

ÍNDICE

Las páginas de cada apunte y cada capítulo tienen numeración propia, pues están numeradas por separado. No todos los capítulos están organizados de la misma manera: algunos están redactados en párrafos numerados, otros no. Peor aún: hay dos sin hacer.

La primera parte consiste en 15 capítulos sobre análisis de variable compleja, comenzando con la Clase 0 y finalizando con 3 notas complementarias: *El Principio del argumento & co* (incluye el Teorema de Rouché), *Nota sobre el argumento principal* y un compacto sobre *Sucesiones y series numéricas*.

En la segunda parte se encuentran los 5 apuntes sobre los temas restantes del curso: *Integrales impropias*, *Ecuaciones diferenciales*, *Series de Fourier*, *Transformación de Fourier* y *Transformación de Laplace*. El último apunte de esta parte trata sobre la ecuación de ondas bidimensional y puede considerarse, también, como material complementario.

Este índice no se incluye en este índice, lo que puede producir alguna inquietud lógica.

0 – Presentación del curso

- §1. Breve comentario sobre la situación – Marzo 2020. Página 1
- §2. Presentación del curso. Primer cuatrimestre del año 2020. Página 2
- §3. Cinco años después. Página 5

PRIMERA PARTE: ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

0 – Clase 0

- §1. Factoriales y números combinatorios. El triángulo satánico. Página 2
- §2. Potencias de un binomio. Página 8
- §3. La maravillosa fórmula de Euler y un amor imposible. Página 13

1 – Aritmética básica de los números complejos (\emptyset)

2 – Sucesiones y series numéricas (\emptyset) (hay un resumen compacto: apunte 15)

3 – Topología básica del plano complejo

- §3.1. Discos. Página 1
- §3.2. Puntos interiores y puntos de acumulación. Página 1
- §3.3. Conjuntos abiertos, conjuntos cerrados. Conjuntos compactos. Página 3
- §3.4. Conexos. Página 5
- §3.5. Simplemente conexos. Página 6

4 – Límites y continuidad

- § Límites de funciones de variable compleja: definición y propiedades básicas. Página 1
- § Definición de continuidad y propiedades básicas de las funciones continuas. Página 8
- § Límites infinitos. Página 12
- § *Apéndice*: continuidad secuencial. Página 13

5 – Derivabilidad y holomorfía

- ∅ Definición de derivabilidad y definición de holomorfía. Página 2
- ∅ Expresión diferencial de la derivabilidad. Página 3
- ∅ Continuidad de las funciones derivables. Página 4
- ∅ Álgebra de derivables y reglas de derivación. Página 5
- ∅ Ejemplos básicos. Página 8
- ∅ Primitivas: definición y primeras consecuencias. Página 10
- ∅ Condiciones de Cauchy – Riemann. Página 13

6 – Series de potencias y funciones analíticas

- ∅ Definición y primeros ejemplos de series de potencias. Página 2
- ∅ Teorema de Cauchy – Hadamard. Página 6
- ∅ Criterio de la raíz y criterio del cociente. Página 8
- ∅ Fórmulas de Taylor. Página 10
- ∅ Definición de función analítica y primeras consecuencias. Página 12
- ∅ Operaciones aritméticas con series de potencias. Página 1
- ∅ Apéndice: demostración del Teorema de Cauchy – Hadamard. Página 17

7 – Funciones elementales

- ∅ Liouville y el concepto de *función elemental*. Página 1
- ∅ Definición de función localmente inversible. Página 1
- ∅ Funciones elementales básicas. Página 2
- ∅ Funciones logarítmicas complejas. Página 4
- ∅ Logaritmo principal. Página 9
- ∅ Teorema de inversibilidad local (para variable compleja). Página 10
- ∅ Funciones elementales en general:
 - Potencias y raíces. Página 13
 - Polinomios, racionales y algebraicas elementales. Página 18
 - Trascendentes elementales. Página 18
- ∅ Observaciones y notas finales. Algunos ejemplos muy importantes de funciones analíticas no elementales. Página 21

8 – Transformaciones conformes

- ∅ Algunas cuestiones de terminología geométrica. Página 1
- ∅ Transformaciones \mathcal{R} -lineales vs transformaciones \mathbb{C} -lineales. Página 2
- ∅ Transformaciones \mathbb{C} -lineales: composiciones de rotaciones y homotecias. Página 3
- ∅ Concepto de *transformación conforme*. Página 7
- ∅ Las funciones holomorfas (con derivadas no nulas) son transformaciones conformes. Página 8
- ∅ Rectas y circunferencias en el plano: ecuaciones en notación compleja. Página 10
- ∅ Ejercicio 8.2: Transformación de la red cartesiana y la red polar mediante: traslaciones, homotecias, rotaciones, funciones \mathbb{C} -lineales, la función exponencial, las funciones circulares, la inversión multiplicativa. Página 10
- ∅ Homotecias: Ejercicio 8.2 (h). Página 11
- ∅ Momento cultural sobre el *Teorema de la Representación Conforme* (B. Riemann)
- ∅ Comentario final (sobre el concepto de *orientación*)

