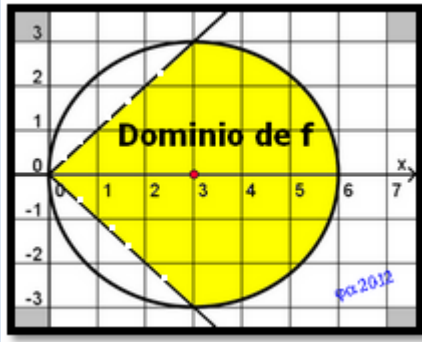




Ejercicio 1. Para el campo escalar $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{6x - x^2 - y^2} \ln(|x| - |y|)$ se pide determinar su dominio D_f , graficarlo y expresarlo en coordenadas polares.



Se tiene que $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| - |y| > 0, 6x - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| > |y|, (x-3)^2 + y^2 \leq 9\}$, lo que en coordenadas polares (r, θ) (tomando la determinación del argumento $\theta \in (-\pi, \pi]$) equivale a $D_f = \{(r, \theta): 0 < r \leq 6 \cos(\theta), -\pi/4 < \theta < \pi/4\}$.

Este ejercicio se tornaría más difícil si preguntara por aquella región en que el campo mantiene signo constante (por ejemplo, negativo); ¿se atreve a hacerlo?

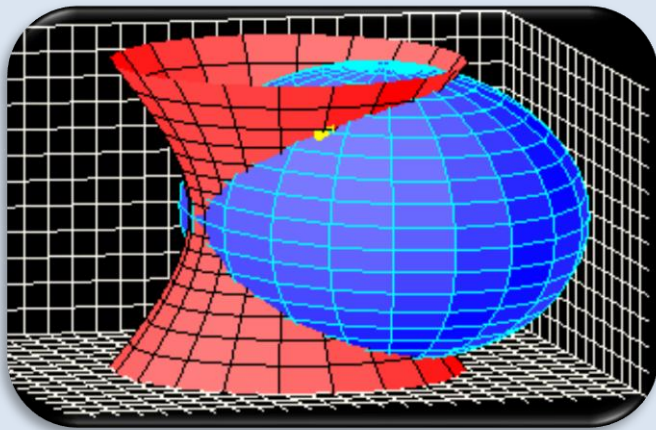
Ejercicio 2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar $C^1(\mathbb{R}^2)$ y el campo escalar $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} f(-3u+3v, u^2 + v^2)$. Si la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $A = (0, 2, f(0, 2))$ es $4x + 2y + 2z = 0$, hallar todas las direcciones para las cuales la derivada direccional de h en $P_0 = (1, 1)$ es nula.

El campo escalar $h = f \circ \bar{g}$ es la composición de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $\bar{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{g}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} (-3u+3v, u^2 + v^2)$, y siendo \bar{g} de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ (dado que sus componentes son funciones polinómicas) y f de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ (por hipótesis), resulta que h es $C^1(\mathbb{R}^2)$, de modo que se aplica la regla de la cadena y entonces $J_h(P_0) = J_f(\bar{g}(P_0)) J_{\bar{g}}(P_0)$ y como $\bar{g}(P_0) = (0, 2)$, la anterior expresión queda $J_h(1, 1) = J_f(0, 2) J_{\bar{g}}(1, 1)$. De la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en A (esto es $z = -2x - y$) resulta inmediato que $J_f(0, 2) = (-2 \ -1)$, y como $J_{\bar{g}}(u, v) = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$, $J_{\bar{g}}(1, 1) = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, de modo que $J_h(1, 1) = J_f(0, 2) J_{\bar{g}}(1, 1) = (4 \ -8)$, o en la notación vectorial $\bar{\nabla}h(P_0) = (4, -8)$. Dado que h es diferenciable en P_0 (pues es $C^1(\mathbb{R}^2)$ y por lo tanto diferenciable en \mathbb{R}^2 , en particular en P_0), la derivada direccional viene dada por $D_h(P_0, \vec{v}) = \bar{\nabla}h(P_0) \cdot \vec{v}$, de donde es nula en cualquier dirección ortogonal al vector $\bar{\nabla}h(P_0)$, lo que sucede según los versores $\vec{v} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}(2, 1)$.



Ejercicio 3. Sea S_1 la superficie definida por la ecuación $x^2 - 2x + 2y^2 - z^2 = 0$ y S_2 la superficie parametrizada por el campo vectorial $\bar{X}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{X}(u, v) = (2 \cos(u) \sin(v), 2 \sin(u) \sin(v), \sqrt{2} \cos(v))$ con $u \in (0, 2\pi), v \in (0, \pi)$; probar que S_1 y S_2 se intersecan ortogonalmente en el punto $P_0 = (1, 1, 1)$.

