## Ejercicio Parcial (Gráfica de Procesos)

La igualdad algebraica

$$\mathrm{sen}\,(\alpha - \beta) = \mathrm{sen}\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \mathrm{sen}\beta$$

constituye dos formas distintas de efectuar el cálculo numérico.

a) Establecer cuál de las dos formas es más estable numéricamente. Utilizar los valores $\alpha = 2{,}50$ y $\beta = 2{,}51$.
b) Analizar la estabilidad del problema para los mismos valores de los datos de entrada. ¿Lo considera estable o inestable?
c) ¿Aumenta ó disminuye el valor del resultado si se aumenta levemente el valor de $\alpha$ por sobre el dado?

Para establecer cuál es la forma más estable numéricamente vamos a realizar la gráfica de procesos. Antes que nada veamos como sacar los factores de propagación de errores relativos para cualquier función:

$$\begin{cases} y = \mathrm{sen}(x) \\ e_y = \dfrac{\partial y}{\partial x} e_x = \cos(x).e_x \end{cases} \rightarrow \quad e_{ry} = \frac{e_y}{y} = \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}.e_x = \mathrm{cotg}(x).e_x = x.\mathrm{cotg}(x).e_{rx}$$

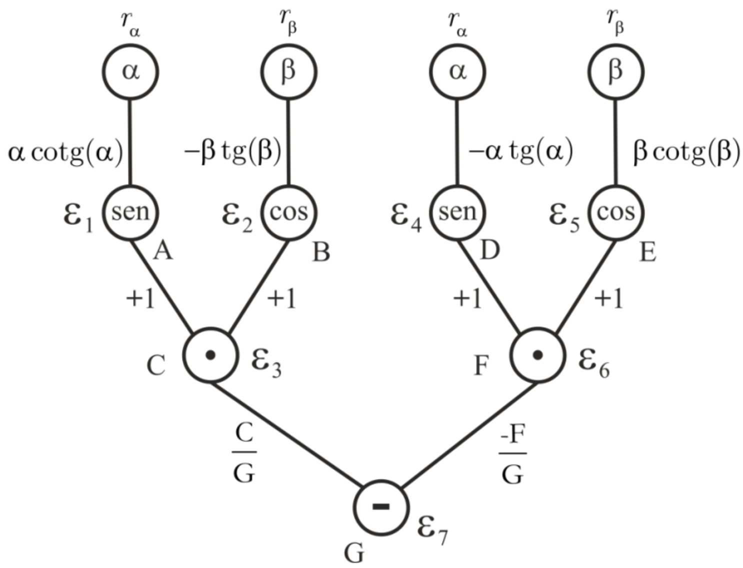
$$\begin{cases} y = \cos(x) \\ e_y = \dfrac{\partial y}{\partial x} e_x = -\mathrm{sen}(x).e_x \end{cases} \rightarrow \quad e_{ry} = \frac{e_y}{y} = \frac{-\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}.e_x = -\mathrm{tg}(x).e_x = -x.\mathrm{tg}(x).e_{rx}$$

**Algoritmo 1):** $\mathrm{sen}(\alpha).\cos(\beta) - \cos(\alpha).\mathrm{sen}(\beta)$

$A = \mathrm{sen}(\alpha) \qquad B = \cos(\beta) \qquad C = A.B$

$D = \cos(\alpha) \qquad E = \mathrm{sen}(\beta) \qquad F = D.E$

$G = C - F$




$$r_A = \alpha\,\mathrm{cotg}(\alpha).r_\alpha + \varepsilon_1$$

$$r_B = -\beta\,\mathrm{tg}(\beta).r_\beta + \varepsilon_2$$

$$r_C = r_A + r_B + \varepsilon_3$$

$$r_C = \alpha\,\mathrm{cotg}(\alpha).r_\alpha - \beta\,\mathrm{tg}(\beta).r_\beta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$r_D = -\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha).r_\alpha + \varepsilon_4$$

$$r_E = \beta\,\mathrm{cotg}(\beta).r_\beta + \varepsilon_5$$

$$r_F = r_D + r_E + \varepsilon_6$$

$$r_F = -\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha).r_\alpha + \beta\,\mathrm{cotg}(\beta).r_\beta + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6$$

$$r_G = \frac{C}{G} r_C - \frac{F}{G} r_F + \varepsilon_7$$

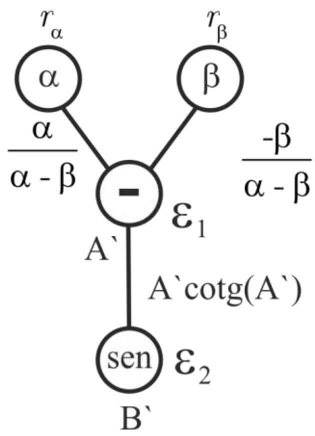
$$r_G = \frac{C}{G}\Big(\alpha\,\mathrm{cotg}(\alpha).r_\alpha - \beta\,\mathrm{tg}(\beta).r_\beta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\Big) - \frac{F}{G}\Big(-\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha).r_\alpha + \beta\,\mathrm{cotg}(\beta).r_\beta + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6\Big) + \varepsilon_7$$

$$r_G = \frac{\alpha}{G}.\Big(C.\mathrm{cotg}(\alpha) + F.\mathrm{tg}(\alpha)\Big).r_\alpha - \frac{\beta}{G}.\Big(C.\mathrm{tg}(\beta) + F\,\mathrm{cotg}(\beta)\Big) + \frac{C}{G}\Big(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\Big) - \frac{F}{G}\Big(\varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6\Big)$$

