

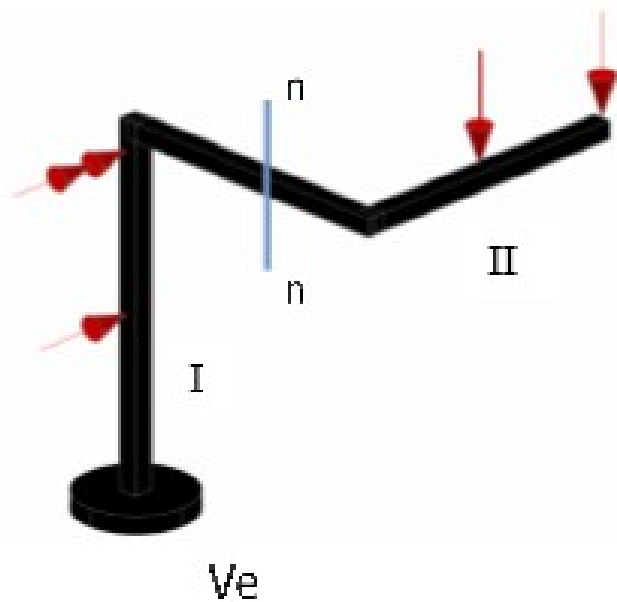
# Diagramas de Esfuerzos Característicos

# Objetivos

- Realizar un gráfico representativo de los esfuerzos internos
- Calcular esos esfuerzos internos y determinar la o las secciones más comprometidas en estructuras en equilibrio
- Cuando se vean las distintas solicitaciones se calcularán las estructuras en función del sistema de cargas y para la/las sección/es más comprometidas

**Dimensionamiento de las estructuras**

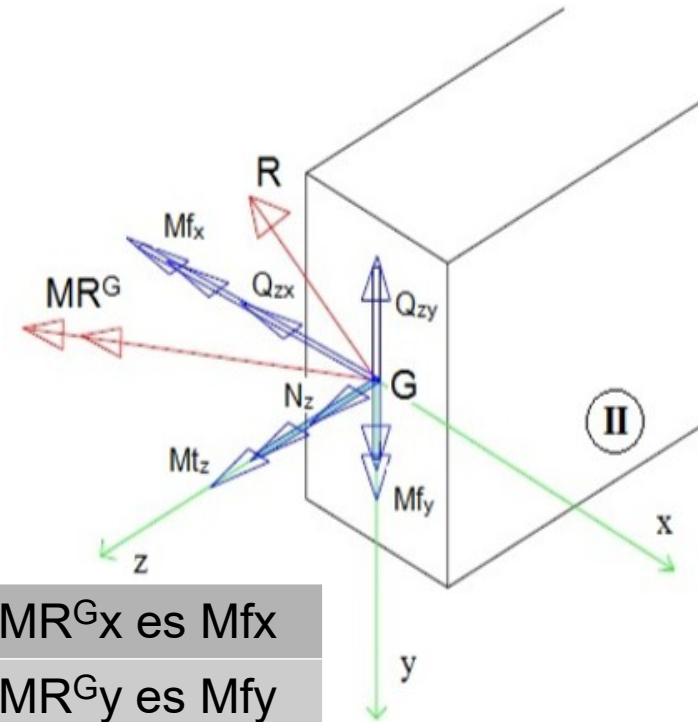
# Esfuerzos internos



Sea una estructura espacial como la mostrada en la figura, sometida a un conjunto de cargas o fuerzas espaciales activas exteriores que configuran un sistema Gauso (sistema general de fuerzas que no admite resultante única); y equilibrada a través de su vinculación física a tierra (sistema de cargas reactivas exteriores).

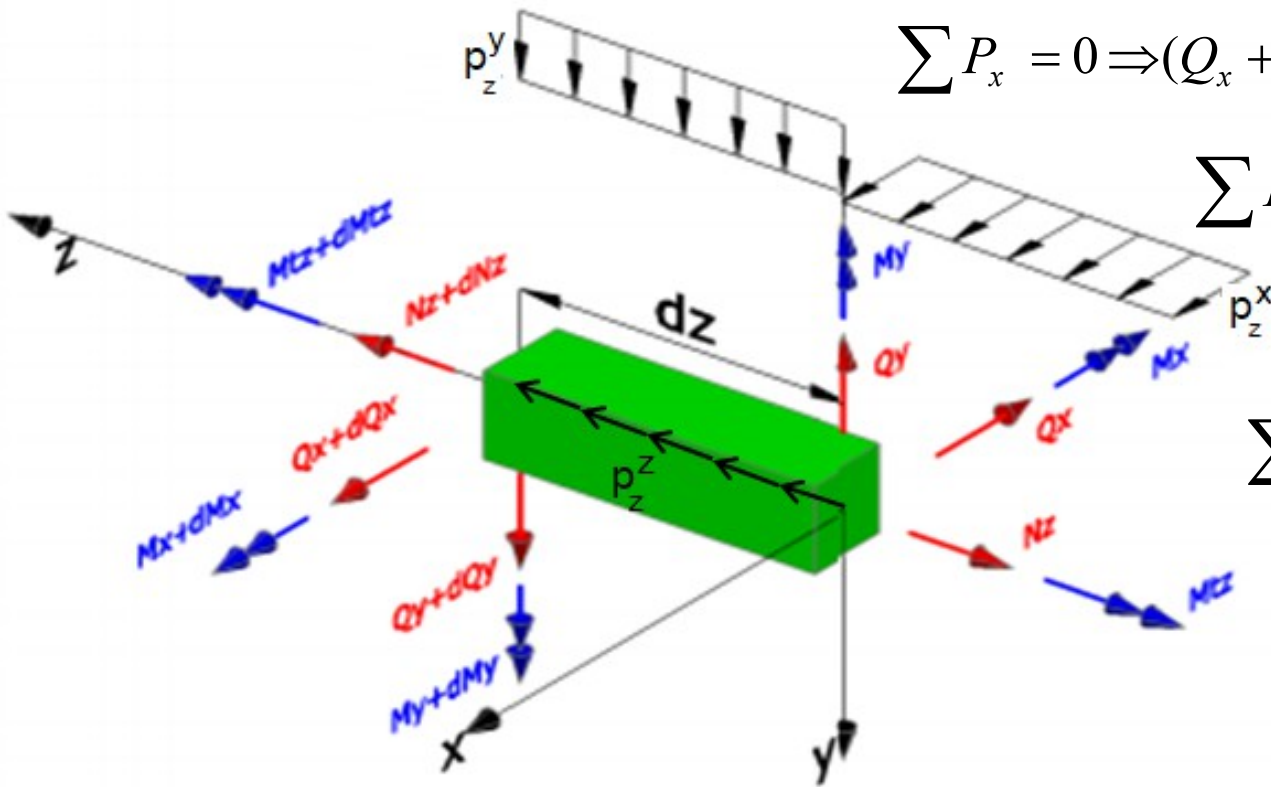
Si consideramos una sección genérica n-n que divide a la estructura en dos partes, la I y la II (algunos autores llaman izquierda y derecha), quedan también dos sistemas de fuerzas generalizados que incluyen las reacciones de vínculo externo  $V_e$

Si reducimos al baricentro de la sección genérica n-n los sistemas de fuerzas I y II, obtenemos dos binomios de reducción. Cada uno es equivalente al sistema que lo define y entre ambos constituyen un sistema nulo, ya que toda la estructura está en equilibrio. Si consideramos sólo el binomio de reducción de la parte I y lo aplicamos en el baricentro G de la cara derecha de la parte II y proyectamos las componentes de cada vector ( $R$  y  $MR^G$ ) sobre la terna izquierda indicada, obtenemos las denominadas características, reacciones de vínculo internas o esfuerzos internos en la sección n-n:



$R_x$ es $Q_{zx}$	$MR^G_x$ es $M_{fx}$
$R_y$ es $Q_{zy}$	$MR^G_y$ es $M_{fy}$
$R_z$ es $N_z$	$MR^G_z$ es $M_{tz}$

