (a través de la viga) por las cargas de entrada. Omitir aquí las cargas es tan inadmisible como omitirlas en el Cálculo: quien le pidiese a un ingeniero civil que dimensionara los apoyos de una viga sin indicarle las cargas a las que estará sometida sabría tanto de estructuras como un alumno de análisis matemático que pretende que se le entienda su escritura sin argumentos. Nuevamente, debe distinguirse entre la función a secas (en el ejemplo la viga conceptual) y la respuesta f(x), en el ejemplo las reacciones V(C). Una persona que no distinga entre una viga, su peso, y las reacciones que origina no puede participar de la comunidad de sentido construida por la ingeniería civil. También es fácil extender el ejemplo para que la salida de la función V incluya sus solicitaciones (flexión, corte...), sus deformaciones (elástica, rotaciones...). Puede verse así un campo vectorial que devuelve características que es necesario controlar ante acciones externas que se quieren absorber (y en esto consiste el diseño de la viga: es el diseño de esa función). Los argumentos son elementos de los que no se puede prescindir tampoco en el habla cotidiana que, no menos que la matemática, obedece a una gramática, y reconoce diversos tipos de argumentos (para las diversas funciones gramaticales). En nuestra lengua se reconocen argumentos obligatorios, del mismo modo que los de las funciones en matemática (cuando se quieren dotar de significado saturado). Puede pensarse en el complemento argumental del vocablo 'oriundo', que no adquiere significado sino cuando se dice de dónde es oriundo: es así que se tiene que 'catamarqueño' es el valor que devuelve la función 'oriundo' cuando recibe el argumento Catamarca, de modo que todos podemos entender catamarqueño = oriundo (de Catamarca). Escuchar a una persona decir que fulano es oriundo (¡sin argumentos!) bastaría para declarar que ignora la lengua (es lo que da lugar a expresiones agramaticales, que no pertenecen a la lengua: por ejemplo, 'el oriundo desde proveyó rayano'). En matemática, la impresión es la misma, basta leer un par de líneas para estimar la (in)competencia del escritor, si escribe expresiones que no pertenecen a la matemática. El cálculo vectorial con un buen lenguaje es ya arduo; sin este lenguaje, se torna imposible. El siguiente fragmento: Cad e ecibe f: A -> B al e f() = + 2, e idica l e eleme de la ea es la misma frase del primer párrafo de este escrito, de la que se han omitido (arbitrariamente) todos los caracteres de código ascii superior a 110. Desde luego, ya no es una frase. Lo mismo sucede con las expresiones matemáticas: las omisiones arbitrarias las convierten es expresiones no matemáticas. Antes de estar bien o mal, han de tener un sentido que permita juzgarlas.

Lectura de fragmentos. Los siguientes fragmentos de texto se refieren a nociones que intervienen en la resolución de esta evaluación; todos pertenecen a reconocidos libros de nivel universitario: leerlos habría de ser un ejercicio placentero para un estudiante de ingeniería. En esa esperanza se transcriben.

THEOREM 6: Second Derivative Maximum-Minimum Test for Functions of Two Variables Let $f(x, y)$ be of class C^3 on an open set U in $\mathbb{R}^2$. A point (x_0, y_0) is a (strict) local minimum of f provided the following three conditions hold:

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

(ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$

(iii) $D = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0$ at (x_0, y_0)

(D is called the ***discriminant*** of the Hessian.) If in (ii) we have <0 instead of >0 and condition (iii) is unchanged, then we have a (strict) local maximum.