9 – Integración

- ∅ Repaso: Integrales de línea, campos conservativos y potenciales escalares. Página 1
- ∅ Orientaciones de los bordes de recintos triangulables: Nota 9.1 Página 5
- ∅ Teorema de Green para recintos triangulables. Página 8
- ∅ Integrales de funciones de variable compleja. Página 9
- ∅ Propiedades básicas. Página 11
- ∅ Lema de «aproximación por quebradas». Página 11
- ∅ Acotaciones del valor absoluto de una integral. Página 13
- ∅ Invariancia de la integral respecto de las parametrizaciones. Página 14

- ∅ Conjugación de integrales. Página 14
- ∅ Cambio de variables en una integral. Página 16
- ∅ Integrales y primitivas. Página 17

10 – Teorema de Cauchy-Goursat

- ∅ Teorema 10.1 (de Cauchy-Goursat). Página 2
- ∅ Corolario 10.1: Teorema de Cauchy-Goursat generalizado. Página 3
- ∅ Nota 10.1: Invariancia homotópica. Página 4
- ∅ Corolario 10.2: Independencia respecto del camino. Página 4
- ∅ Corolario 10.3: Existencia de primitivas de holomorfas en abiertos simplemente conexos. Página 6
- ∅ Corolario 10.4: Primera fórmula integral de Cauchy. Página 11
- ∅ Observación 10.3: Determinación del valor de una función holomorfa en un punto a partir de sus valores en cualquier circuito alrededor de dicho punto. Página 13
- ∅ Corolario 10.5: Analiticidad de las funciones holomorfas y fórmulas integrales de Cauchy. Página 14
- ∅ Nota 10.2: Sobre el radio de convergencia de las series de Taylor de las funciones analíticas. Página 16
- ∅ Teorema 10.2 (de Giacinto Morera). Página 19
- ∅ *Apéndice* 10.0: Comentario de César A. Trejo sobre el Teorema de Cauchy-Goursat. Página 21
- ∅ *Apéndice* 10.1: Un ejemplo sobre el intercambio de límites e integrales. Página 21
- ∅ *Apéndice* 10.2: Sobre homotopías y conexidad simple. Página 22

11 – Propiedades surtidas de las funciones holomorfas

- ∅ Desigualdades de Cauchy. Página 1
- ∅ Teorema de Liouville. Página 2
- ∅ Teorema fundamental del álgebra. Página 4
- ∅ Ceros de funciones holomorfas: un lema previo y definición. Páginas 5 y 6
- ∅ Principio de los ceros aislados. Página 8
- ∅ Principio de prolongación analítica. Página 9
- ∅ Regla de l'Hôpital. Página 12
- ∅ Principio del módulo máximo. Página 14

12 – Series de Laurent – Residuos

- ∅ Introducción. Página 1
- ∅ Definición y corona de convergencia. Página 5.
- ∅ Ejemplos. Página 6
- ∅ Funciones holomorfas en coronas: Teorema de Laurent (Proposición 12.2). Página 8
- ∅ Singularidades aisladas. Definición y ejemplos. Página 13
- ∅ Desarrollo de una función holomorfa en serie de Laurent en torno de una singularidad aislada (Corolario 12.1). Página 14
- ∅ Clasificación de las singularidades aisladas y definición de residuo. Página 15
- ∅ Ejemplos. Página 16
- ∅ Teorema de los residuos (Proposición 12.3). Página 20
- ∅ Residuo en un polo (y algo más: Teorema de Riemann sobre las singularidades evitables). Página 21
- ∅ Cálculo de residuos en polos (Proposición 12.5). Página 23
- ∅ Observación 12.7 (sobre el *Gran Teorema de Picard*). Página 28
- ∅ Nota 12.2: Funciones meromorfas. Página 29
- ∅ Nota 12.3: Residuo en infinito. Página 29

13 – Principio del argumento & co

1. Principio del argumento. Página 2
2. Teorema de Rouché. Página 4
3. Teorema de la función abierta. Página 6

4. Principio de módulo máximo. Página 7
5. Teorema del punto fijo. Página 10
6. Lema de Schwarz. Página 10
7. Teorema fundamental del álgebra. Página 12
8. Recíproca del teorema de inversibilidad local (para funciones holomorfas). Página 12
9. Límites uniformes y derivación. Página 14
10. Teorema de Hurwitz. Página 14

14 – *Nota sobre el argumento principal*

Definición y propiedades básicas del argumento principal. Páginas 1 – 6

15 – *Sucesiones y series numéricas (resumen compacto)*

- ∅ Definiciones básicas. Página 1
- ∅ Primeras consecuencias. Página 3
- ∅ Teoremas de completitud y continuidad secuencial. Página 4
- ∅ Segunda lista de consecuencias (incluye criterios de convergencia de series). Página 4
- ∅ Temas adicionales a consultar por el interesado. Página 10.