# RELACIONES DIFERENCIALES



$$\sum P_x = 0 \Rightarrow (Q_x + dQ_x) + p_z^x \cdot dz - Q_x = 0 \quad 1) p_z^x = \frac{-dQ_x}{dz}$$

$$\sum P_y = 0 \Rightarrow (Q_y + dQ_y) + p_z^y \cdot dz - Q_y = 0$$

$$2) p_z^y = \frac{-dQ_y}{dz}$$

$$\sum P_z = 0 \Rightarrow (N_z + dN_z) + p_z^z \cdot dz - N_z = 0$$

$$3) p_z^z = \frac{-dN_z}{dz}$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow (M_x + dM_x) - p_z^y \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} - M_x - (Q_y + dQ_y) \cdot dz = 0$$

$$4) Q_y = \frac{dM_x}{dz}$$

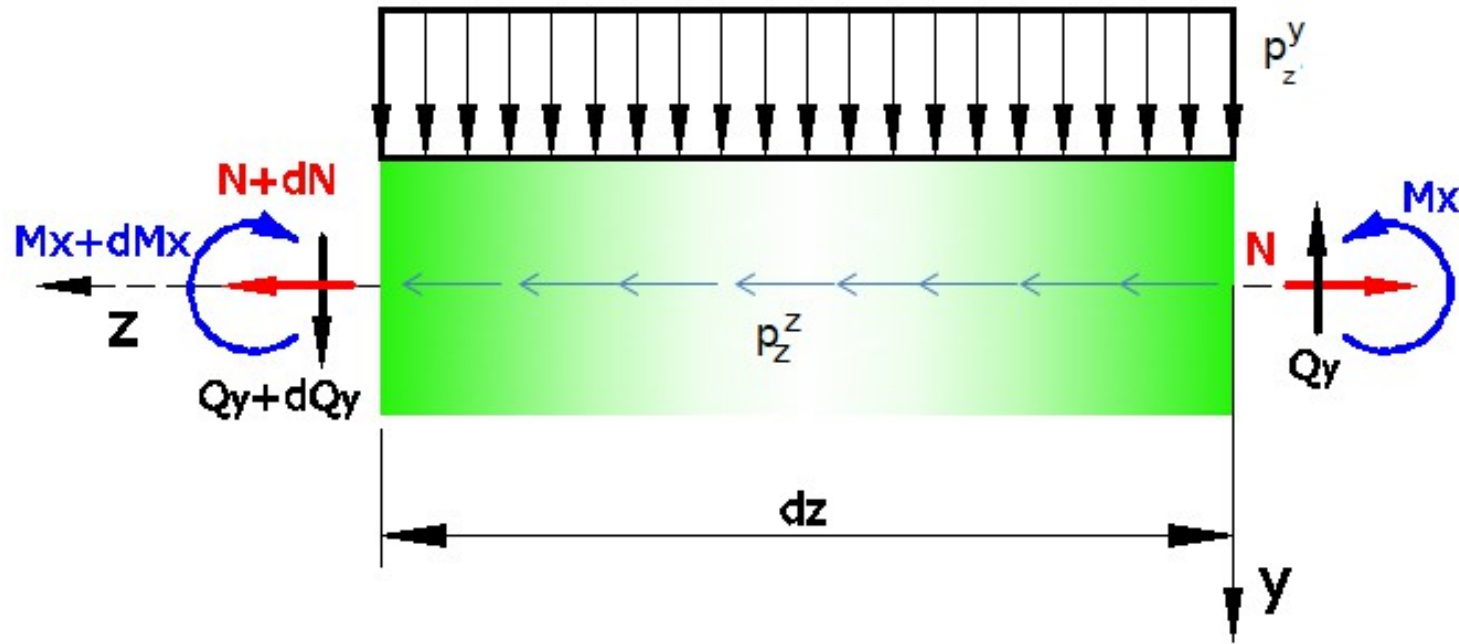
$$\sum M_y = 0 \Rightarrow (M_y + dM_y) + p_z^x \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} - M_y + (Q_x + dQ_x) \cdot dz = 0$$

$$5) Q_x = -\frac{dM_y}{dz}$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow (M_{tz} + dM_{tz}) - M_{tz} = 0$$

$$6) dM_t = 0$$

# Sistemas Planos: Relaciones diferenciales para el plano z-y



$$\sum P_y = 0 \Rightarrow (Q_y + dQ_y) + p_z^y \cdot dz - Q_y = 0 \quad p_z^y = \frac{-dQ_y}{dz}$$

$$\sum P_z = 0 \Rightarrow (N_z + dN_z) + p_z^z \cdot dz - N_z = 0 \quad p_z^z = \frac{-dN_z}{dz}$$

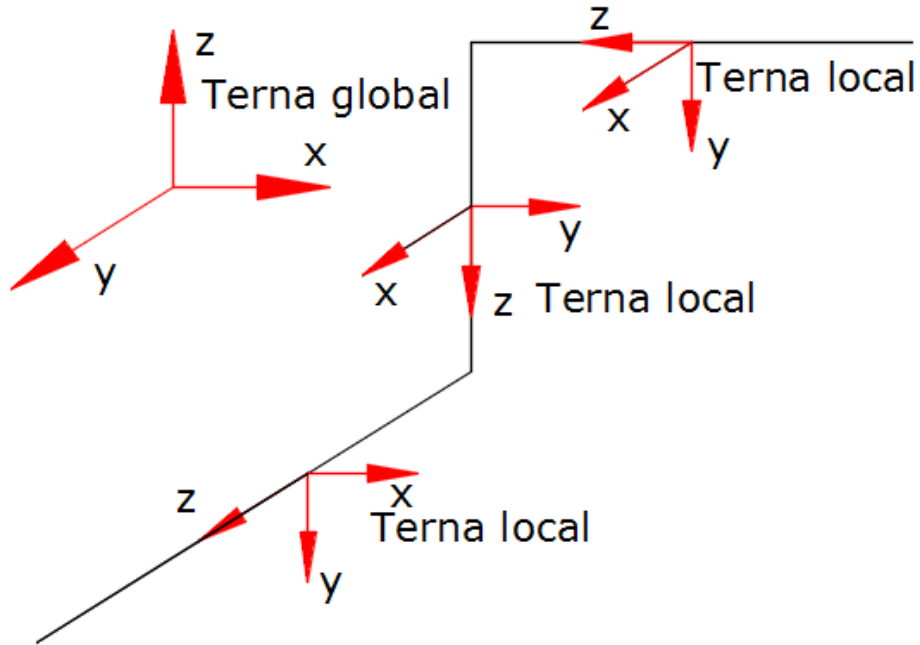
$$\sum M_x = 0 \Rightarrow (M_x + dM_x) - p_z^y \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} - M_x - (Q_y + dQ_y) \cdot dz = 0 \quad Q_y = \frac{dM_x}{dz}$$

# DIAGRAMAS DE CARACTERISTICAS

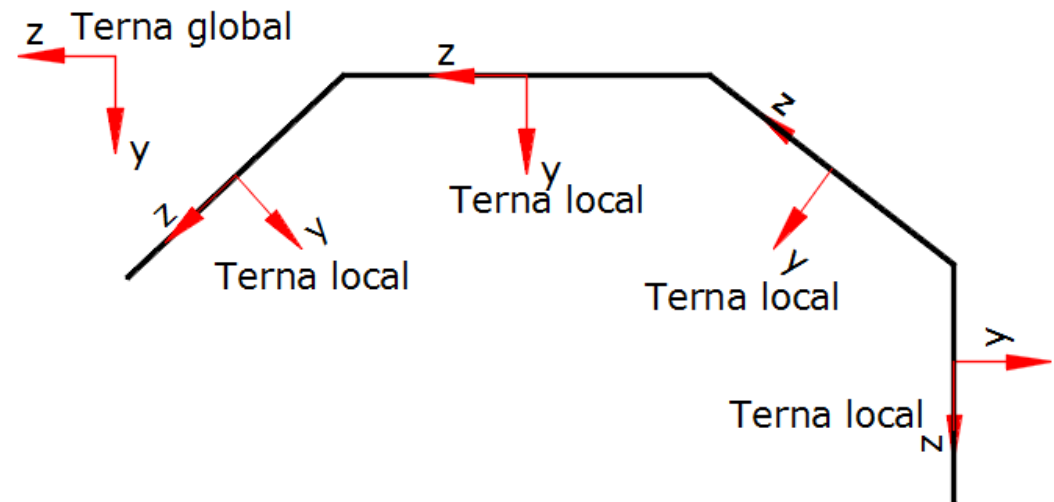
- Es la representación de los valores de las características.
- Convención de signos: uso de terna izquierda, global y local. Eje z perpendicular al plano de la sección en la cara “positiva” - apunta a la parte I suprimida -.
- Signo: es el que resulta cuando reduzco el sistema de cargas de la parte I y queda representado en la sección correspondiente a la parte II. Si vengo de la parte II le tengo que cambiar el signo para ser coherente con el trazado del Diagrama en cuestión.
- Deberá resultar el esfuerzo de tracción positivo y el esfuerzo de compresión negativo