Tomado de (Marsden y Tromba 2003, 216)

Directional derivatives

Suppose $f : X \to F$, $x_0 \in X$ and $v \in E \setminus \{0\}$. Because X is open, there is an $\varepsilon > 0$ such that $x_0 + tv \in X$ for $|t| < \varepsilon$. Therefore the function

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \to F\ , \quad t \mapsto f(x_0 + tv)$$

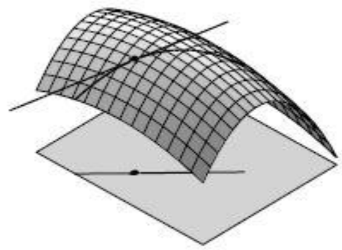
is well defined. When this function is differentiable at the point 0, we call its derivative the **directional derivative** of f at the point x_0 in the direction v and denote it by $D_v f(x_0)$. Thus

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}\ .$$

2.4 Remark The function

$$f_{v,x_0} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to F\ , \quad t \mapsto f(x_0 + tv)$$

can be viewed as a "curve" in $E \times F$, which lies "on the graph of f". Then $D_v f(x_0)$ represents for $\|v\| = 1$ the slope of the tangent to this curve at the point $(x_0, f(x_0))$ (see Remark IV.1.4(a)). ■



De Amann y Escher 2008, 152

5. Descartes : courbes géométriques et fonctions algébriques

L'objectif principal de Descartes, exposé dans sa *Géométrie* de 1637, est de réduire la solution de tous les problèmes algébriques, qui sont des problèmes de résolution d'équations, à quelques procédures standards pour construire leurs racines réelles, qui seront les coordonnées des points d'intersection de courbes planes appropriées, de degré le plus bas possible.

Descartes distingue courbes géométriques et courbes mécaniques et se restreint aux *« courbes géométriques »*, celles où les deux coordonnées x et y sont reliées par une équation algébrique $P(x, y) = 0$ (qu'on appelle aujourd'hui courbes algébriques).

A leur propos, Descartes écrit : *« Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne* y, *on en trouvera aussi pour la ligne* x, *et ainsi on aura une infinité de points tels que celui qui est marqué* C, *par le moyen desquels on décrit la ligne courbe demandée. »* (*La Géométrie*.)

Fragmento de Dahan y Pfeiffer 1986, 102

Plane curves of the form $y = f(x)$ admit generalizations to two distinct, yet overlapping, classes of plane curves. These are as follows.

1. **Parametrically Defined Curves**: These are the plane curves C given by $(x(t), y(t))$, where x, y are real-valued functions[2] defined on some subset D of $\mathbb{R}$, and the parameter t varies over the points of D. Usually, we express this by simply saying that C is the (parametrically defined) curve $(x(t), y(t))$, $t \in D$. For example, the rectangular hyperbola is the curve $(t, 1/t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. **Implicitly Defined Curves**: These are the plane curves C given by an equation of the form $F(x, y) = 0$, where F is a real-valued function defined on some subset E of the plane $\mathbb{R}^2$, and (x, y) vary over the points of E. Usually, we express this by simply saying that C is the (implicitly defined) curve $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in E$. The reference to the domain E of F is skipped if $E = \mathbb{R}^2$. For example, the circle centered at the origin with unit radius is the curve $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Ghorphade 2006

Teorema 3.4.2 (De la Función Implícita. Segunda versión). Considere la función $z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$. Sea $\mathbf{p} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un punto tal que $F(\mathbf{p}) = 0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ continuas en alguna bola B con centro en $\mathbf{p}$ y que $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p}) \neq 0$. Entonces $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ puede resolverse para y en términos de x y definir así una vecindad V (de $\mathbb{R}^n$) del punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, una función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la cual tiene derivadas parciales continuas en V que se pueden calcular con las fórmulas

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)} \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V \qquad \blacksquare$$

Pita Ruiz 2001, 289

Referencias

Aman, Herbert, y Joachim Escher. *Analysis II*. Primera. Traducido por Silvio Levy y Matthew Cargo. Berlín: Birkhäuser, 2008.

Dahan-Dalmedico, Amy, y Jean Pfeiffer. *Une histoire des mathématiques. Routes y dédales.* Segunda. Paris: Seuil, 1986.

Ghorphade, Sudhir, y Balmohan Limaye. *A Course of Calculus and Analysis Real. With 71 figures.* Primera edicón. New York: Springer, 2006.

Marsden, Jerrold, y Anthony Tromba. *Vector Calculus.* Quinta edición. New York: Freeman and Company, 2003.

φα