Tutorial Teoría de Colas
Parte 1

El tema debe estudiarse junto con:

- Miguel Miranda; Teoría de Colas (Educa)
- Guía de Trabajos Prácticos (tema 10)
- Tutoriales guía TP
- Material de apoyo del Campus


F
E
D
Worldwide British Airways IT
Free HEX to Paddington available
welcome to our home.

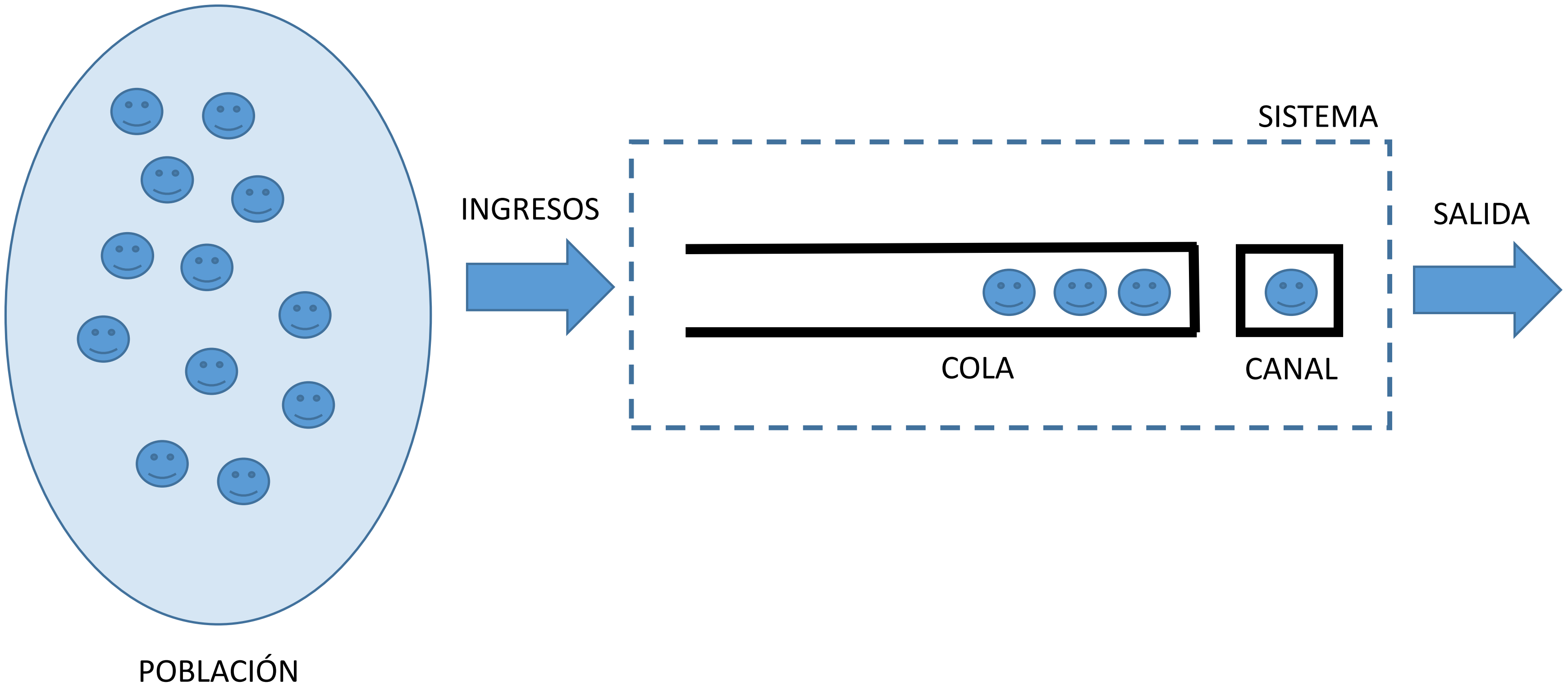

alamy


Manual
Manual
Manual
Manual
Manual
Manual
Recarga
CUIS
telepeaje
Camiones
y autos
Sólo
abonados