# CONVENCIONES DE SIGNOS

## Convención sistemas espaciales



## Convención sistemas planos



# VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

## Ejemplo . Resolución grafica

$$p_z^y = \frac{-dQ_y}{dz}$$

$$p_z^y = \frac{-\Delta Q_y}{\Delta z}$$

$$\Delta Q_y = -p_z^y \cdot \Delta z$$

$$\Delta Q_y = -0,5 \frac{t}{m} \cdot 1m$$

$$\Delta Q_y = -0,5t$$

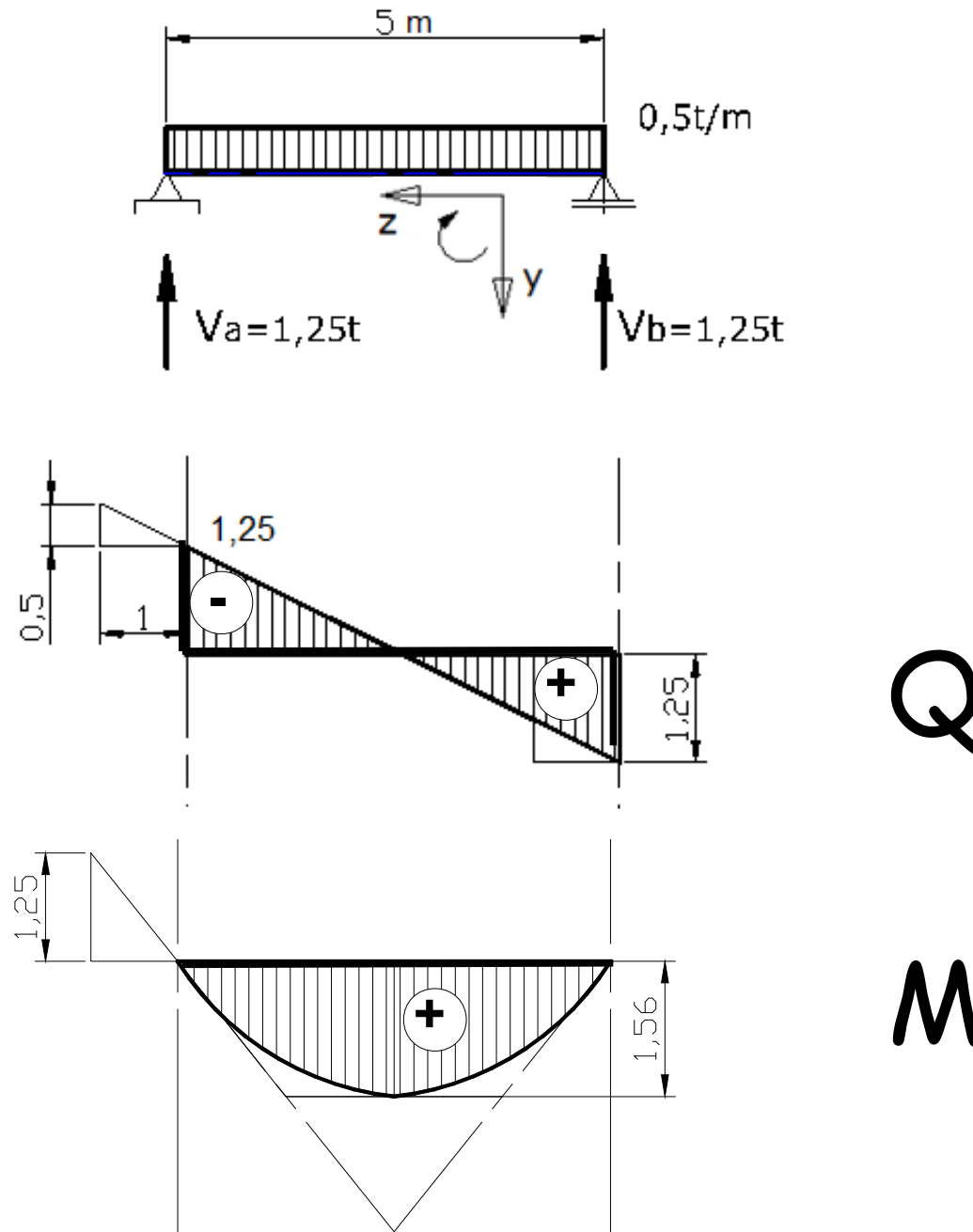
$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}$$

$$Q_y = \frac{\Delta M_x}{\Delta z}$$

$$\Delta M_x = Q_y \cdot \Delta z$$

$$\Delta M_x = -1,25t \cdot 1m$$

$$\Delta M_x = -1,25tm$$



# Pasos a seguir

## 1) Análisis CINEMÁTICO:

- a) Grados de libertad =  $n^{\circ}$  de restricciones o vínculos (isostáticamente sustentado).
- b) No debe existir configuración de Vínculo Aparente (cinemáticamente invariable).

## 2) Cálculo de Reacciones de vínculo:

- a) Se define y dibuja la terna global de referencia con el sentido de momentos positivos.
- b) Se dibuja el Diagrama de Cuerpo Libre con sentidos arbitrarios de las incógnitas o reacciones.
- c) Plantear las Ecuaciones generales de Equilibrio para hallar las reacciones en los vínculos.

## 3) Trazado de DIAGRAMAS:

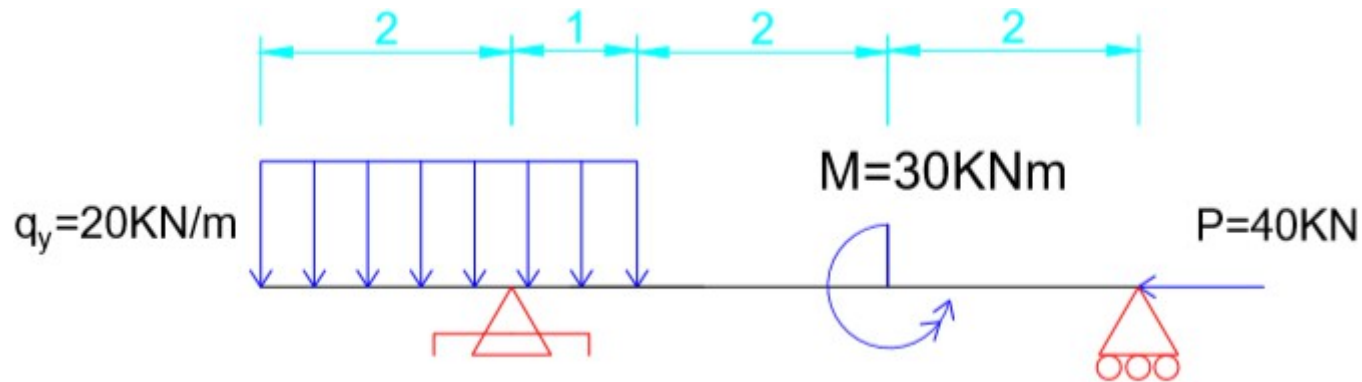
- a) Se vuelve a dibujar el diagrama de cuerpo libre con los sentidos correctos de las reacciones de vínculo (Diagrama de Cuerpo Libre Equilibrado).
- b) Se dibujan las ternas locales para cada tramo de barra (recordar que la terna local es la asignada para la cara derecha del corte imaginario realizado a la estructura, donde se pondrán de manifiesto los esfuerzos o binomio de reducción del lado izquierdo).
- c) Ingreso a cada tramo por el lado izquierdo y considero sólo lo que dejo detrás al recorrer la estructura: Para cada tramo en estudio se deben posicionar sobre la línea L-R, en su respectiva escala y con el signo correcto, los valores de la característica en estudio para los puntos singulares del tramo. Recordamos que serán puntos singulares de la viga aquellos donde existan: Cambios de dirección; Cambios en las cargas puntuales (puntos de aplicación de cargas puntuales: fuerzas o cuplas), Inicio o finalización de cargas distribuidas (puntos de inicio y finalización de diagramas de carga  $q_y$  ó  $q_x$ ).
- d) Cálculo de Esfuerzos de corte en puntos singulares.
- e) Cálculo de Momentos flectores en puntos singulares.
- f) Cálculo de Esfuerzos normales en puntos singulares.
- g) Se asignan Escalas para: longitudes, para  $N_z$ ,  $Q_{zy}$  y  $M_{fx}$ .