Sabemos que $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|, |\varepsilon_4|, |\varepsilon_5|, |\varepsilon_6|, |\varepsilon_7| \le \mu$ y definiendo $f_\alpha = \dfrac{\alpha}{G}.\Big(C.\mathrm{cotg}(\alpha) + F.\mathrm{tg}(\alpha)\Big)$,

$f_\beta = -\dfrac{\beta}{G}.\Big(C.\mathrm{tg}(\beta) + F\,\mathrm{cotg}(\beta)\Big)$ y $f_\mu = 3\left(\dfrac{C}{G} - \dfrac{F}{G}\right) + 1$ tenemos: $r_G = r_\alpha.f_\alpha + r_\beta.f_\beta + \mu f_\mu$, y definiendo $F_\mu = 3\left(\left|\frac{C}{G}\right| + \left|\frac{F}{G}\right|\right) + 1$, llegamos a: $R_G = \left|f_\alpha\right|.R_\alpha. + \left|f_\beta\right|.R_\beta + F_\mu \mu$

**Algoritmo 2):** $\mathrm{sen}(\alpha - \beta)$




$A` = (\alpha - \beta)$ $B` = \mathrm{sen}(A`)$

$r_{A`} = r_\alpha \dfrac{\alpha}{A`} - r_\beta \dfrac{\beta}{A`} + \varepsilon_1$

$r_{B`} = r_{A`} A` \mathrm{cotg}(A`) + \varepsilon_2$

$r_{B`} = \left(r_\alpha \dfrac{\alpha}{A`} - r_\beta \dfrac{\beta}{A`} + \varepsilon_1\right) A` \mathrm{cotg}(A`) + \varepsilon_2$

$r_{B`} = \left(r_\alpha \dfrac{\alpha}{A`} - r_\beta \dfrac{\beta}{A`} + \varepsilon_1\right) A` \mathrm{cotg}(A`) + \varepsilon_2$

$r_{B`} = r_\alpha.\alpha.\mathrm{cotg}(A`) - r_\beta.\beta.\mathrm{cotg}(A`) + \varepsilon_1 \mathrm{cotg}(A`) + \varepsilon_2$

Sabemos que $\left|\varepsilon_1\right|, \left|\varepsilon_2\right| \le \mu$ y definiendo $f'_\alpha = \alpha.\mathrm{cotg}(A`)$, $f'_\beta = \beta.\mathrm{cotg}(A`)$ y $f'_\mu = A`.\mathrm{cotg}(A`) + 1$ tenemos:

$r_{B`} = r_\alpha.f'_\alpha - r_\beta.f'_\beta + \mu f'_\mu$, y definiendo $F'_\mu = \left|A`.\mathrm{cotg}(A`)\right| + 1$, llegamos a: $R_{B`} = \left|f'_\alpha\right|.R_\alpha. + \left|f'_\beta\right|.R_\beta + F'_\mu \mu$

$$\begin{cases} \alpha = 2.5 \quad \mathrm{sen}(\alpha) = 0.598 \quad \cos(\alpha) = -0.801 \quad \mathrm{tg}(\alpha) = -0.747 \quad \mathrm{cotg}(\alpha) = -1.339 \\ \beta = 2.51 \quad \mathrm{sen}(\beta) = 0.590 \quad \cos(\beta) = -0.807 \quad \mathrm{tg}(\beta) = -0.732 \quad \mathrm{cotg}(\beta) = -1.367 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 0.598 \quad B = -0.807 \quad C = -0.483 \quad D = -0.801 \quad E = -0.590 \\ F = -0.473 \quad G = -0.010 \quad \cos(\beta) = -0.807 \quad \mathrm{tg}(\beta) = -0.732 \quad \mathrm{cotg}(\beta) = -1.367 \\ A` = -0.010 \quad B` = -0.010 \quad \mathrm{cotg}(A`) = -99.997 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_\alpha = f'_\alpha = -250 \\ f_\beta = f'_\beta = 251 \\ F_\mu = 288 \qquad F'_\mu = 2.0 \end{cases}$$

Es más estable numéricamente la forma $\mathrm{sen}(\alpha - \beta)$ ya que $F_\mu \ll F'_\mu$