CAUTION:
LIGHT GUIDE CABLE
DANGER

Tutorial Teoría de Colas

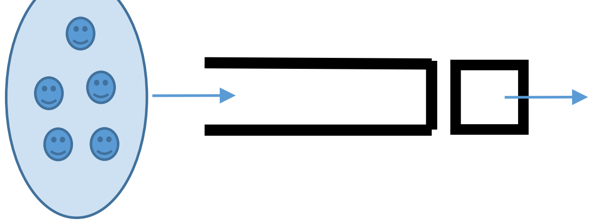
Elementos básicos que componen un sistema de atención



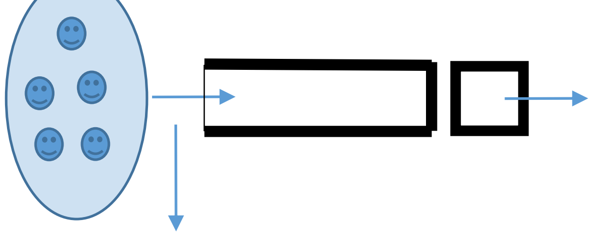
Tutorial Teoría de Colas

Configuraciones posibles

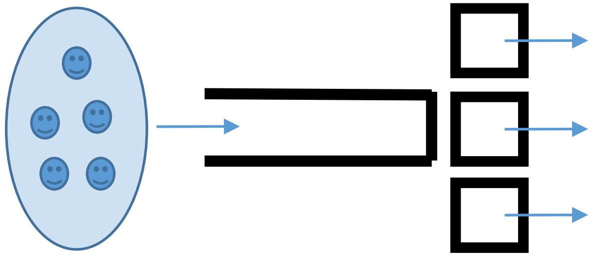
Cola infinita un canal de atención



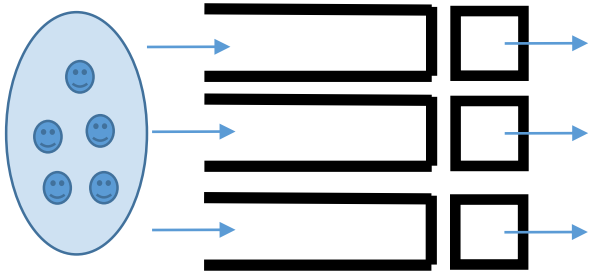
Cola finita un canal de atención



Cola infinita con varios canales de atención



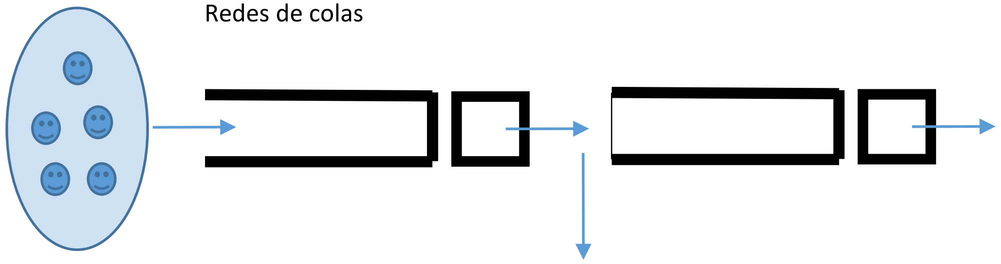
Varias colas de atención en paralelo



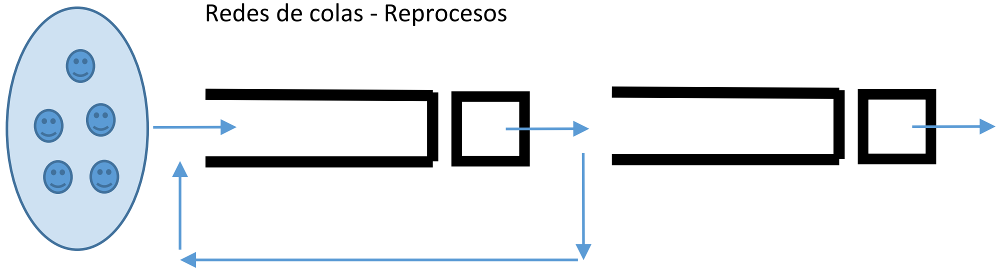
Tutorial Teoría de Colas

Configuraciones posibles

Redes de colas



Redes de colas - Reprocesos

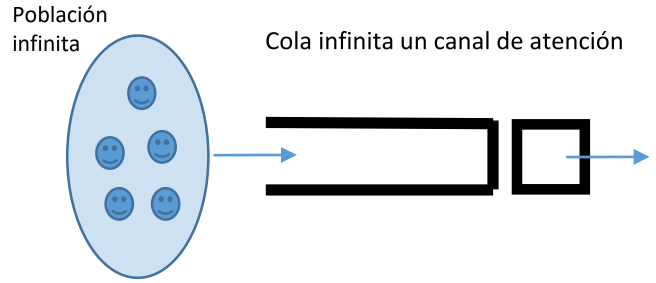


Tutorial Teoría de Colas

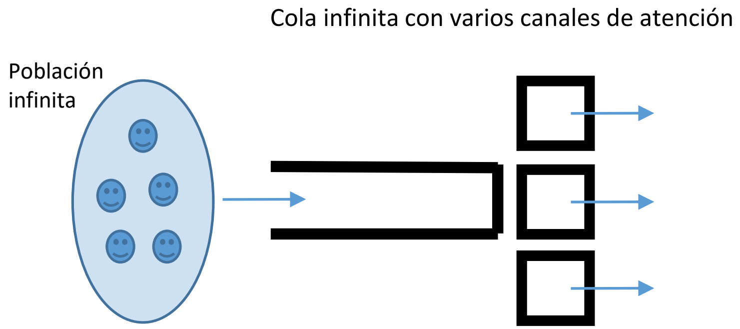
Notación de Kendall

1 / 2 / 3 / 4 / 5 / (6)

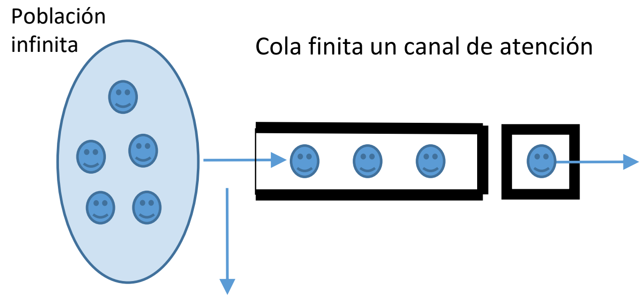
1: Patrón de arribos al sistema
   P=Poisson; G=cualquier otro
2: Patrón de servicios en los canales
   P=Poisson; G=cualquier otro