- Se trazan los DIAGRAMAS trazando primeramente las pendientes tomando en cuenta las relaciones diferenciales:  $q_y = -dQ_{zy}/dz$ ;  $q_z = -dN_z/dz$ ;  $Q_{zy} = dM_{fx}/dz$ ; y considerando que:
- Para curvas de 2º grado las tangentes extremas a un arco de la misma se cortan sobre la vertical del punto medio de la cuerda correspondiente, y definen, sobre dicha vertical un segmento cuya longitud, medida desde la cuerda, es igual al doble de la flecha de la parábola.
- Para curvas de 3º grado las tangentes extremas a un arco de la misma se cortan sobre la recta de acción de la resultante del diagrama de cargas

# Ejercicio ejemplo - Pasos a seguir

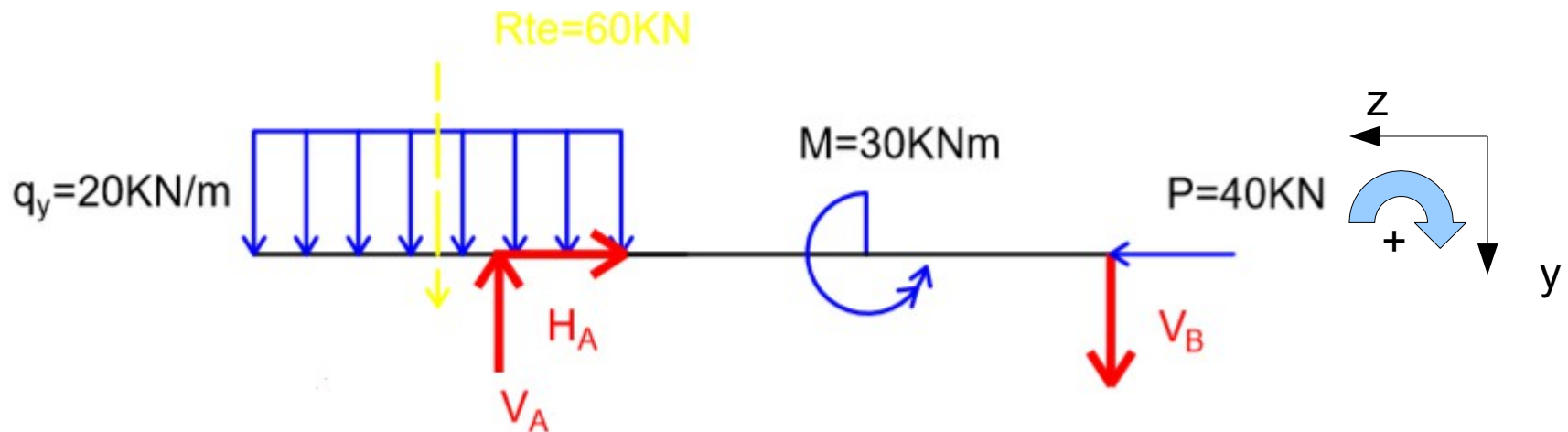
## 1) Análisis CINEMÁTICO:

- Grados de libertad = nº de restricciones o vínculos (isostáticamente sustentado).
- No debe existir configuración de Vínculo Aparente (cinemáticamente invariable).



## 2) Cálculo de Reacciones de vínculo:

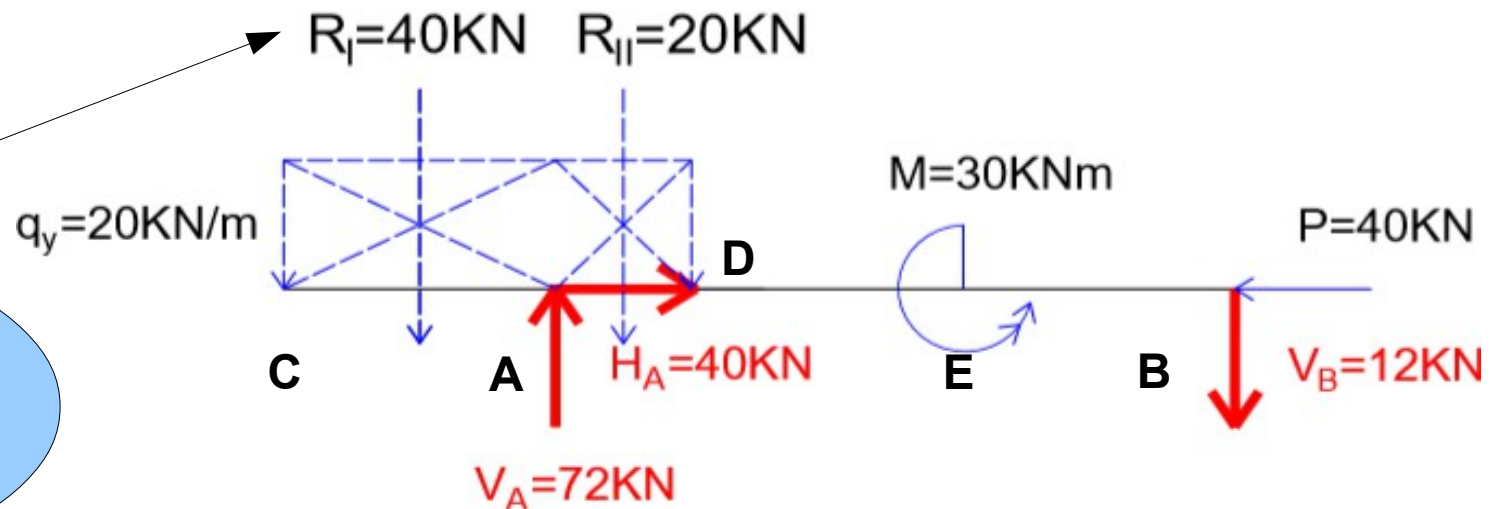
- Se define y dibuja la terna global de referencia con el sentido de momentos positivos.
- Se dibuja el Diagrama de Cuerpo Libre con sentidos arbitrarios de las incógnitas o reacciones.
- Plantear las Ecuaciones generales de Equilibrio para hallar las reacciones en los vínculos.



# Pasos a seguir

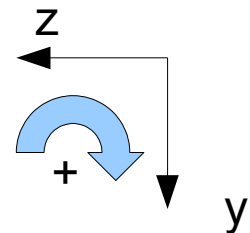
## 3) Trazado de DIAGRAMAS:

- Se vuelve a dibujar el diagrama de cuerpo libre con los sentidos correctos de las reacciones de vínculo (Diagrama de Cuerpo Libre Equilibrado).
  - Se dibujan las ternas locales para cada tramo de barra (recordar que la terna local es la asignada para la cara derecha del corte imaginario realizado a la estructura, donde se pondrán de manifiesto los esfuerzos o binomio de reducción del lado izquierdo).
- Ingreso a cada tramo por el lado izquierdo y considero sólo lo que deajo detrás al recorrer la estructura: Para cada tramo en estudio se deben posicionar sobre la línea L-R, en su respectiva escala y con el signo correcto, los valores de la característica en estudio para los puntos singulares del tramo. Recordamos que serán puntos singulares de la viga aquellos donde existan: Cambios de dirección; Cambios en las cargas puntuales (puntos de aplicación de cargas puntuales: fuerzas o cuplas), Inicio o finalización de cargas distribuidas (puntos de inicio y finalización de diagramas de carga  $q_y$  ó  $q_z$ ). En este caso son **A, B, C, D, E**



A veces conviene trabajar con más de 1 Rte:

En este caso la terna global coincide con la local



# Pasos a seguir

- d) Cálculo de Esfuerzos Nz en puntos singulares:

$$C' = 0 = A'$$

$$A'' = -H_A = -40 \text{ KN} = D = E = B'$$

- e) Cálculo de Esfuerzos de corte Qzy en puntos singulares:

$$C' = 0 ; A' = R_I = 40 \text{ KN}$$

$$A'' = R_I - V_A = -32 \text{ KN} ;$$

$$D' = D'' = R_I - V_A + R_{II} = -12 \text{ KN} = E = B'$$

$$B' (\text{entrando x derecha}) = - [V_B]$$

- f) Cálculo de Momentos flexores Mfx en puntos singulares:

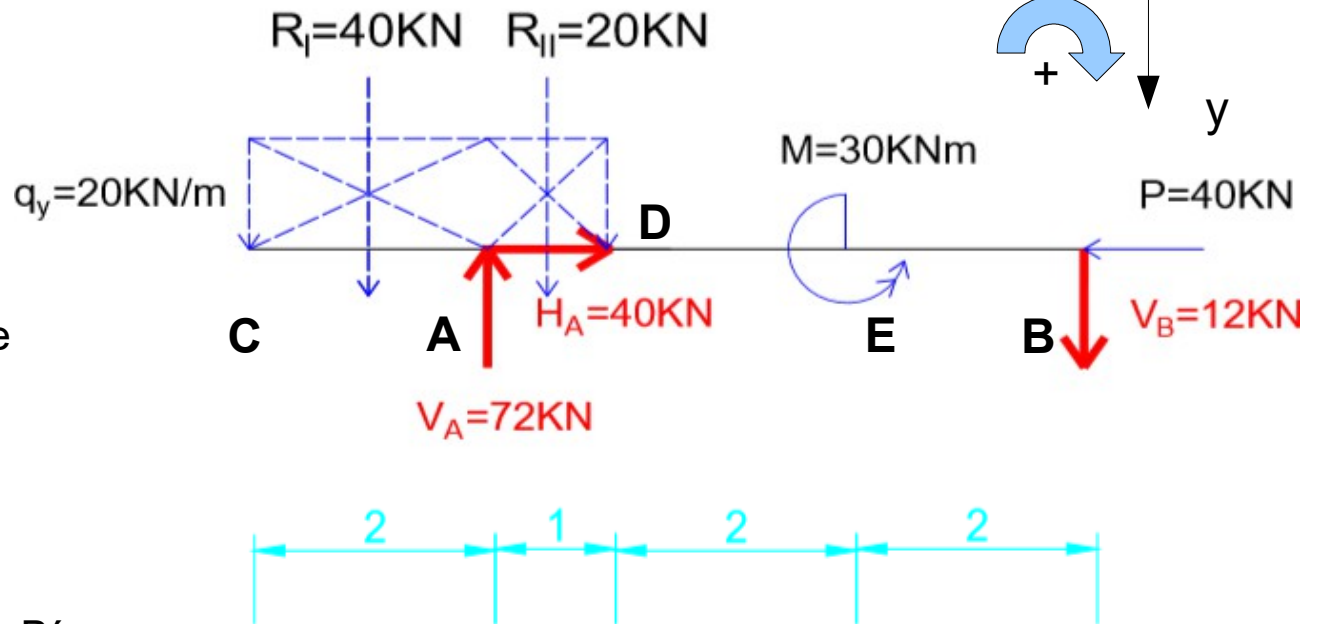
$$C = 0 ; A = -R_I \times 1 \text{ m} = -40 \text{ KNm}$$

$$D = -R_I \times 2 \text{ m} + V_A \times 1 \text{ m} - R_{II} \times 0,5 \text{ m} = -18 \text{ KNm}$$

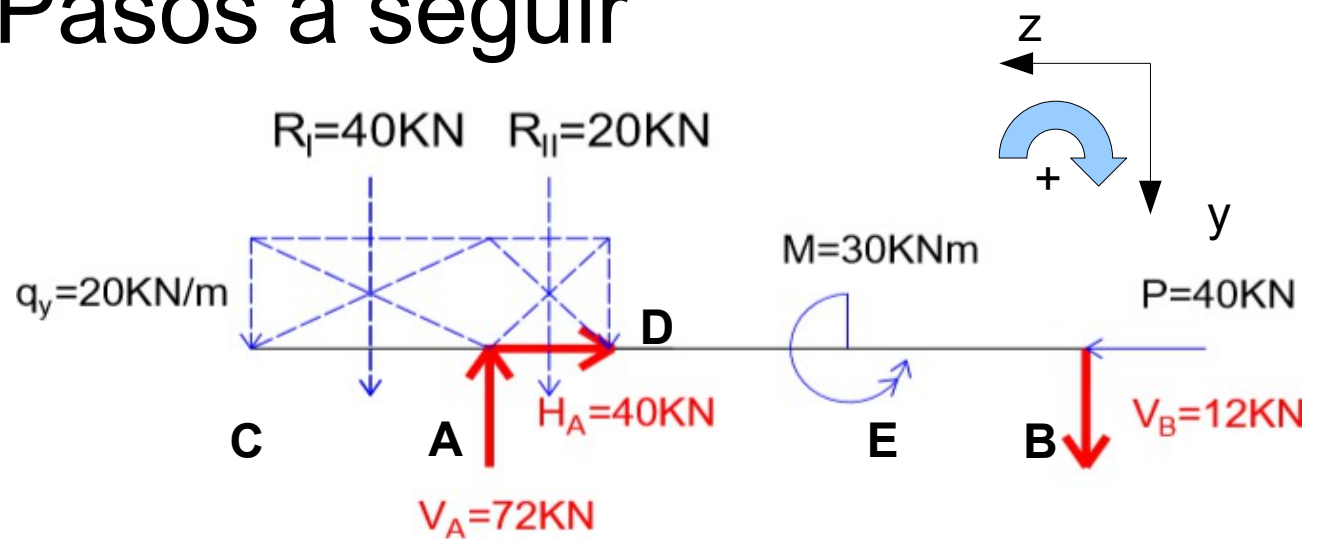
$$E' = -R_I \times 4 \text{ m} + V_A \times 3 \text{ m} - R_{II} \times 2,5 \text{ m} = 6 \text{ KNm}$$

$$E'' = E' - 30 \text{ KNm} = -24 \text{ KNm}$$

$$B' (\text{entrando x derecha}) = - [0]$$



# Pasos a seguir



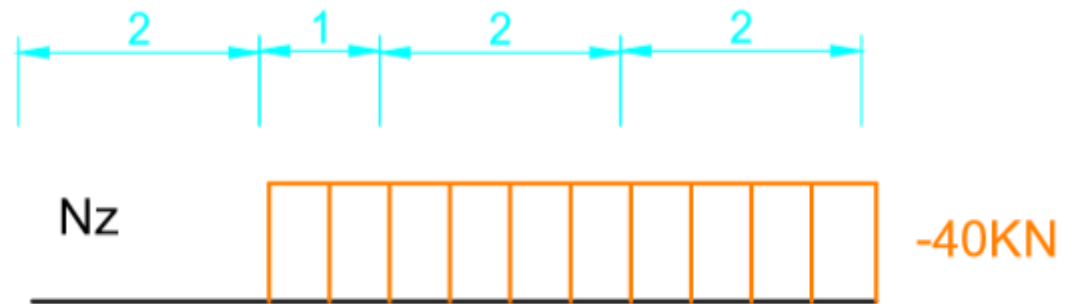
d) Cálculo de Esfuerzos Nz en puntos singulares:

$$C' = 0 = A'$$

$$A'' = -H_A = -40 \text{ kN} = D = E = B'$$

g) Se asigna una escala apropiada de longitudes para graficar la barra y otra apropiada de KN/cm para el gráfico Nz.

Nota: En este caso no hay carga distribuida sobre asociada al eje z. Si la hubiera, habría que tener en cuenta la relación diferencial  $qz = -dNz/dz$

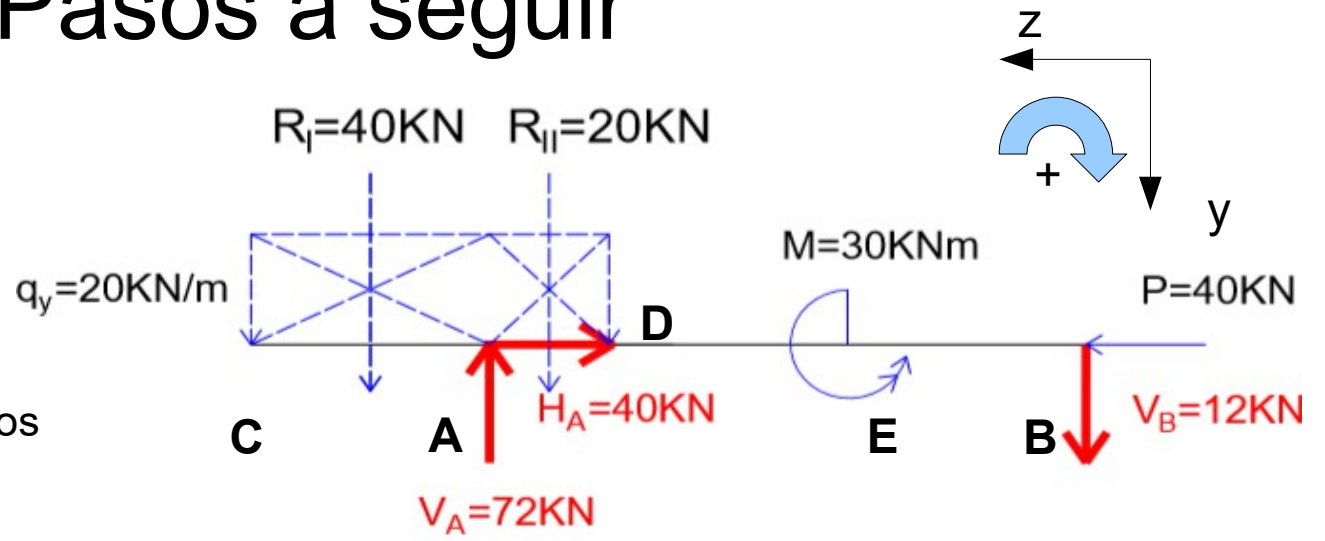


Esc Long:  
[m/cm]

