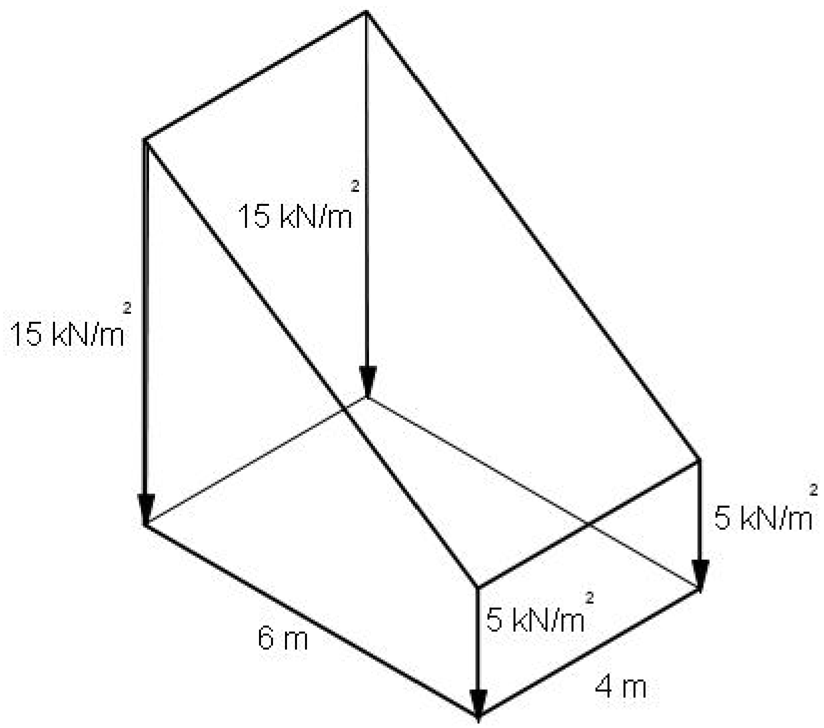
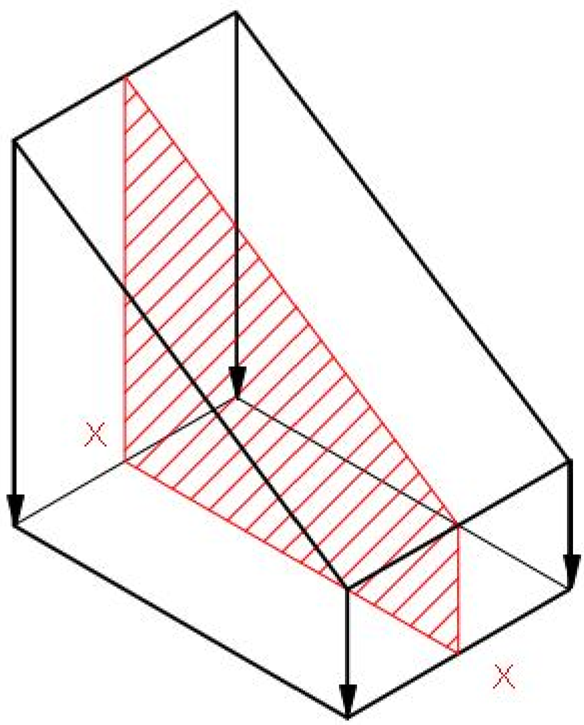
Fuerzas Distribuidas en el Espacio (3D)

Carga distribuida simétrica a lo largo de un eje

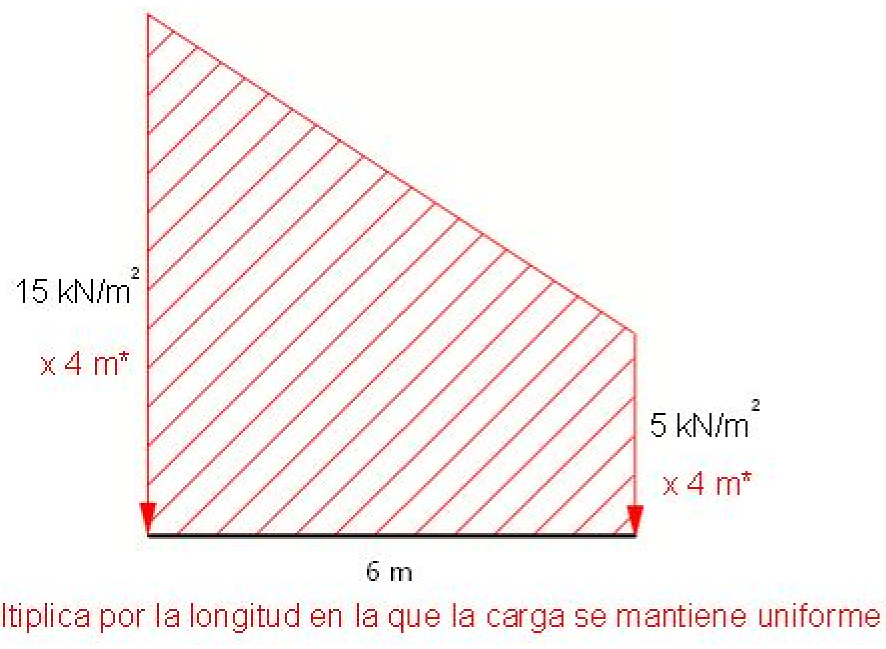
1- Dada el siguiente esquema de carga, se pide hallar la fuerza resultante y el punto de aplicación de la misma.