3: Número de canales dispuestos en paralelo
4: Capacidad del sistema
5: Disciplina de atención (FIFO, LIFO….)
6: Tamaño de la población



P/P/1



P/P/3



P/P/1/4

Tutorial Teoría de Colas

Objetivo del estudio de un sistema de atención

<u>Parámetros de Calidad</u>

- Tiempo de espera en el sistema
- Tiempo de espera en cola
- Cantidad de clientes en el sistema
- Cantidad de clientes en cola
- Cantidad de clientes no atendidos

Costos por insatisfacción o costos de oportunidad

<u>Diseño del sistema de atención</u>

- Capacidad del sistema
- Cantidad de canales de atención
- Configuración de los canales
- Reglas de servicio
- Velocidad de atención

Costos de operación

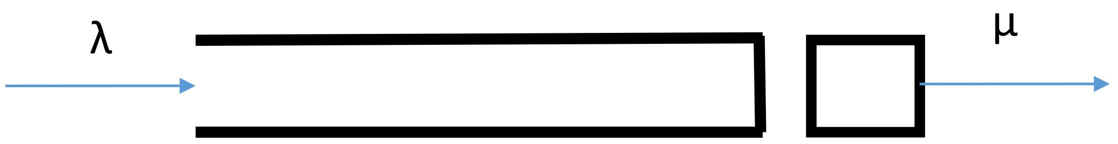
Tutorial Teoría de Colas

Régimen de arribos y servicios

En el proceso en estudio se producen dos fenómenos aleatorios:

- Los arribos
- Los servicios

Supondremos que ambos responden a procesos de tipo Poisson de media ʎ para los arribos y de media µ para los servicios.