Esc Nz:  
[kN/cm]

Nótese que, además de poner el signo y módulo de la característica en cuenstión ( $Nz = -40 \text{ kN}$  en este caso), se dibuja para el lado correspondiente al signo de acuerdo a la terna usada: - para arriba y + para abajo

# Pasos a seguir



d) Cálculo de Esfuerzos Qzy en puntos singulares:

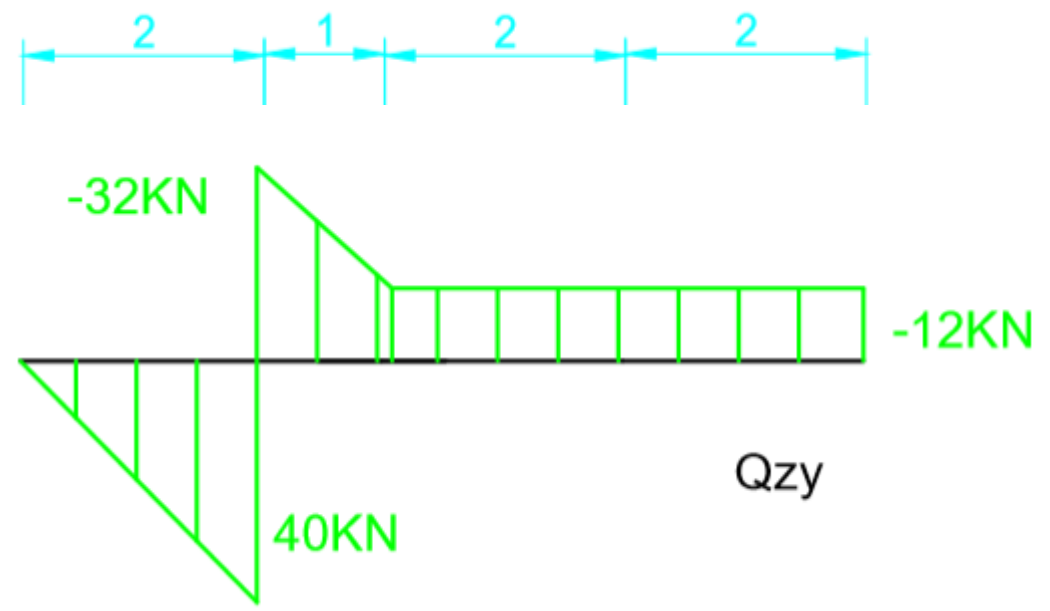
$$C' = 0 ; A' = R_I = 40 \text{ kN}$$

$$A'' = R_I - V_A = -32 \text{ kN} ;$$

$$D' = D'' = R_I - V_A + R_{II} = -12 \text{ kN} = E = B'$$

$$B'(\text{entrando x derecha}) = - [V_B]$$

g) Se dibuja la barra en la misma escala de longitudes usada antes y se asigna una escala apropiada para gráfico Qzy y se tiene en cuenta la relación diferencial  $q_y = - dQ_{zy} / dz$



Esc Long:  
[m/cm]

Esc Qzy:  
[kN/cm]

# Pasos a seguir

e) Cálculo de Momentos flexores  $M_{fx}$  en puntos singulares:

$$C=0 ; A=-R_I \times 1m = -40 \text{ KNm}$$

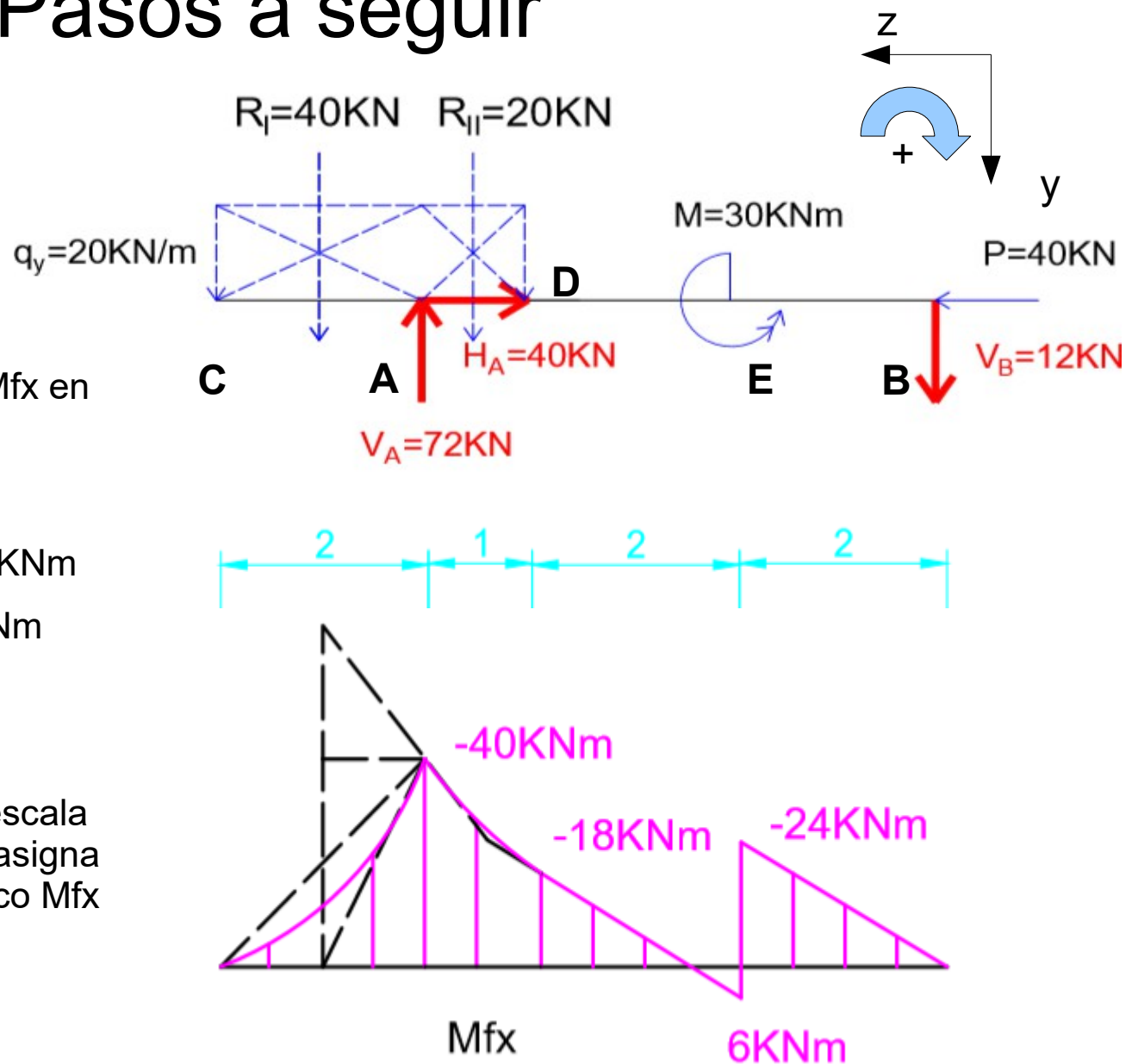
$$D=-R_I \times 2m + V_A \times 1m - R_{II} \times 0,5m = -18 \text{ KNm}$$

$$E' = R_I \times 4m + V_A \times 3m - R_{II} \times 2,5m = 6 \text{ KNm}$$

$$E'' = E' - 30 \text{ KNm} = -24 \text{ KNm}$$

$$B'(\text{entrando x derecha}) = - [0]$$

g) Se dibuja la barra en la misma escala de longitudes usada antes y se asigna una escala apropiada para gráfico  $M_{fx}$  y se tiene en cuenta la relación diferencial  $Q_{zy} = dM_{fx}/dz$

