Ejercicio 11:

Calcular $u(0.5)$ utilizando los siguientes métodos:

a) Euler.
b) Predictor-corrector explícito (Punto medio).
c) Euler Modificado (Runge-Kutta orden 2).

Aplicados al siguiente problema:

$$\frac{du}{dt} + (1-t)\cdot u^3 = 0 \qquad u(0) = 1$$

Obtener previamente el factor de amplificación y durante el cálculo verificar en cada paso que dicho factor es menor o igual que 1. Elegir un paso de k=0.1 por razones de precisión.

a) Método de Euler $\Rightarrow u_{n+1} = u_n + k\cdot f(u_n, t_n)$

A partir de la ecuación diferencial dada, discretizo tomando $f(u_n, t_n) = -(1-t_n)\cdot u_n^{\,3}$ obteniendo:

$$u_{n+1} = u_n - k\cdot(1-t_n)\cdot u_n^{\,3}$$

Para analizar la estabilidad perturbo: $\begin{cases} u_n \to u_n + \delta u_n \\ u_{n+1} \to u_{n+1} + \delta u_{n+1} \end{cases}$

Y obtengo el factor de amplificación $g^n = \dfrac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n}$ donde:

$$|g^n| \Rightarrow \begin{cases} \prec 1 \to ESTABLE \\ = 1 \to MARGINALMENTE\ ESTABLE \\ \succ 1 \to INESTABLE \end{cases}$$

Reemplazo en la ecuación del método (Euler en este caso) y obtengo:

$$u_{n+1} + \delta u_{n+1} = u_n + \delta u_n - k\cdot(1-t_n)\cdot(u_n + \delta u_n)^3$$

$$u_{n+1} + \delta u_{n+1} = u_n + \delta u_n - k\cdot(1-t_n)\cdot(u_n^3 + 3\cdot u_n^2\cdot\delta u_n + 3\cdot u_n\cdot\delta u_n^2 + \delta u_n^3)$$

Como utilizaremos una aproximación lineal para la perturbación, los términos que no son lineales se los desprecia.

$$\cancel{u_{n+1}} + \delta u_{n+1} = \cancel{u_n} + \delta u_n - k\cdot(1-t_n)\cdot(\cancel{u_n^3} + 3\cdot u_n^2\cdot\delta u_n + 3\cdot \cancel{u_n}\cdot\delta u_n^2 + \delta \cancel{u_n^3})$$

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n - k\cdot(1-t_n)\cdot 3\cdot u_n^2\cdot\delta u_n$$

$$g^n = \frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = 1 - 3\cdot k\cdot u_n^2\cdot(1-t_n)$$

Con el factor de amplificación calculado, se arma una tabla para avanzar los 5 pasos y obtener el valor de $u(0.5)$ con un paso de k=0.1.

n	t_n	u_n	g^n
0	0	1 (Cond. Inicial)	0.7
1	0.1	0.9	0.7813
2	0.2	0.83439	0.832910398
3	0.3	0.787917369	0.851004692
4	0.4	0.753676871	0.897754811
5	0.5	0.72799026	0.920504527

A partir de esta tabla obtenemos $u(0.5) = 0.72799026$.

b) Método Predictor-Corrector Explicito (Punto Medio) $\Rightarrow \begin{cases} u_{n+\frac{1}{2}} = u_n + \frac{k}{2} \cdot f(u_n, t_n) \\ u_{n+1} = u_n + k \cdot f\left(u_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}\right) \end{cases}$

A partir de la ecuación diferencial dada, discretizo tomando $f(u_n, t_n) = -(1-t_n) \cdot u_n^{\,3}$ obteniendo:

$$\begin{cases} u_{n+\frac{1}{2}} = u_n - \frac{k}{2} \cdot (1-t_n) \cdot u_n^{\,3} \\ u_{n+1} = u_n - k \cdot \left[\left(1-t_{n+\frac{1}{2}}\right) \cdot u^3_{n+\frac{1}{2}}\right] \end{cases}$$

Para analizar la estabilidad perturbo: $\begin{cases} u_n \to u_n + \delta u_n \\ u_{n+1} \to u_{n+1} + \delta u_{n+1} \end{cases}$ y obtengo el factor de amplificación $g^n = \dfrac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n}$.

Antes de perturbar, trabajo la expresión:

$$u_{n+1} = u_n - k \cdot \left\{\left(1-t_{n+\frac{1}{2}}\right) \cdot \left[u_n - \frac{k}{2} \cdot (1-t_n) \cdot u_n^{\,3}\right]^3\right\}$$, considerando $A = \frac{k}{2} \cdot (1-t_n)$

$$u_{n+1} = u_n - k \cdot \left\{\left(1-t_{n+\frac{1}{2}}\right) \cdot \left[u_n^3 - 3 \cdot u_n^5 \cdot A + 3 \cdot u_n^7 \cdot A^2 - u_n^9 \cdot A^3\right]\right\}$$