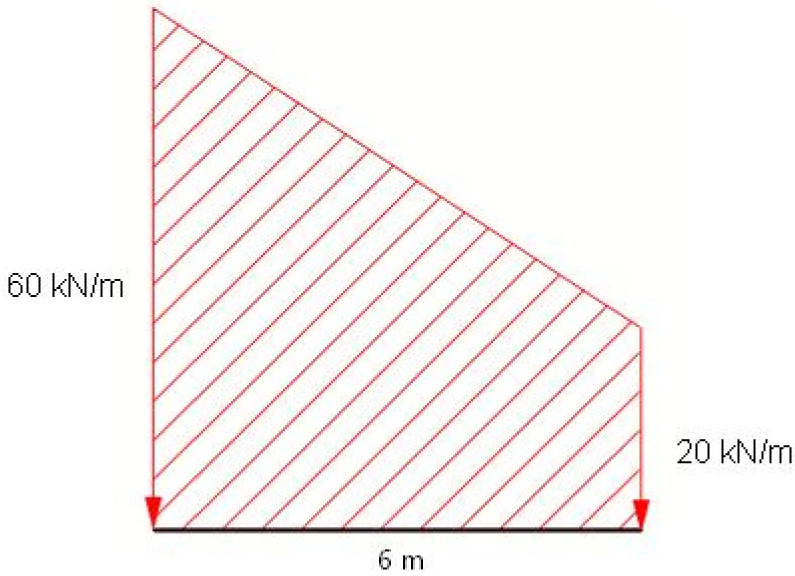
La carga distribuida tiene la forma de un prisma trapezoidal. Como la carga distribuida es uniforme respecto de un eje, la carga distribuida espacial se lo puede analizar en un plano que divide a la carga en dos partes simétricas:



La carga distribuida espacial se puede analizar en el plano X-X de la siguiente forma:

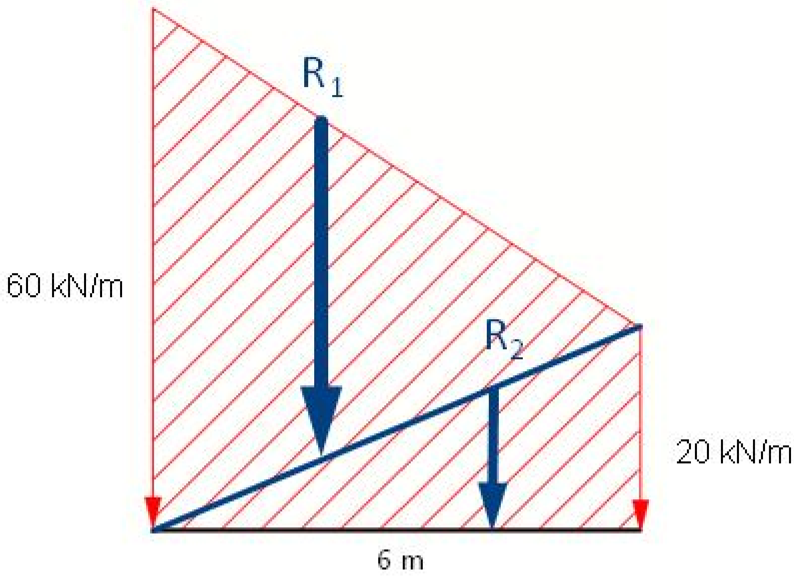


Por lo que la carga distribuida espacial se lo puede analizar como si fuera una carga distribuida con la siguiente distribución:



Como la carga distribuida tiene forma trapezoidal, se analiza la carga como si fuera dos cargas triangulares con los siguientes datos:

$$q_1 := 60\frac{kN}{m} \qquad Long := 6m \qquad q_2 := 20\frac{kN}{m}$$



Se obtiene el valor de la resultante:

$$R_1 := \frac{q_1 \cdot Long}{2} \qquad R_2 := \frac{q_2 \cdot Long}{2}$$

$$R_1 = \frac{60\frac{kN}{m}\cdot 6m}{2} \qquad R_2 = \frac{20\frac{kN}{m}\cdot 6m}{2}$$

$$R_1 = 180\cdot kN \qquad R_2 = 60\cdot kN$$

Calculando la resultante total:

$$R_{tot} := R_1 + R_2$$

$$R_{tot} = 180kN + 60kN$$

$$R_{tot} = 240\cdot kN$$

Se obtiene el punto de aplicación de la resultante, tomando momentos respecto del punto derecho inferior:

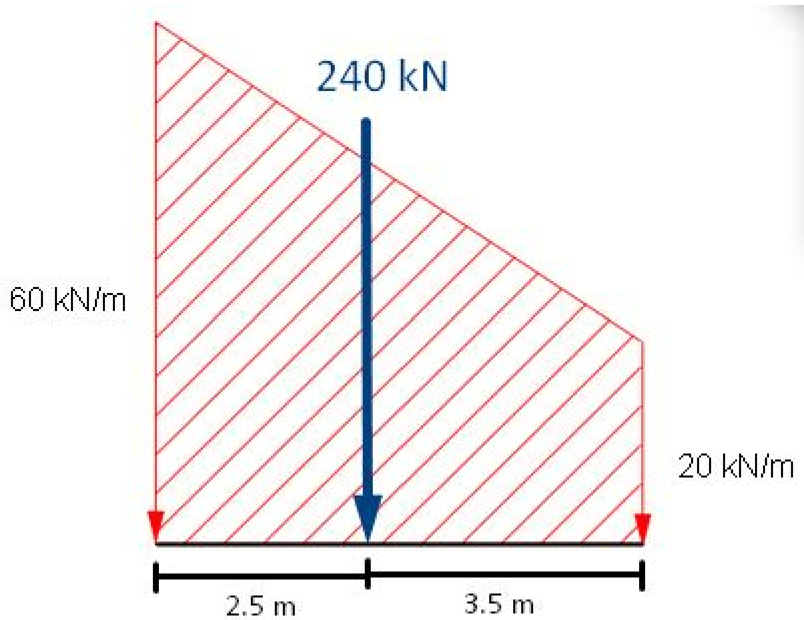
$$R_1\cdot 4m + R_2\cdot 2m = R_{tot}\cdot d$$

$$d := \frac{R_1\cdot 4m + R_2\cdot 2m}{R_{tot}}$$

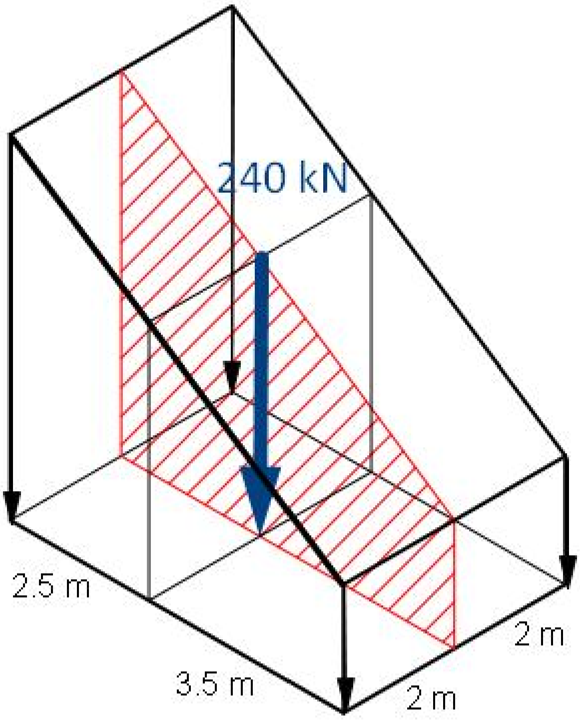
$$d = \frac{180kN\cdot 4m + 60kN\cdot 2m}{240kN}$$

$$d = 3.5\,m$$

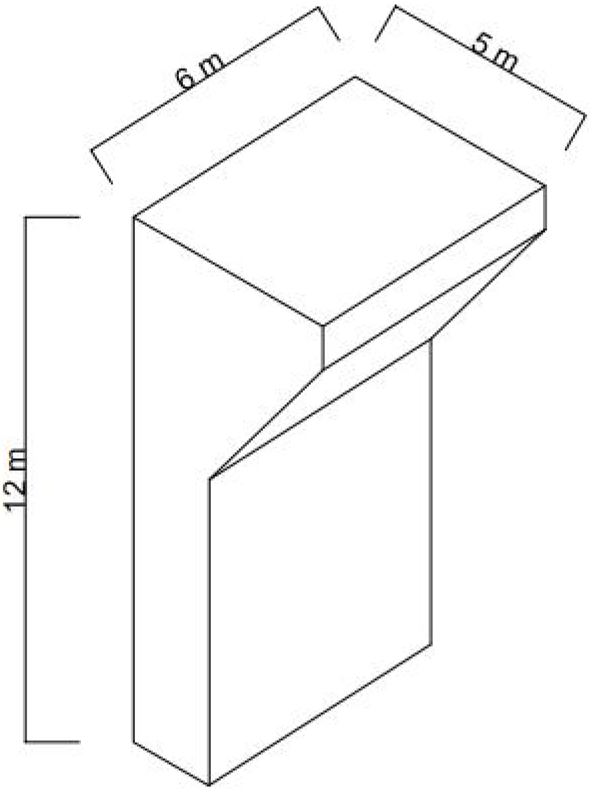
Se obtiene que la fuerza resultante y el punto de aplicación en el plano son los siguientes:

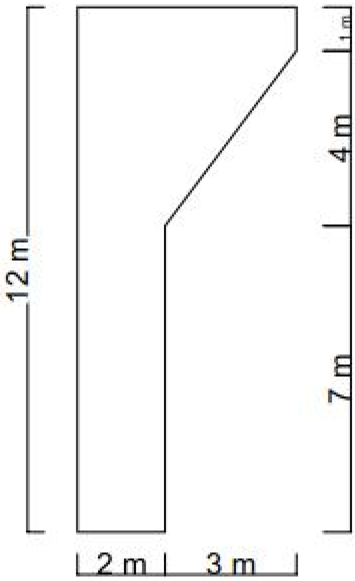


Como esto sólo se aplica al plano que se está analizando y este plano es un plano simétrico, para el esquema original de carga, la carga resultante y su punto de aplicación son los siguientes:



2- Dada el siguiente tanque de agua, donde la imagen a la izquierda muestra la vista aerial del tanque completo y la imagen a la derecha muestra la vista frontal del tanque:





Se pide hallar:

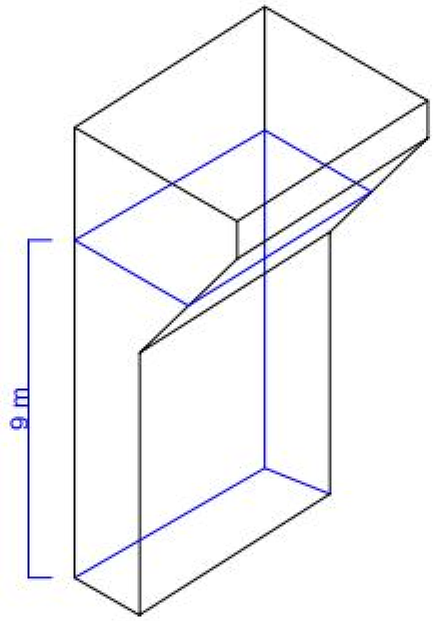
(a) El Empuje del agua sobre la cara lateral izquierda si el nivel del agua en el tanque es de 9 m.

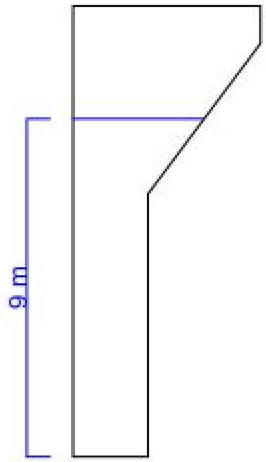
(b) El Empuje del agua sobre las caras laterales derecha si el tanque estuviese lleno de agua.

DATOS: $\rho_{agua} := 1000 \cdot \frac{kgf}{m^3}$

(a) El Empuje del agua sobre la cara lateral izquierda si el nivel del agua en el tanque es de 9 m.

A continuación se muestran los esquemas para un nivel de agua de 9 m. Como la forma del tanque de agua es la misma respecto de un eje, se puede calcular el empuje del agua para un ancho de referencia (generalmente se toma de 1 metro) y luego multiplicarlo por el ancho total del tanque (en este caso, el ancho total del tanque es de 6 metros). De esta forma, el esquema de fuerzas a analizar pasa de un esquema espacial (como se muestra en la izquierda) a un esquema en el plano (como se muestra en la derecha).





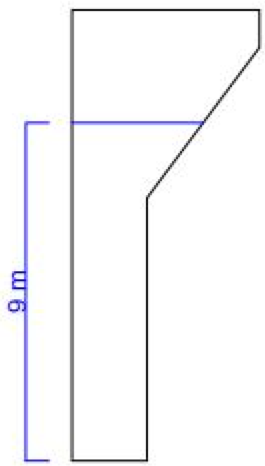
$$\mathrm{Prof}_{agua.a} := 9\mathrm{m}$$

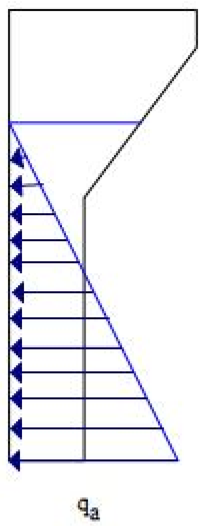
$$\mathrm{Ancho}_{ref} := 1\mathrm{m}$$

Al quererse analizar la cara lateral izquierda del tanque, y sabiendo que:

- La carga hidrostática del agua es una carga distribuida lineal, cuyo valor es nulo en la superficie del agua y aumenta de forma proporcional con la profundidad.
- La carga hidrostática del agua está aplicada horizontalmente.