La superficie S_1 es el conjunto de nivel $k_1 = 0$ del campo escalar $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_1(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - 2x + 2y^2 - z^2$, mientras que la superficie S_2 que tiene por ecuación (verificarlo, basta efectuar la operación con las componentes de \bar{X}) $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ es el conjunto de nivel $k_2 = 4$ del campo escalar $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_2(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + 2z^2$, y es claro que $P_0 \in S_1$ pues satisface $f_1(P_0) = 0$, y que $P_0 \in S_2$ pues es $P_0 = \bar{X}(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$. Como tanto f_1 como f_2 son diferenciables en P_0 (son mucho más, ambas son de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$), la ortogonalidad de S_1 y S_2 en P_0 se reduce a verificar que $\bar{\nabla}f_1(P_0) \cdot \bar{\nabla}f_2(P_0) = 0$. Pero como $\bar{\nabla}f_1(x, y, z) = (2x-2, 4y, -2z)$ mientras que $\bar{\nabla}f_2(x, y, z) = (2x, 2y, 4z)$, es $\bar{\nabla}f_1(P_0) \cdot \bar{\nabla}f_2(P_0) = (0, 4, -2) \cdot (2, 2, 4) = 0$.



Tal vez ayude añadir a la resolución anterior alguna reflexión acerca de los objetos geométricos que se intersecan: S_1 es un hiperboloide de una hoja [lo que se ve rescribiendo la ecuación como $(x-1)^2 + 2y^2 - z^2 = 1$] con eje de simetría vertical pasando por el punto $(1, 0, 0)$ y la elipse de garganta de ecuación $(x-1)^2 + 2y^2 = 1, z = 0$; S_2 es un elipsoide de revolución entrado en el origen de semiejes $a = b = 2, c = \sqrt{2}$. En la figura se observan las dos superficies y se ha señalado en amarillo el punto P_0 donde puede visualizarse la ortogonalidad. Un ejercicio algo más difícil que el planteado podría indagar por todos los puntos de la intersección entre ambas superficies para los cuales se da la condición de perpendicularidad, que se deja propuesto.



Ejercicio 4. El punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (2, 1, -1)$ satisface la ecuación $z e^{z+1} + xy^2 + z = 0$. (a) Probar que la ecuación define implícitamente el campo escalar $z = g(x, y)$ en un entorno de $A_0 = (2, 1)$, con $z_0 = g(A_0)$; (b) Sea C es la curva intersección entre el gráfico de g y el plano de ecuación $x = 2$: determinar la ecuación de la recta tangente a C .

Definiendo el campo escalar de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ dado por $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = z e^{z+1} + xy^2 + z$ se observa que $f(P_0) = 0$, y siendo $f_x(x, y, z) = y^2, f_y(x, y, z) = 2xy, f_z(x, y, z) = (z+1)e^{z+1} + 1$, es $f_x(P_0) = 1, f_y(P_0) = 4, f_z(P_0) = 1 \neq 0$, de modo que, por el teorema de la función implícita, efectivamente existe un (único) campo escalar g definido en un entorno del punto $A_0 = (2, 1)$, esto es $g: E(A_0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $z = g(x, y)$ es $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, y para todo punto de ese entorno de A_0 satisface $f(x, y, g(x, y)) = 0, g(A_0) = -1$ [y sus dos derivadas parciales en A_0 se calculan como $g_x(A_0) = -f_x(P_0) / f_z(P_0) = -1, g_y(A_0) = -f_y(P_0) / f_z(P_0) = -4$]. Para la recta tangente basta pensar su ecuación como $z = z_0 + g_y(A_0)(y - y_0), x = 2$, esto es: $z = -1 - 4(y - 1), x = 2$, o escrito de otra manera: $x = 2, 4y + z = 3$.



Observación: también puede pensarse la recta tangente como intersección del conjunto de nivel 0 de f con el conjunto de nivel 2 de $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x, y, z) = x$, siendo entonces un vector que la dirige $\vec{v} = \vec{\nabla}f(P_0) \times \vec{\nabla}h(P_0) = (1, 4, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, -4)$, siendo entonces la ecuación (ahora vectorial) de la recta $X = P_0 + \lambda \vec{v} = (2, 1, -1) + \lambda (0, 1, -4)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de segundo orden en el punto $P_0 = (2, 1)$ es $p(x, y) = \beta + \alpha x + \alpha y + 8xy + 2x^2 - 6y^2$. Hallar los escalares reales α, β si el conjunto de nivel 0 de f es $C_0(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 - y^2 = 3\}$. En primer lugar se observa que $P_0 \in C_0(f)$ [pues $2^2 - 1 = 3$] y que $\vec{\nabla}f(P_0) = (p_x(P_0), p_y(P_0))$ [pues p y f tienen en común sus derivadas parciales hasta el segundo orden en P_0]; como $p_x(x, y) = \alpha + 8y + 4x, p_y(x, y) = \alpha + 8x - 12y$, queda $\vec{\nabla}f(P_0) = (\alpha + 16, \alpha + 4)$. Como, por otra parte, el campo escalar $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dado por $w(x, y) = x^2 - y^2$ tiene un conjunto de nivel 3 que es el mismo que el conjunto de nivel 0 de f , sus respectivos gradientes en P_0 son proporcionales, de modo que $\vec{\nabla}f(P_0) = \lambda \vec{\nabla}w(P_0) = \lambda(4, -2)$, de modo que, igualando queda $(\alpha + 16, \alpha + 4) = \lambda(4, -2)$, de donde resulta $\alpha = -8$ [y $\lambda = 2$, aunque no estamos interesados en este valor]. Para calcular β , basta tener en cuenta que $f(P_0) = p(P_0) = 0$, esto es $p(P_0) = \beta - 24 + 16 + 8 - 6 = 0$, de donde $\beta = 6$.