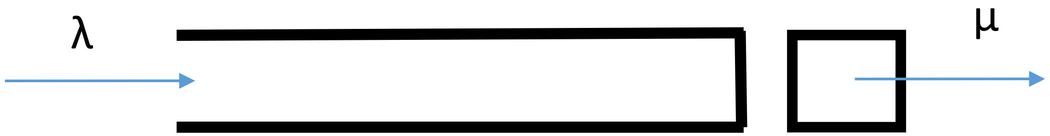
Tutorial Teoría de Colas

Régimen de arribos y servicios

En el proceso en estudio se producen dos fenómenos aleatorios:

- Los arribos
- Los servicios

Supondremos que ambos responden a procesos de tipo Poisson de media Λ para los arribos y de media μ para los servicios.



<u>Arribos</u>:

El régimen de arribos "x" producidos en el intervalo "t" es:

$$p_x = \frac{(\lambda.t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

Para x=1 es:

$$p_1 = \lambda.t.e^{-\lambda.t}$$

El proceso es markoviano homogéneo, ya que la probabilidad p_x solo depende del tiempo t y no de la historia anterior.

Lo mismo puede decirse de los servicios, y por tanto, el fenómeno conjunto arribos + servicios también es un proceso markoviano homogéno.

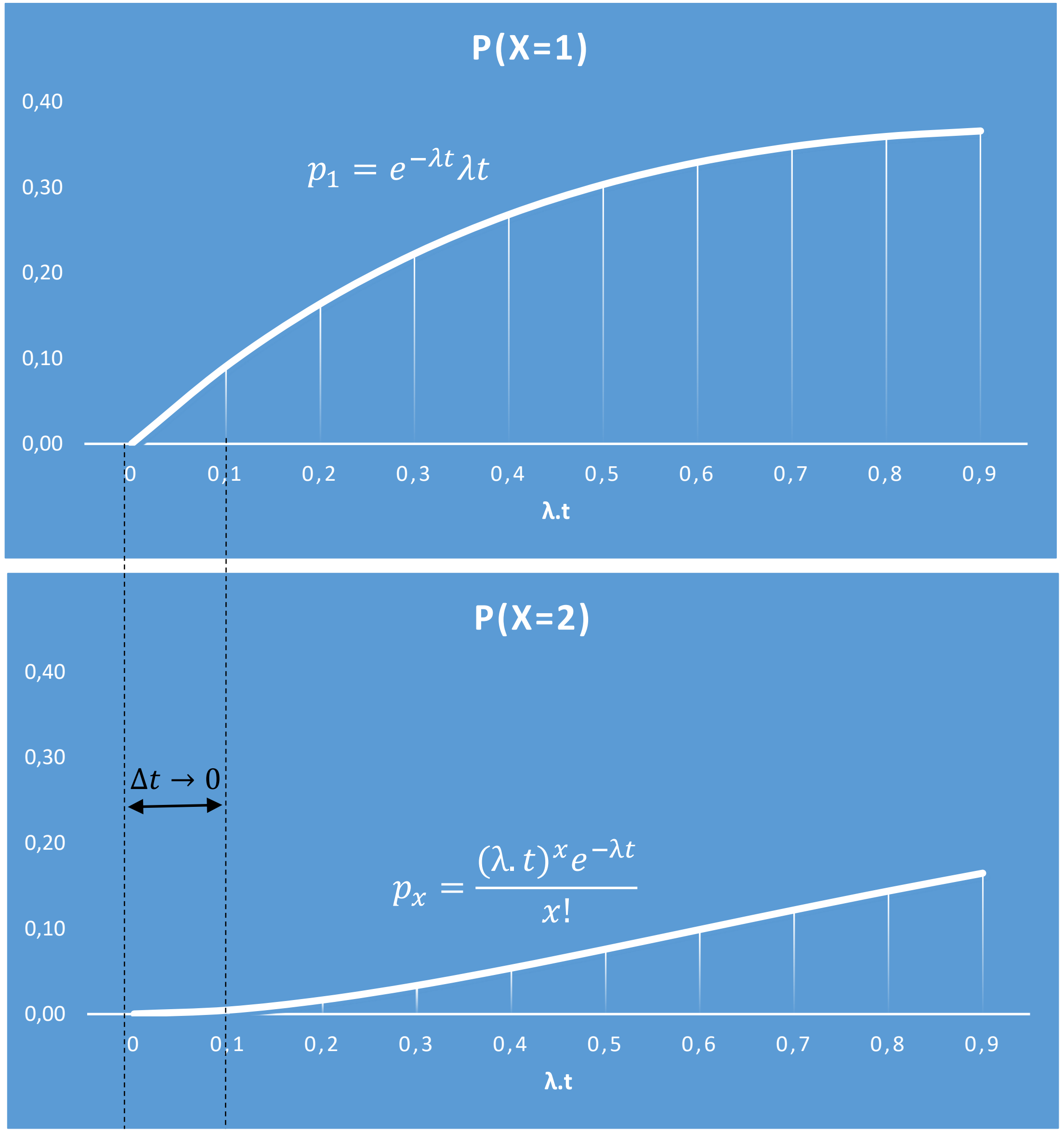