Con esto se traza el esquema estático que se quiere resolver:



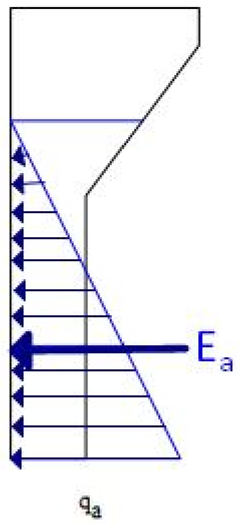


$$q_a := \mathrm{Prof}_{agua.a} \cdot \rho_{agua} \cdot \mathrm{Ancho}_{ref}$$

$$q_a = 9\mathrm{m} \cdot 1000 \cdot \frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{m}^3} \cdot 1\mathrm{m}$$

$$q_a = 9 \times 10^3 \cdot \frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{m}}$$

Como la carga distribuida tiene la forma triangular, se sabe que la resultante del Empuje estará aplicada a la altura del baricentro, que se encuentra al tercio de la altura:

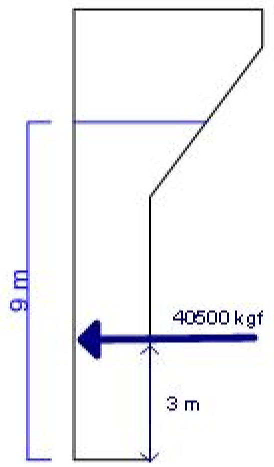


$$E_a := \frac{q_a \cdot Prof_{agua.a}}{2}$$

$$E_a = \frac{9000 \cdot \frac{kgf}{m} \cdot 9m}{2}$$

$$E_a = 4.05 \times 10^4 \cdot kgf$$

Por lo tanto, el Empuje resultante queda como:

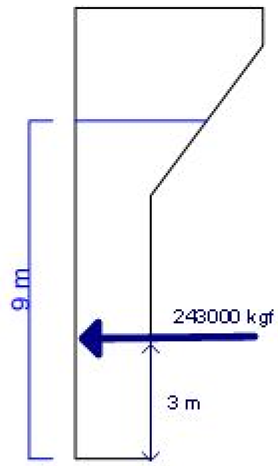


Pero OJO!
Esto fue calculado para un ancho de 1 m.
Como el ancho total del tanque es de 6m, hay que multiplicar la magnitud obtenida por 6.

$$E_{a.tot} := 6 \cdot E_a$$

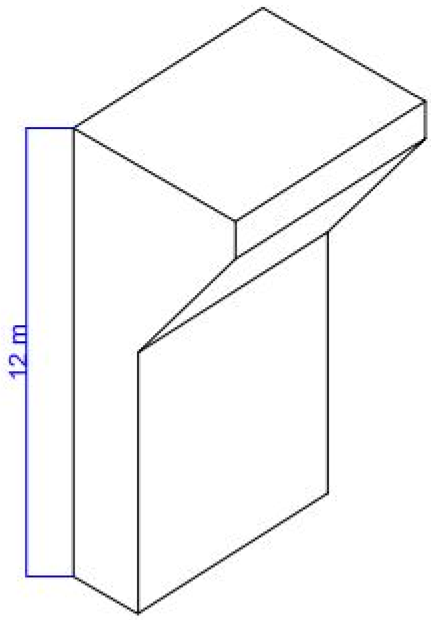
$$E_{a.tot} = 6 \cdot 40500kgf$$

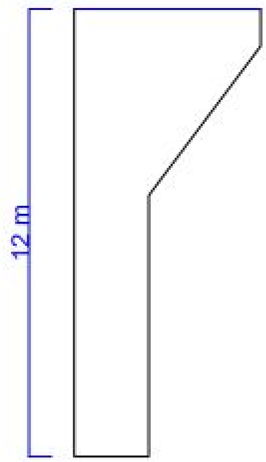
$$E_{a.tot} = 2.43 \times 10^5 \cdot kgf$$


9 m
243000 kgf
3 m

(b) El Empuje del agua sobre las caras laterales derecha si el tanque estuviese lleno de agua.

A continuación se muestran los esquemas para el tanque lleno. Como la forma del tanque de agua es la misma respecto de un eje, se puede calcular el empuje del agua para un ancho de referencia (generalmente se toma de 1 metro) y luego multiplicarlo por el ancho total del tanque (en este caso, el ancho total del tanque es de 6 metros). De esta forma, el esquema de fuerzas a analizar pasa de un esquema espacial (como se muestra en la izquierda) a un esquema en el plano (como se muestra en la derecha).