SEGUNDA PARTE

16 – *Integrales impropias*

∅ Introducción: Funciones seccionalmente continuas. Página 1

(A) Integrales impropias de la forma $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Página 3

- Lema y corolario sobre límites en infinito. Páginas 4 y 5
- Algunos criterios de convergencia. Convergencia absoluta y convergencia condicional. Página 6

(B) Integrales impropias de la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Página 10

- Valor principal. Página 11
- Integrales de funciones pares y de funciones impares. Página 12
- Ejemplos. Página 13

(C) Otras impropiedades. Página 14

- Ejemplos. Página 17

(D) Algunas integrales impropias importantes. Página 20

(E) Tres ejemplos adicionales. Página 29

∅ *Apéndice: Algunas (pocas) demostraciones.* Página 35

- (1) Criterio de Bolzano-Cauchy. Página 35
- (2) Criterio de Dirichlet para integrales impropias. Página 36
- (3) Lema de Jordan. Página 37

17 – *Breve apunte sobre ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.*

- §1. Introducción. Página 1
- §2. Recintos compactos. Página 9
- §3. Ecuación de Laplace. Problema de Dirichlet. Página 11
- §4. Ecuación de difusión del calor y ecuación de ondas. Página 20

- δ *Apéndice* 1: Sobre el Principio del Máximo para armónicas y una observación de la Dra. Bergamini. Página 22
- δ *Apéndice* 2: Método de la Transformación Conforme para la resolución del Problema de Dirichlet en el plano con condiciones de contorno seccionalmente constantes. Página 28
- δ *Apéndice* 3: Teoremas de unicidad para el problema de difusión del calor y de la ecuación de ondas. Página 31
- δ *Apéndice* 4: Deducción muy simplificada de la ecuación de difusión del calor. Página 34

18 – Series de Fourier

- §1. Introducción. Página 1
- §2. Series exponenciales de Fourier. Convergencia cuadrática. Página 4
- §3. Convergencia puntual. Condiciones de Dirichlet. Página 15
- §4. Forma trigonométrica de las series de Fourier. Página 16
- §5. Convergencia en media y convergencia uniforme. Página 19
- §6. Derivación e integración de las series de Fourier. Página 24
- §7. Aplicación de las series de Fourier a la resolución de la ecuación de difusión del calor en dominios espaciales acotados. Caso unidimensional. Página 27
- δ *Apéndice* 1: Remojito de Álgebra II: Sistemas ortogonales y proyecciones. Página 29
- δ *Apéndice* 2: Polinomios trigonométricos. Página 36
- δ *Apéndice* 3: Demostración del Teorema 3.1 (Condiciones de Dirichlet para la convergencia puntual de series de Fourier). Página 38

19 – Transformación de Fourier

- §1. Introducción. Página 1
- §2. De las series de Fourier a las integrales de Fourier: una presentación heurística. Página 2
- §3. Teorema de Inversión. Página 6
- §4. La Transformación de Fourier en $L^1(\mathfrak{R})$. Página 12
- §5. Convolución. Página 17
- §6. La Transformación de Fourier en $L^2(\mathfrak{R})$. Página 23
- δ *Apéndice*: Demostraciones:
 - (A) Lema de Riemann-Lebesgue (para las transformadas de Fourier en \mathfrak{R}). Página 27
 - (B) Lema del seno cardinal: una aproximación de la unidad. Página 32
 - (C) Teorema de inversión. Página 36
 - (D) Continuidad de la transformada de una función seccionalmente continua y absolutamente integrable. Página 39
 - (E) «Casi-inyectividad» de la transformación de Fourier. Página 41

20 – Transformación de Laplace

- §1. Introducción. Página 1
- §2. El dominio de la transformación de Laplace. Página 3
- §3. Codominio y definición de la transformación de Laplace. Página 7
- §4. Propiedades básicas de la transformación de Laplace. Página 13
- §5. Aplicación de la transformación de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes y a sistemas de tales ecuaciones. Página 22
- §6. La función Γ de Euler. Página 27

21 – Breves notas sobre la ecuación de ondas bidimensional

Membrana circular. Planteo del problema en coordenadas polares: páginas 1 y 2. Separación de variables y ecuaciones de Bessel de orden entero: páginas 3 a 5. Teorema de Fuchs: página 6. Funciones de Bessel de orden entero: página 7. Solución del problema de la membrana circular: páginas 8 a 14. Momento cultural: deducción de las relaciones de ortogonalidad a partir de las ecuaciones diferenciales: página 14. Apéndice 0: Algunas propiedades mágicas de las funciones de Bessel de orden entero: página 17. Apéndice 1: Una pizza de la teoría de Sturm-Liouville: páginas 23 a 30. Bibliografía: páginas 30 y 31.