Tutorial Teoría de Colas

Régimen de arribos y servicios

En intervalos de tiempo muy pequeños, la probabilidad de que se produzcan 2 o más arribos es nula.

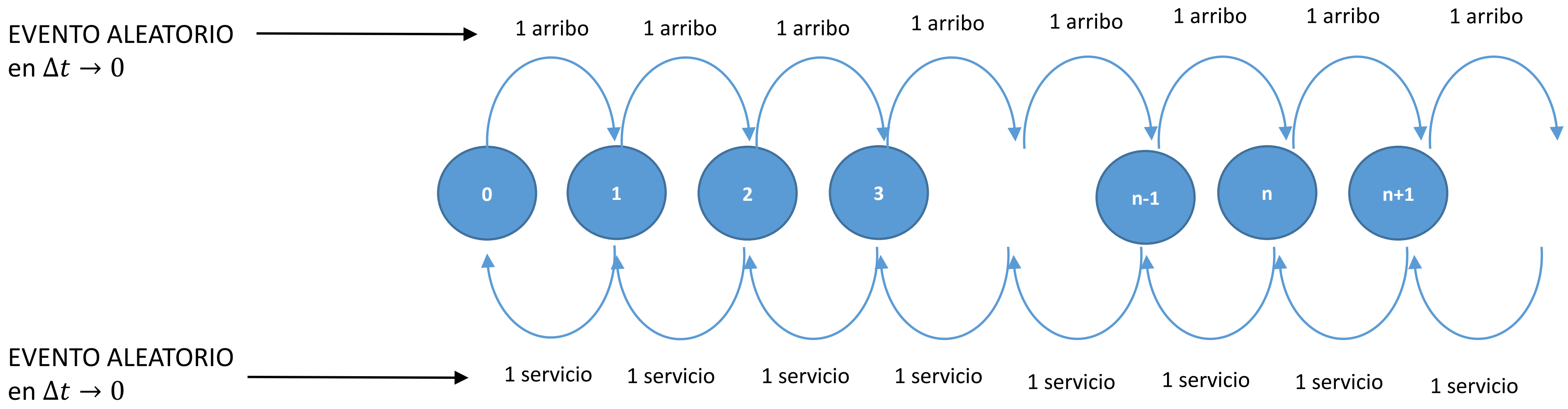
Lo mismo puede decirse de los servicios: En intervalos de tiempo muy pequeños, la probabilidad de que se produzcan 2 o más servicios es nula.

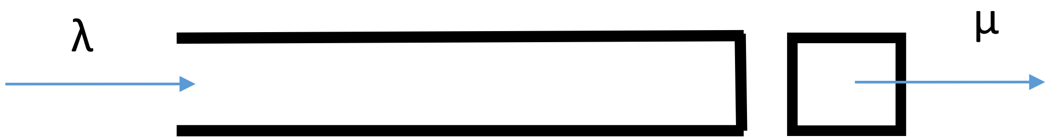
Por tanto, en intervalos de tiempo muy pequeños, la población dentro del sistema solo puede aumentar en uno, disminuir en uno o permanecer constante.



Tutorial Teoría de Colas

Proceso de nacimiento y muerte





Tutorial Teoría de Colas

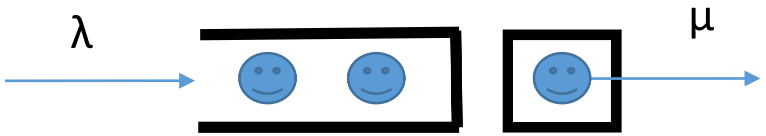
- Sistemas Finitos: solo admiten una cantidad limitada de clientes.

- Sistemas Infinitos: admiten una cantidad ilimitada de clientes.