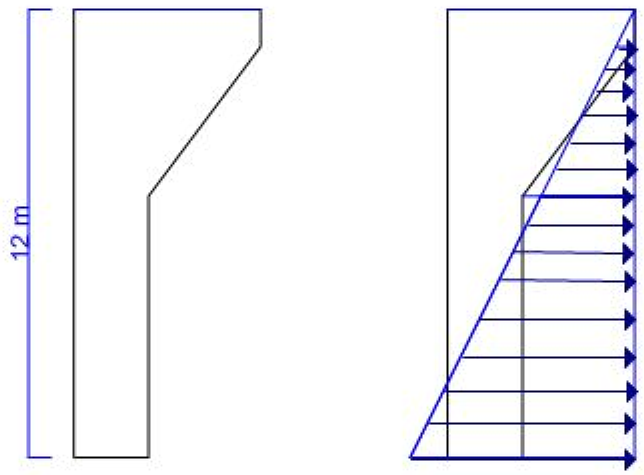
$Prof_{agua.b} := 12m$

$Ancho_{ref} = 1\ m$

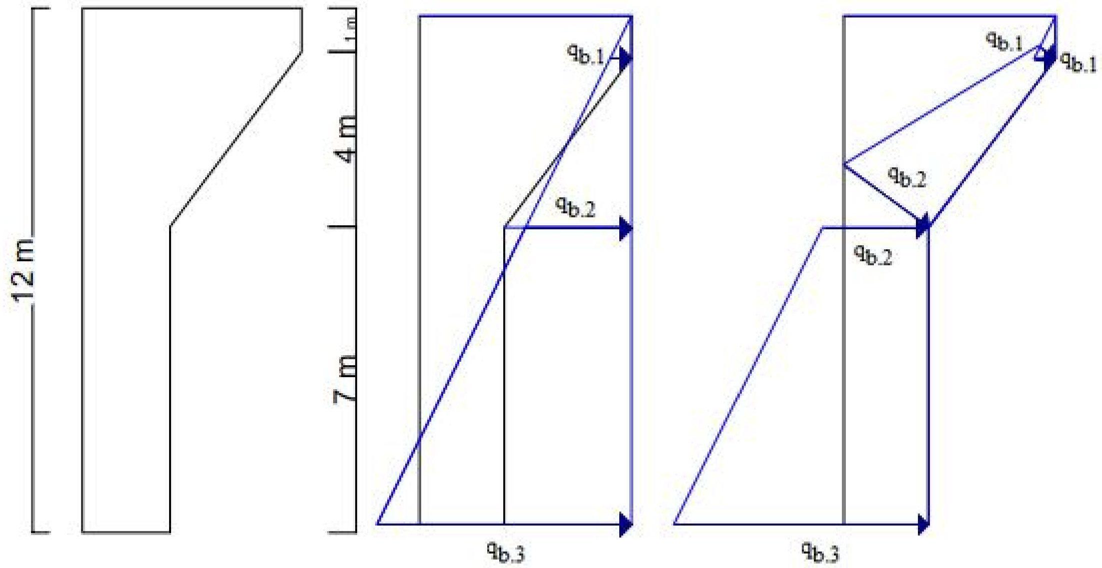
Al quererse analizar la cara lateral derecha del tanque, y sabiendo que:

- La carga hidrostática del agua es una carga distribuida lineal, cuyo valor es nulo en la superficie del agua y aumenta de forma proporcional con la profundidad.
- La carga hidrostática del agua está aplicada horizontalmente.

Con esto se traza el esquema estático que se quiere resolver:



Pero para el tramo inclinado, calculando de esta forma sólo se obtendría el empuje horizontal del agua y no se tiene en cuenta el empuje vertical de la misma.
Para resolver este problema, se "quiebra" el diagrama de carga tal que se aplique de forma perpendicular a la superficie donde esté aplicada la carga:



Se analiza dónde están ubicadas las "cargas quebradas":

$Prof_1 := 1m$ $\qquad$ $Prof_2 := 5m$ $\qquad$ $Prof_3 := 12m$

Se procede a calcular los valores de la carga en los tramos quebrados:

$$q_{b.1} := Prof_1 \cdot \rho_{agua} \cdot Ancho_{ref} \qquad q_{b.2} := Prof_2 \cdot \rho_{agua} \cdot Ancho_{ref}$$

$$q_{b.1} = 1m \cdot 1000 \cdot \frac{kgf}{m^3} \cdot 1m \qquad q_{b.2} = 5m \cdot 1000 \cdot \frac{kgf}{m^3} \cdot 1m$$

$$q_{b.1} = 1 \times 10^3 \frac{kgf}{m} \qquad q_{b.2} = 5 \times 10^3 \frac{kgf}{m}$$

$$q_{b.3} := Prof_3 \cdot \rho_{agua} \cdot Ancho_{ref}$$

$$q_{b.3} = 12m \cdot 1000 \cdot \frac{kgf}{m^3} \cdot 1m$$

$$q_{b.3} = 1.2 \times 10^4 \frac{kgf}{m}$$

Se calculan los empujes de cada tramo:

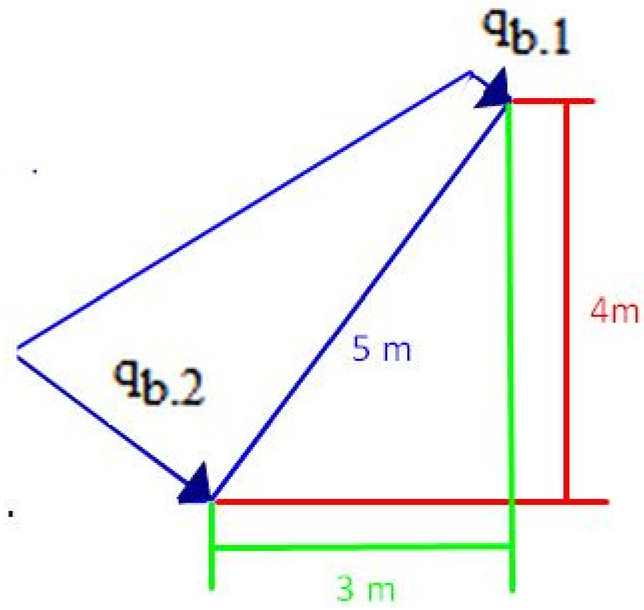
Tramo superior:
(Carga triangular)

$$E_1 := \frac{q_{b.1} \cdot Prof_1}{2}$$

$$E_1 = \frac{1000 \cdot \frac{kgf}{m} \cdot 1m}{2}$$

$$E_1 = 500 \cdot kgf$$

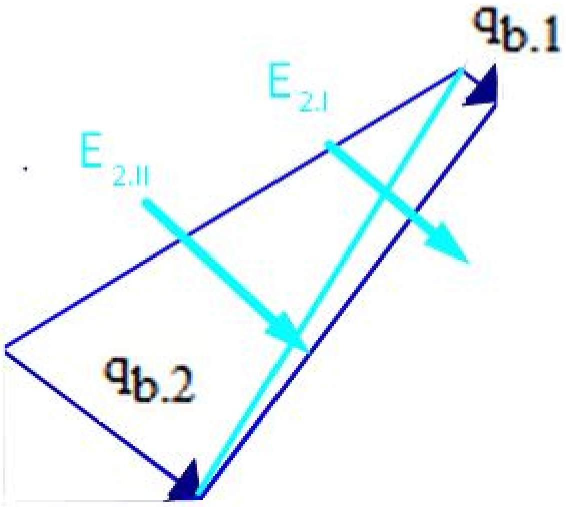
Tramo medio:
(Carga Trapezoidal)



La longitud en la que se aplica la carga es de 5 m.

$$Long_2 := 5m$$

Como la carga tiene forma trapezoidal, se puede dividir la carga en dos cargas triangulares:



$$E_{2.I} := \frac{q_{b.1} \cdot Long_2}{2}$$

$$E_{2.I} = \frac{1000 \cdot \frac{kgf}{m} \cdot 5m}{2}$$

$$E_{2.I} = 2.5 \times 10^3 \, kgf$$

$$E_{2.II} := \frac{q_{b.2} \cdot Long_2}{2}$$

$$E_{2.II} = \frac{5000 \cdot \frac{kgf}{m} \cdot 5m}{2}$$

$$E_{2.II} = 1.25 \times 10^4 \, kgf$$

Se busca la resultante y su punto de aplicación:

Resultante:

$$E_2 := E_{2.I} + E_{2.II}$$

$$E_2 = 2500kgf + 12500kgf$$

$$E_2 = 1.5 \times 10^4 \, kgf$$

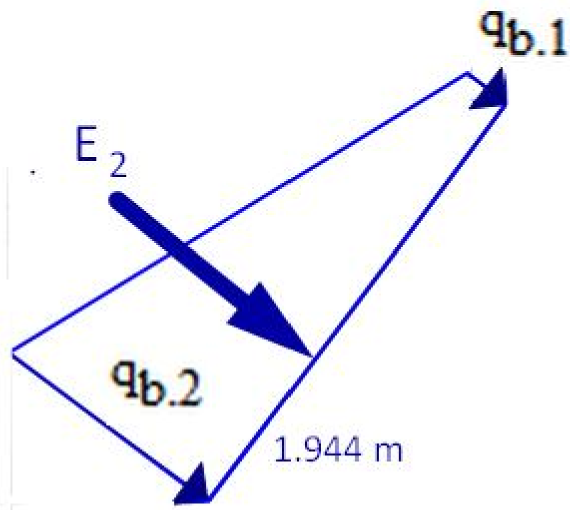
Punto de Aplicación:
(Desde el punto 2)

$$E_{2.II} \cdot 5m \cdot \frac{1}{3} + E_{2.I} \cdot 5m \cdot \frac{2}{3} = E_2 \cdot d_2$$