El teorema de la función implícita. Entre los muchos conceptos movilizados en esta evaluación, se encuentra el del delicado teorema de la función implícita que puede leerse en cualquiera de los textos de la bibliografía. Se muestran tres fragmentos de sendos libros de texto. El de la izquierda corresponde a (Pita Ruiz 1995), el segundo a (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968), el tercero de (Marsden y Tromba 2003). Los tres fragmentos corresponden a momentos distintos: previos, intermedios y finales.

Teorema 3.4.2 (De la Función Implícita. Segunda versión). Considere la función $z = F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$. Sea $\mathbf{p} = (x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un punto tal que $F(\mathbf{p}) = 0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ continuas en alguna bola B con centro en \mathbf{p} y que $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p}) \neq 0$. Entonces $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ puede resolverse para y en términos de x y definir así una vecindad V (de \mathbb{R}^n) del punto (x_1, x_2, \dots, x_n) , una función $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la cual tiene derivadas parciales continuas en V que se pueden calcular con las fórmulas

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V \quad \blacksquare$$

5. Función implícita de varias variables independientes. Derivadas. Plano tangente. — a) Planteada la ecuación [67-13] $F(x, y, z) = 0$, se dirá que define una función uniforme $z = f(x, y)$ de dos variables independientes en un cierto recinto R , si en \mathcal{E} , se verifica idénticamente en (x, y) : [67-14] $F[x, y, f(x, y)] = 0$. Aun cuando un punto (x_0, y_0, z_0) verifique la ecuación [67-13], es decir, sea $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, esto no querrá decir (véase ejemplo 1) que exista en el entorno del punto (x_0, y_0) una función $f(x, y)$ que verifique [67-14].

The One-Variable Implicit Function Theorem

In one-variable calculus, we learn the importance of the inversion process. For example, $x = \ln y$ is the inverse of $y = e^x$, and $x = \sin^{-1} y$ is the inverse of $y = \sin x$. The inversion process is also important for functions of several variables; for example, the switch between Cartesian and polar coordinates in the plane involves inverting two functions of two variables.

Recall from one-variable calculus that if $y = f(x)$ is a C^1 function and $f'(x_0) \neq 0$, then locally near x_0 we can solve for x to give the inverse function: $x = f^{-1}(y)$. We learn that $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$; that is, $dx/dy = 1/(dy/dx)$. That $y = f(x)$ can be inverted is plausible because $f'(x_0) \neq 0$ means that the slope of $y = f(x)$ is nonzero, so that the graph is rising or falling near x_0 . Thus, if we reflect the graph across the line $y = x$, it is still a graph near (x_0, y_0) where $y_0 = f(x_0)$. For example, in Figure 3.5.1, we can invert $y = f(x)$ in the shaded box, so in this range, $x = f^{-1}(y)$ is defined.

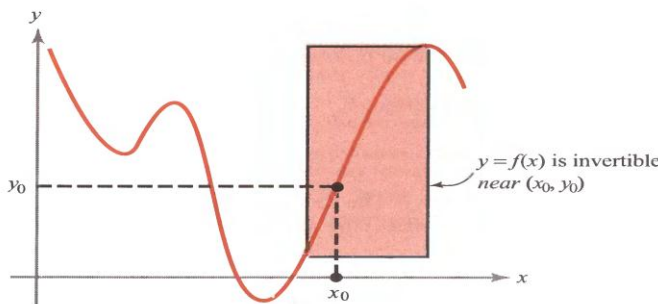


Figure 3.5.1 If $f'(x_0) \neq 0$, then $y = f(x)$ is locally invertible.

Referencias

Marsden, Jerrold, y Anthony Tromba. *Vector Calculus*. Quinta edición. New York: Freeman and Company, 2003.
 Pita Ruiz, Claudio. *Cálculo Vectorial*. Primera edición. Naucalpán de Juárez: Prentice Hall Hispanoamericana, 1995.
 Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César Trejo. *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones*. Séptima edición. Vol. II. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1968.