Tutorial Teoría de Colas

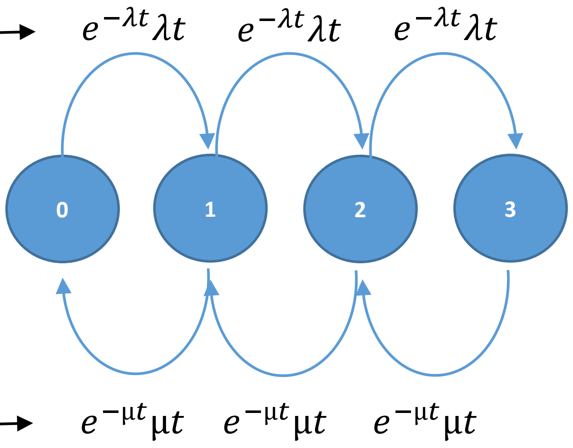
Sistemas Finitos

Un canal de atención y dos posiciones en cola (P/P/1/3)



Cadena Markoviana para $\Delta t \to 0$

Probabilidad de Transición →



Probabilidad de Transición →

$$|P(\Delta t \to 0| = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1-e^{-\lambda t}\lambda t & e^{-\lambda t}\lambda t & 0 & 0 \\ 1 & e^{-\mu t}\mu t & 1-e^{-\lambda t}\lambda t - e^{-\mu t}\mu t & e^{-\lambda t}\lambda t & 0 \\ 2 & 0 & e^{-\mu t}\mu t & 1-e^{-\lambda t}\lambda t - e^{-\mu t}\mu t & e^{-\lambda t}\lambda t \\ 3 & 0 & 0 & e^{-\mu t}\mu t & 1-e^{-\mu t}\mu t \end{array}$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Finitos

Nos interesa calcular los indicadores del comportamiento del sistema en régimen permanente.
Para ello debemos calcular el vector probabilidad de estado en régimen permanente.
Partimos de la Ecuación General de Estado:

$$\vec{p}(t+\Delta t) = \vec{p}(t).\,|P(\Delta t)|$$

en régimen permanente:

$$\vec{p}(t+\Delta t) = \vec{p}(t) = \vec{p} \;\; \dots constante$$

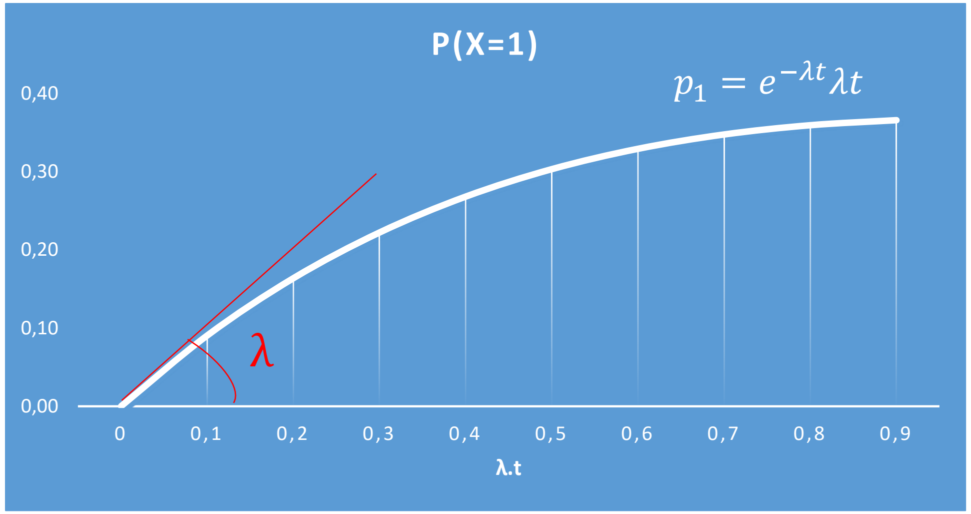
$$\vec{p} = \vec{p}.\,|P|$$

La ecuación anterior se puede simplificar si se deriva respecto del tiempo y se evalúa en t=0 ya que la derivada de la matriz P contiene los parámetros de las distribuciones Poisson (λ o μ).