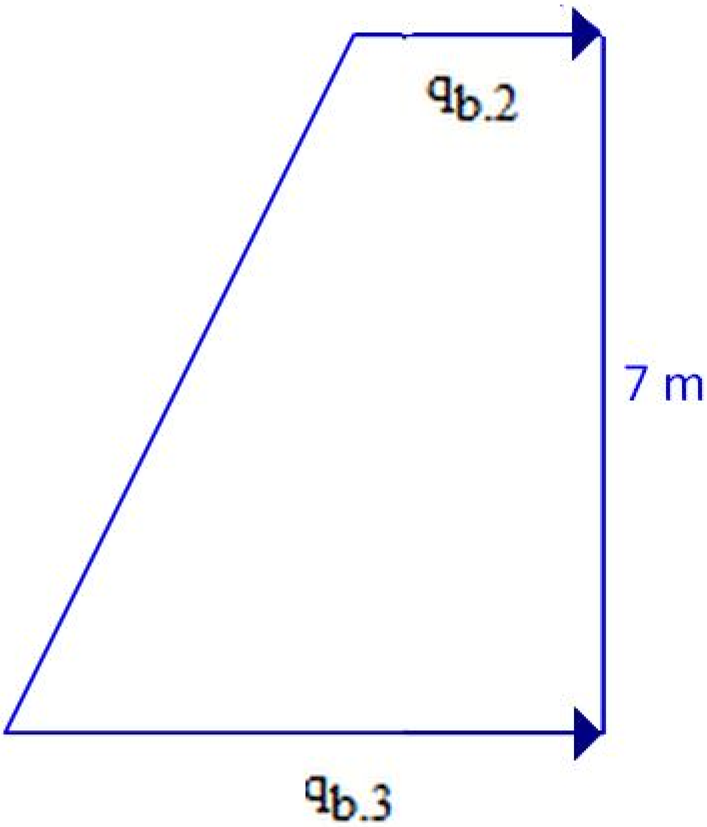
$$d_2 := \frac{\left(E_{2.II} \cdot 5m \cdot \frac{1}{3} + E_{2.I} \cdot 5m \cdot \frac{2}{3}\right)}{E_2}$$

$$d_2 = \frac{12500kgf \cdot 5m \cdot \frac{1}{3} + 2500kgf \cdot 5m \cdot \frac{2}{3}}{15000kgf}$$

$$d_2 = 1.944 \, m$$



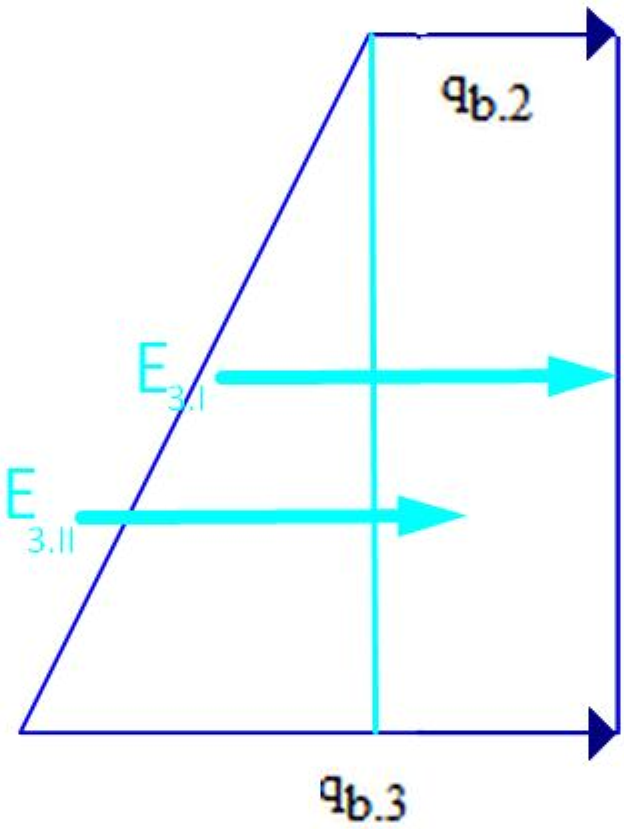
Tramo inferior:
(Carga Trapezoidal)



Longitud de la aplicación de la carga es de 7 m.

$$Long_3 := 7m$$

Como la carga tiene forma trapezoidal, se puede dividir la carga en una triangular y una rectangular:



$$E_{3.I} := q_{b.2} \cdot Long_3$$

$$E_{3.I} = 5000 \cdot \frac{kgf}{m} \cdot 7m$$

$$E_{3.I} = 3.5 \times 10^4 \, kgf$$

$$E_{3.II} := \frac{(q_{b.3} - q_{b.2}) \cdot Long_3}{2}$$

$$E_{3.II} = \frac{\left(12000 \cdot \frac{kgf}{m} - 5000 \cdot \frac{kgf}{m}\right) \cdot 7m}{2}$$

$$E_{3.II} = 2.45 \times 10^4 \, kgf$$

Se busca la resultante y su punto de aplicación:

Resultante:

$$E_3 := E_{3.I} + E_{3.II}$$

$$E_3 = 35000kgf + 24500kgf$$

$$E_3 = 5.95 \times 10^4 \, kgf$$

Punto de Aplicación:
(Desde el punto inferior)

$$E_{3.II} \cdot 7m \cdot \frac{1}{3} + E_{3.I} \cdot 7m \cdot \frac{1}{2} = E_3 \cdot d_3$$

$$d_3 := \frac{\left(E_{3.II} \cdot 7m \cdot \frac{1}{3} + E_{3.I} \cdot 7m \cdot \frac{1}{2}\right)}{E_3}$$

$$d_3 = \frac{24500kgf \cdot 7m \cdot \frac{1}{3} + 35000kgf \cdot 7m \cdot \frac{1}{2}}{59500kgf}$$

$$d_3 = 3.02 \, m$$