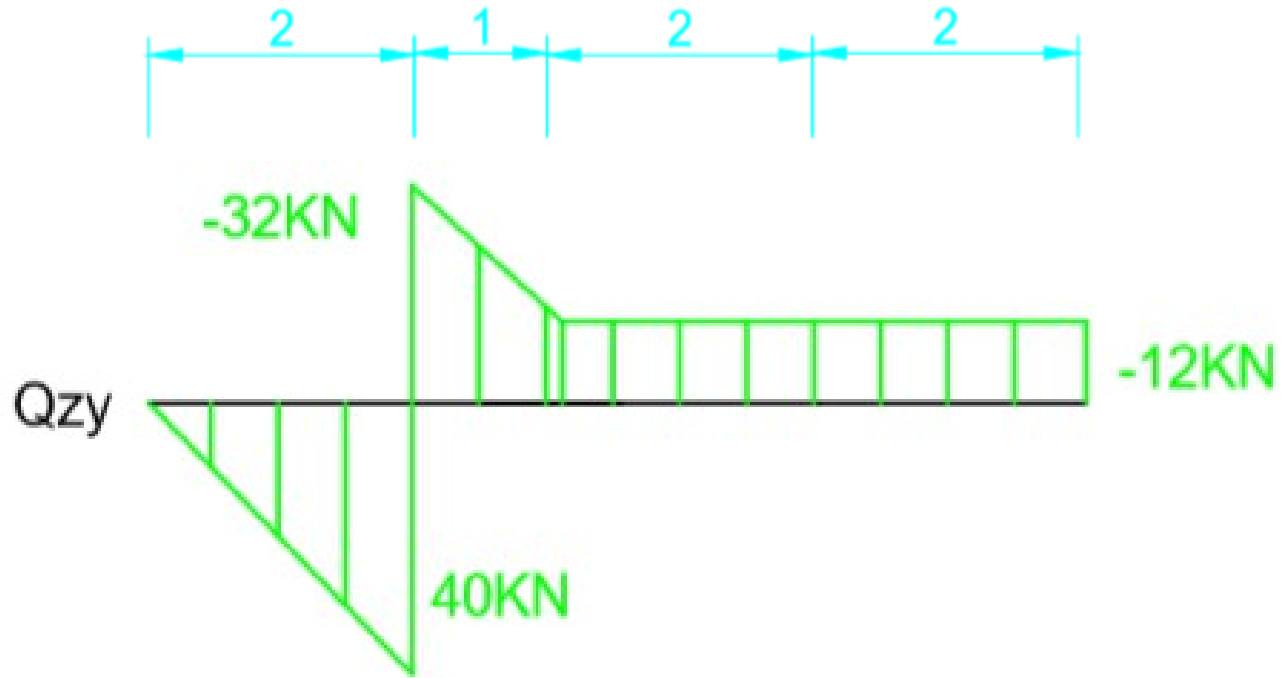


Esc Long:  
[m/cm]

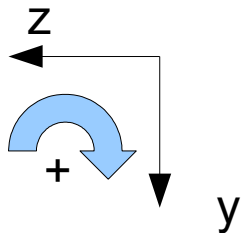
Esc  $M_{fx}$   
[KNm/cm]

# Relación entre Diagramas Qzy y Mfx

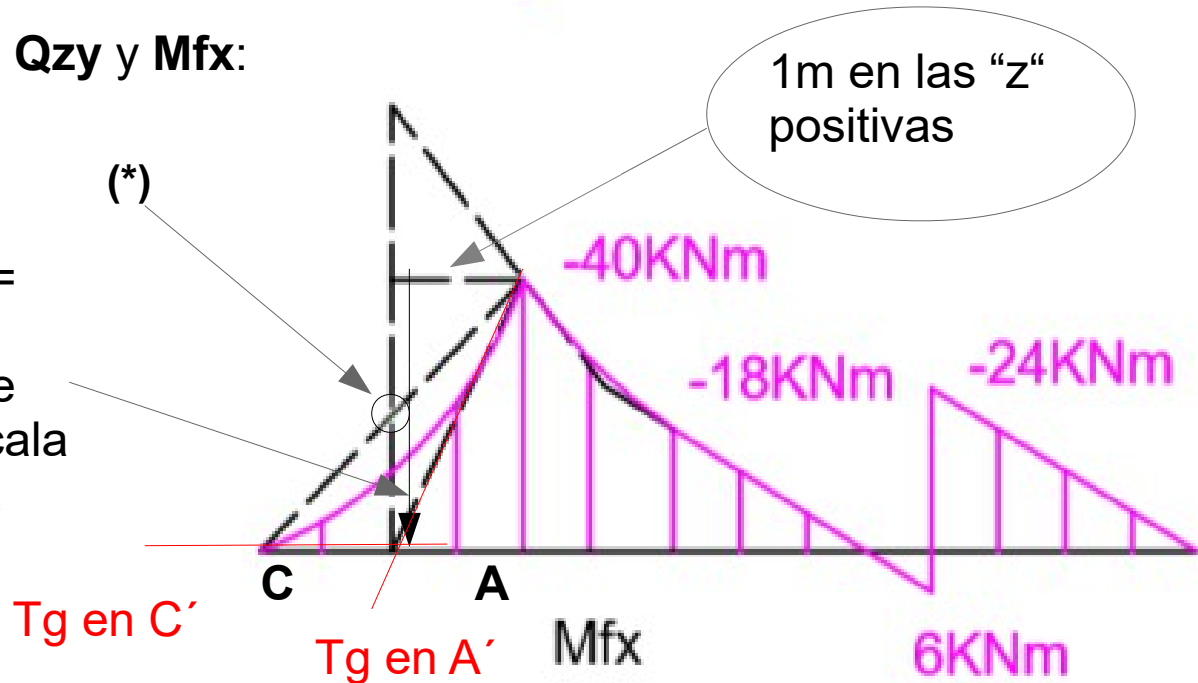
h) Se trazan los DIAGRAMAS trazando primeramente las pendientes extremas en los valores de los puntos singulares, tomando en cuenta las relaciones diferenciales:  $py = -dQzy / dz$   $Qzy = dMfx / dz$ ; y considerando que para curvas de 2º grado las tangentes extremas a un arco de la misma se cortan sobre la vertical del punto medio de la cuerda correspondiente (\*), y definen, sobre dicha vertical un segmento cuya longitud, medida desde la cuerda, es igual al doble de la flecha de la parábola.



En este caso la relación entre  $Qzy$  y  $Mfx$ :  
Como  $Qzy = \Delta Mfx / \Delta z$



$Qy$  en  $A'$  x 1m =  
[40kN x 1m] =  
40 kNm, que se  
dibuja en la escala  
del gráfico para  
abajo (positivo)