$$p_1 = \lambda.\,t.\,e^{-\lambda.t}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\lambda.\,e^{t}.\,\lambda.\,t + e^{-\lambda.t}.\,\lambda$$

$$para\ t = 0 \quad \rightarrow \frac{\partial p_1}{\partial t} = \lambda \quad \text{(Tasa de transición)}$$



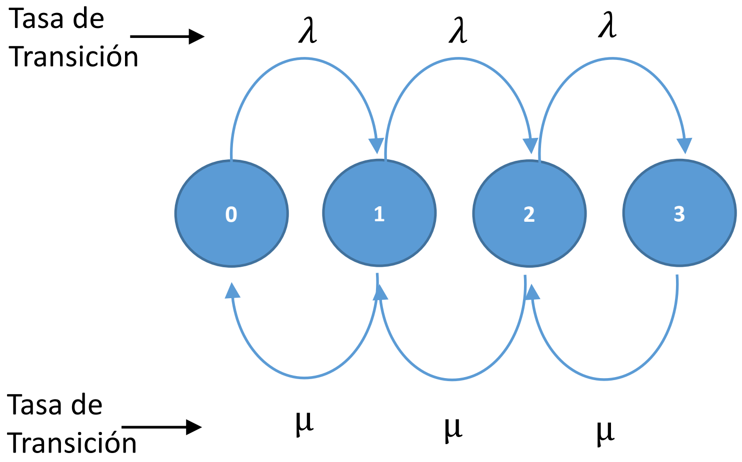
Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Finitos

$$\vec{p} = \vec{p}.|P|$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{0} = \vec{p}.|D| \\ \displaystyle\sum_{i=o}^{m} p_i = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \vec{p}.|A| = \vec{B} \\ \vec{p} = \vec{B}.|A|^{-1} \end{array}$$

Cadena Markoviana



$$|D| = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\ 3 & 0 & 0 & \mu & -\mu \end{array}$$

(Matriz de las tasas de transición)

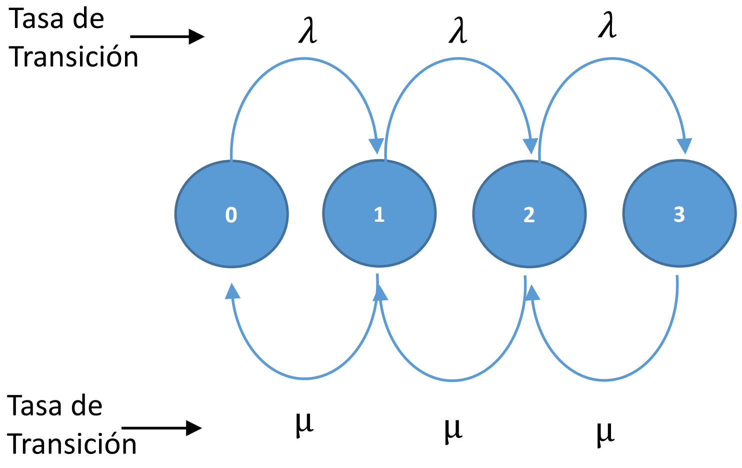
Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Finitos

$$\vec{p} = \vec{p}.|P|$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{p}.|D| \\ \sum_{i=o}^{m} p_i &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \vec{p}.|A| &= \vec{B} \\ \vec{p} &= \vec{B}.|A|^{-1} \end{aligned}$$

Cadena Markoviana



$$|A| = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 1 \\ 2 & 0 & \mu & -\lambda-\mu & 1 \\ 3 & 0 & 0 & \mu & 1 \end{array}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Finitos

$$\begin{cases} -p_0.\lambda + p_1.\mu = 0 \\ +p_0.\lambda - p_1.\lambda - p_1.\mu + p_{2.}\mu = 0 \\ +p_1.\lambda - p_2.\lambda - p_{2.}\mu + p_3.\mu = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \mu & -\lambda - \mu & \lambda & 1 \\ 2 & 0 & \mu & -\lambda - \mu & 1 \\ 3 & 0 & 0 & \mu & 1 \end{array}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Finitos

$$\begin{cases} -p_0.\lambda + p_1.\mu \;=\; 0 \\ +p_0.\lambda - p_1.\lambda - p_1.\mu + p_{2.}\mu \;=\; 0 \\ +p_1.\lambda - p_2.\lambda - p_{2.}\mu + p_3.\mu \;=\; 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} p_{1=}p_0\dfrac{\lambda}{\mu} \\ p_{2=}p_1\dfrac{\lambda}{\mu} = p_o\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 \\ p_{3=}p_2\dfrac{\lambda}{\mu} = p_o\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