Ahora perturbo:

$$u_{n+1} + \delta u_{n+1} = u_n + \delta u_n - k \cdot \left\{\left(1-t_{n+\frac{1}{2}}\right) \cdot \left[\begin{array}{l} (u_n + \delta u_n)^3 - 3 \cdot (u_n + \delta u_n)^5 \cdot A + \\ +3 \cdot (u_n + \delta u_n)^7 \cdot A^2 - (u_n + \delta u_n)^9 \cdot A^3 \end{array}\right]\right\}$$

Como utilizaremos una aproximación lineal para la perturbación, los términos que no son lineales se los desprecia.

$$u_{n+1}+\delta u_{n+1}=u_n+\delta u_n-k\cdot\left\{\left(1-t_{n+\frac{1}{2}}\right)\cdot\left[\begin{array}{l}\left(u_n^3+3\cdot u_n^2\cdot\delta u_n\right)-3\cdot\left(u_n^5+5\cdot u_n^4\cdot\delta u_n\right)\cdot A+\\+3\cdot\left(u_n^7+7\cdot u_n^6\cdot\delta u_n\right)\cdot A^2-\left(u_n^9+9\cdot u_n^8\cdot\delta u_n\right)\cdot A^3\end{array}\right]\right\}$$

$$\cancel{u}_{n+1}+\delta u_{n+1}=\cancel{u}_n+\delta u_n-k\cdot\left\{\left(1-t_{n+\frac{1}{2}}\right)\cdot\left[\begin{array}{l}\left(\cancel{u}_n^3+3\cdot u_n^2\cdot\delta u_n\right)-3\cdot\left(\cancel{u}_n^5+5\cdot u_n^4\cdot\delta u_n\right)\cdot A+\\+3\cdot\left(\cancel{u}_n^7+7\cdot u_n^6\cdot\delta u_n\right)\cdot A^2-\left(\cancel{u}_n^9+9\cdot u_n^8\cdot\delta u_n\right)\cdot A^3\end{array}\right]\right\}$$

$$\delta u_{n+1}=+\delta u_n-3\cdot u_n^2\cdot k\cdot\left\{\left(1-t_{n+\frac{1}{2}}\right)\cdot\left[\left(\delta u_n\right)-\left(5\cdot u_n^2\cdot\delta u_n\right)\cdot A+\left(7\cdot u_n^4\cdot\delta u_n\right)\cdot A^2-\left(3\cdot u_n^6\cdot\delta u_n\right)\cdot A^3\right]\right\}$$

$$g^n=\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n}=1-3\cdot k\cdot\left(1-t_{n+\frac{1}{2}}\right)\cdot u_n^2\cdot\left[1-\frac{5}{2}\cdot k\cdot\left(1-t_n\right)\cdot u_n^2+\frac{7}{4}\cdot k^2\cdot\left(1-t_n\right)^2\cdot u_n^4-\frac{3}{8}\cdot k^3\cdot\left(1-t_n\right)^3\cdot u_n^6\right]$$

Con el factor de amplificación calculado, se arma una tabla para avanzar los 5 pasos y obtener el valor de $u(0.5)$ con un paso de k=0.1.

n	t_n	$t_{n+\frac{1}{2}}$	$u_{n+\frac{1}{2}}$	u_{n+1}	g^n
0	0	0.05	-	1 (C. Inicial)	0.78136938
1	0.1	0.15	0.95	0.918549375	0.82355675
2	0.2	0.25	0.883673907	0.859895727	0.85722793
3	0.3	0.35	0.834462741	0.816316240	0.88472085
4	0.4	0.45	0.797277275	0.783374881	0.90782590
5	0.5	0.55	0.768952726	0.758367880	0.92782855

A partir de esta tabla obtenemos $u(0.5)=0.7583678808$.

c) Método de Euler Modificado (RK2) $\Rightarrow\begin{cases}u_{n+1}^*=u_n+k\cdot f\left(u_n,t_n\right)\\u_{n+1}=u_n+\frac{k}{2}\cdot\left[f\left(u_n,t_n\right)+f\left(u_{n+1}^*,t_{n+1}\right)\right]\end{cases}$

A partir de la ecuación diferencial dada, discretizo tomando $f\left(u_n,t_n\right)=-\left(1-t_n\right)\cdot u_n^3$ obteniendo:

$$\begin{cases}u_{n+1}^*=u_n-k\cdot\left(1-t_n\right)\cdot u_n^3\\u_{n+1}=u_n-\frac{k}{2}\cdot\left[\left(1-t_n\right)\cdot u_n^3+\left(1-t_{n+1}\right)\cdot\left(u_{n+1}^*\right)^3\right]\end{cases}$$