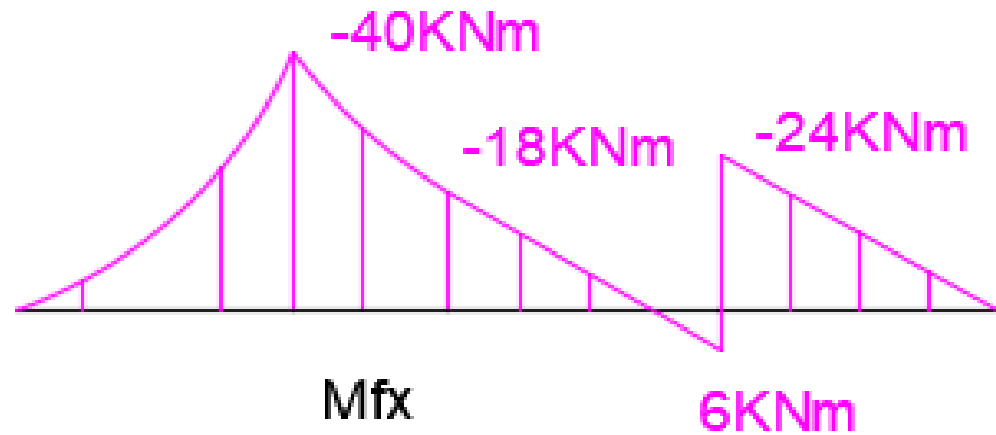
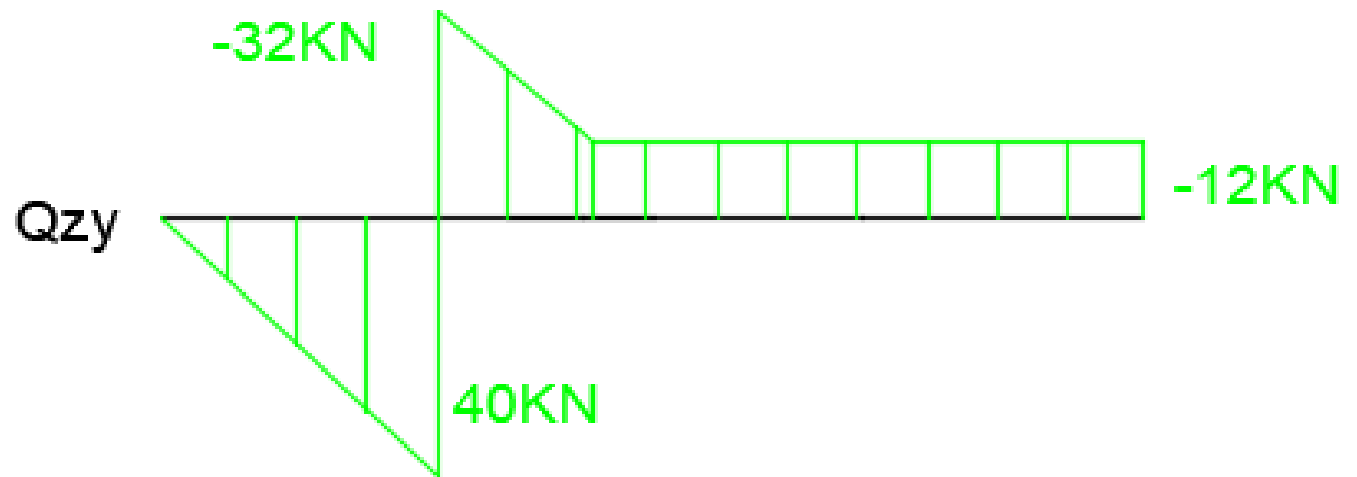
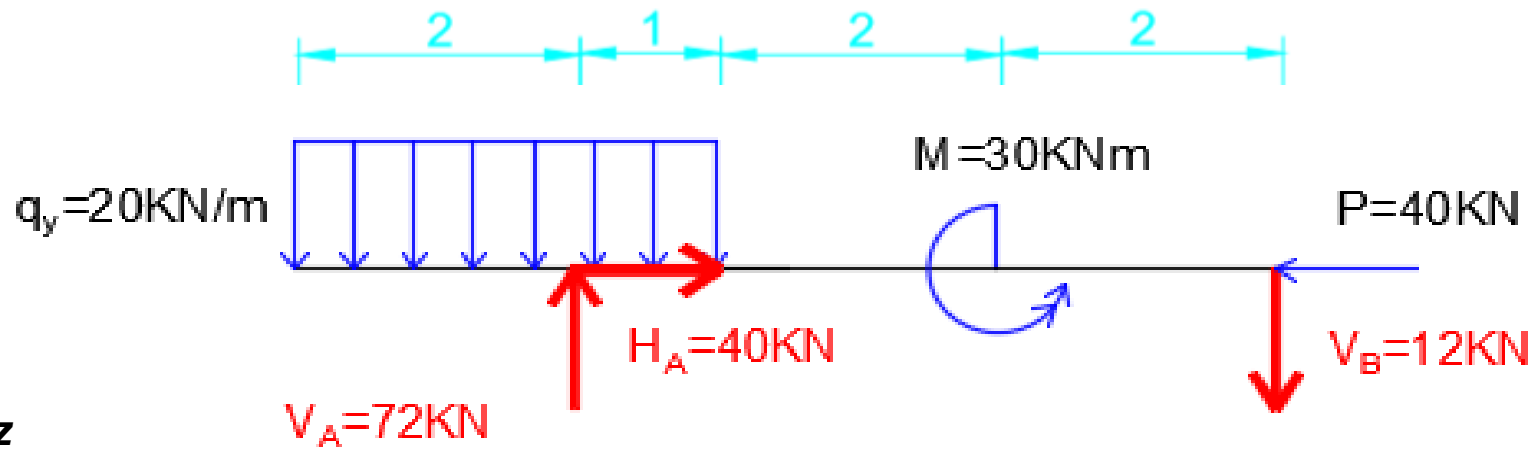
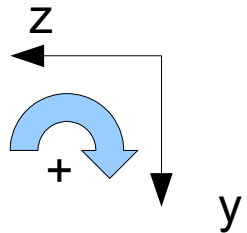


# Relación entre $q_y$ y DEC $Q_{zy}$ y $M_{fx}$

Relaciones diferenciales:

$$p_y = -dQ_{zy}/dz$$

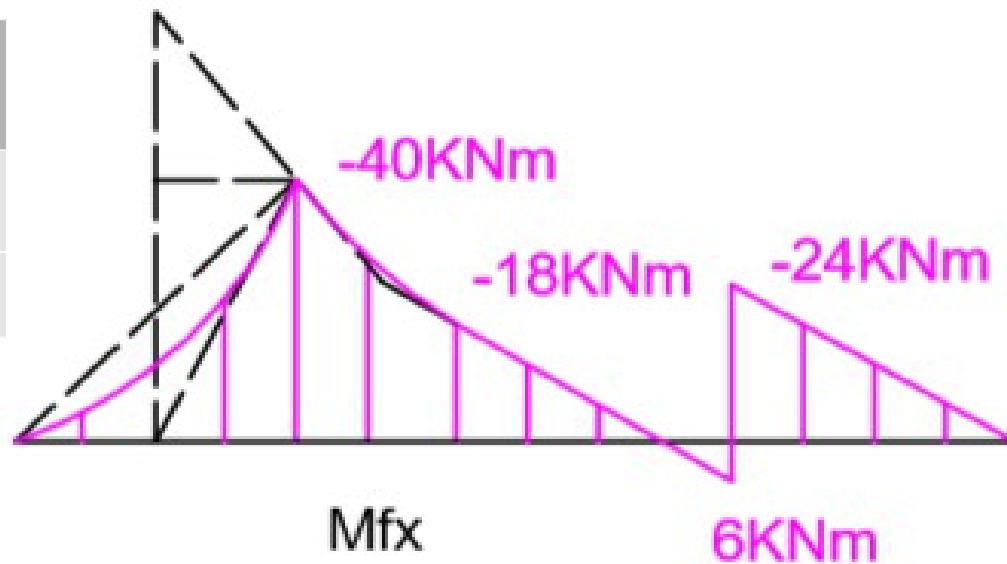
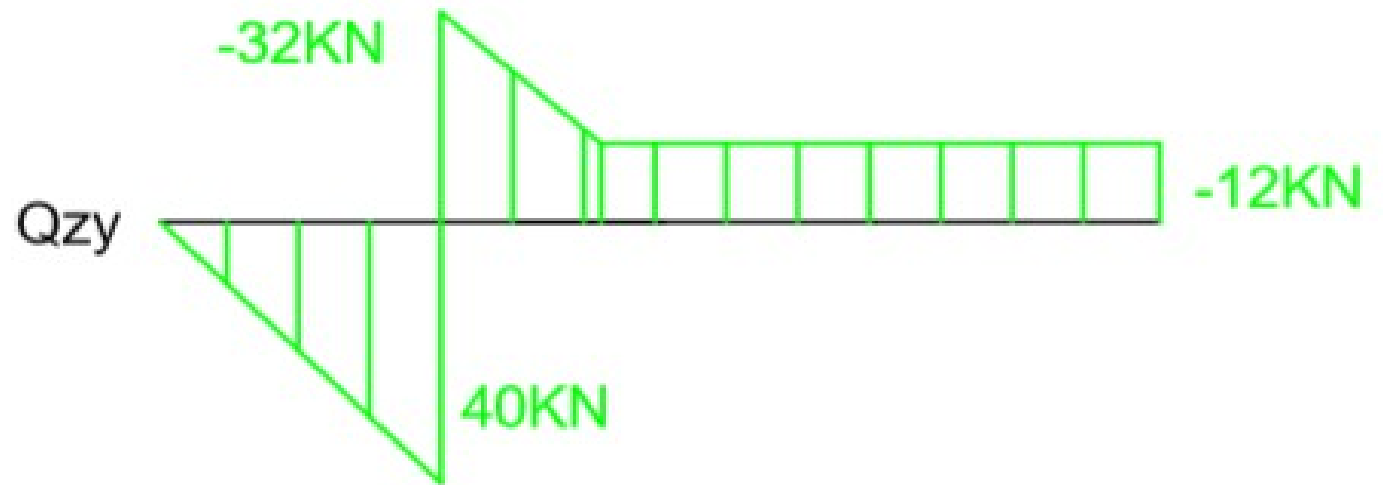
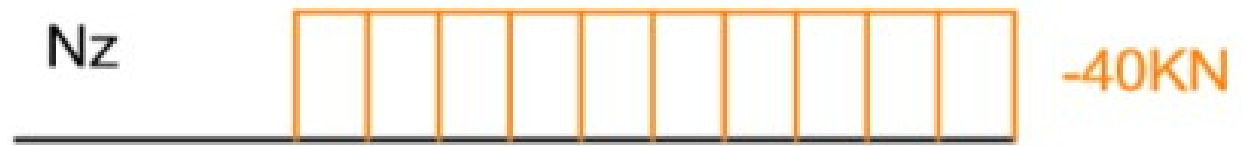
$$Q_{zy} = dM_{fx}/dz$$



# Diagramas de Esfuerzos Característicos

Valorizados y con sus signos

De ellos se ve claramente que las secciones más comprometidas son:



SECCIÓN	$N_z$ [KN]	$Q_{zy}$ [KN]	$M_{fx}$ [KNm]
A'	0	40	-40
A'''	-40	-32	-40