Para analizar la estabilidad perturbo: $\begin{cases}u_n\rightarrow u_n+\delta u_n\\u_{n+1}\rightarrow u_{n+1}+\delta u_{n+1}\end{cases}$ y obtengo el factor de amplificación

$$g^n=\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n}.$$

Antes de perturbar, trabajo la expresión:

$$u_{n+1}=u_n-\frac{k}{2}\cdot\left\{\left(1-t_n\right)\cdot u_n^3+\left(1-t_{n+1}\right)\cdot\left[u_n-k\cdot\left(1-t_n\right)\cdot u_n^3\right]^3\right\}$$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{k}{2} \cdot \left\{ \left(1 - t_n\right) \cdot u_n^3 + \left(1 - t_{n+1}\right) \cdot \left[u_n^3 - 3 \cdot k \cdot \left(1 - t_n\right) \cdot u_n^5 + 3 \cdot k^2 \cdot \left(1 - t_n\right)^2 \cdot u_n^7 - k^3 \cdot \left(1 - t_n\right)^3 \cdot u_n^9 \right] \right\}$$

Ahora perturbo:

$$u_{n+1} + \delta u_{n+1} = u_n + \delta u_n - \frac{k}{2} \cdot \left\{ \left(1 - t_n\right) \cdot \left(u_n + \delta u_n\right)^3 + \left(1 - t_{n+1}\right) \cdot \left[\begin{array}{l} \left(u_n + \delta u_n\right)^3 - 3 \cdot k \cdot \left(1 - t_n\right) \cdot \left(u_n + \delta u_n\right)^5 + \\ +3 \cdot k^2 \cdot \left(1 - t_n\right)^2 \cdot \left(u_n + \delta u_n\right)^7 - k^3 \cdot \left(1 - t_n\right)^3 \cdot \left(u_n + \delta u_n\right)^9 \end{array} \right] \right\}$$

Como utilizaremos una aproximación lineal para la perturbación, los términos que no son lineales se los desprecia.

$$u_{n+1} + \delta u_{n+1} = u_n + \delta u_n - \frac{k}{2} \cdot \left\{ \left(1 - t_n\right) \cdot \left(u_n^3 + 3 \cdot u_n^2 \cdot \delta u_n\right) + \left(1 - t_{n+1}\right) \cdot \left[\begin{array}{l} \left(u_n^3 + 3 \cdot u_n^2 \cdot \delta u_n\right) - 3 \cdot k \cdot \left(1 - t_n\right) \cdot \left(u_n^5 + 5 \cdot u_n^4 \cdot \delta u_n\right) + \\ +3 \cdot k^2 \cdot \left(1 - t_n\right)^2 \cdot \left(u_n^7 + 7 \cdot u_n^6 \cdot \delta u_n\right) - k^3 \cdot \left(1 - t_n\right)^3 \cdot \left(u_n^9 + 9 \cdot u_n^8 \cdot \delta u_n \right. \end{array} \right.$$

$$\cancel{u_{n+1}} + \delta u_{n+1} = \cancel{u_n} + \delta u_n - \frac{k}{2} \cdot \left\{ \left(1 - t_n\right) \cdot \left(\cancel{u_n^3} + 3 \cdot u_n^2 \cdot \delta u_n\right) + \left(1 - t_{n+1}\right) \cdot \left[\begin{array}{l} \left(\cancel{u_n^3} + 3 \cdot u_n^2 \cdot \delta u_n\right) - 3 \cdot k \cdot \left(1 - t_n\right) \cdot \left(\cancel{u_n^5} + 5 \cdot u_n^4 \cdot \delta u_n\right) + \\ +3 \cdot k^2 \cdot \left(1 - t_n\right)^2 \cdot \left(\cancel{u_n^7} + 7 \cdot u_n^6 \cdot \delta u_n\right) - k^3 \cdot \left(1 - t_n\right)^3 \cdot \left(\cancel{u_n^9} + 9 \cdot u_n^8 \cdot \delta \right. \end{array} \right.$$

$$g^n = \frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = 1 - \frac{3}{2} \cdot k \cdot u_n^2 \cdot \left[\begin{array}{l} \left(1 - t_n\right) + \left(1 - t_{n+1}\right) - \left(1 - t_{n+1}\right) \cdot \left(1 - t_n\right) \cdot k \cdot 5 \cdot u_n^2 + \\ +\left(1 - t_{n+1}\right) \cdot \left(1 - t_n\right)^2 \cdot k^2 \cdot 7 \cdot u_n^4 - \left(1 - t_{n+1}\right) \cdot \left(1 - t_n\right)^3 \cdot k^3 \cdot 3 \cdot u_n^6 \end{array} \right]$$

Con el factor de amplificación calculado, se arma una tabla para avanzar los 5 pasos y obtener el valor de $u\left(0.5\right)$ con un paso de k=0.1.

n	t_n	t_{n+1}	u_{n+1}^*	u_{n+1}	g^n
0	0	0.1	-	1 (C. Inicial)	0.54691
1	0.1	0.2	0.9	0.9171950	0.63955676
2	0.2	0.3	0.847751248	0.85810294	0.71053006
3	0.3	0.4	0.807554460	0.814396235	0.76728348
4	0.4	0.5	0.776586354	0.781440835	0.81441855
5	0.5	0.6	0.752809635	0.756459384	0.85493246

A partir de esta tabla obtenemos $u\left(0.5\right) = 0.756459384$.