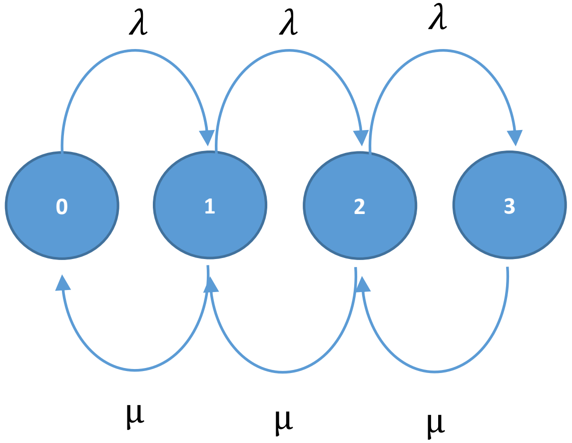
$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} p_{n=}p_o\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0.\rho^n \\ p_0 = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{i=n}\rho^n} \end{array}}$$

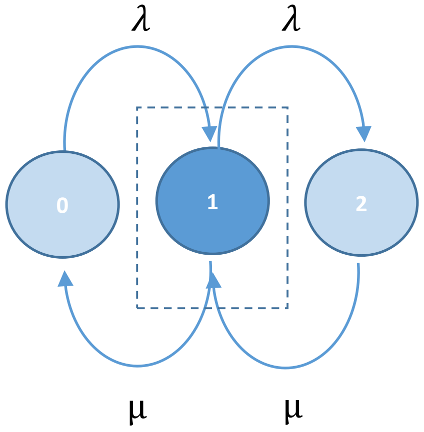
Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Finitos

Cadena Markoviana

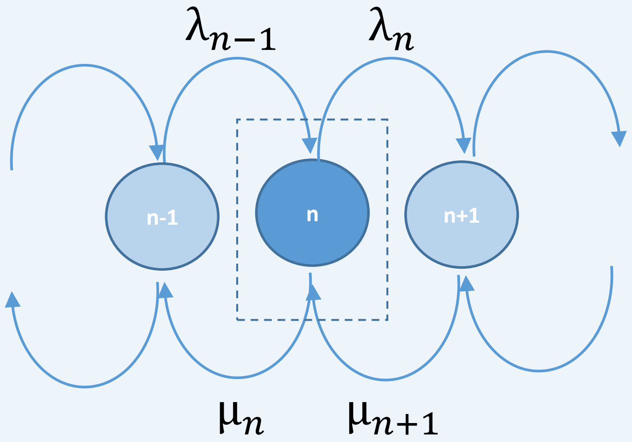


$$+p_0.\lambda - p_1.\lambda - p_1.\mu + p_{2.}\mu \;=\; 0$$

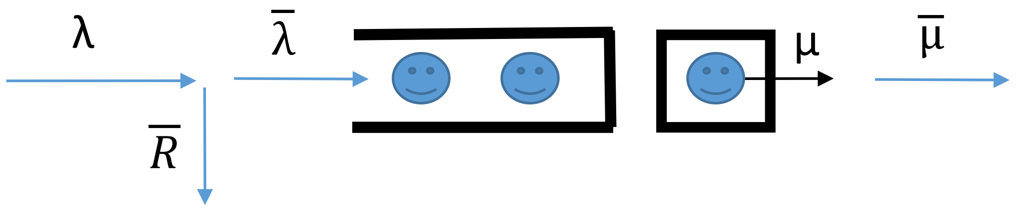


Balance de flujos probabilísticos

$$p_{n-1}.\lambda_{n-1} - p_n.\lambda_n - p_n.\mu_n + p_{n+1}.\mu_{n+1} = 0$$



Tutorial Teoría de Colas
Sistemas Finitos: Indicadores



Longitud Promedio del Sistema

$$L = 0.p_0 + 1.p_1 + 2.p_2 + 3.p_3$$

Longitud Promedio de la cola

$$L_c = 1.p_2 + 2.p_3$$

Número promedio de canales activos:

En este caso para n=0 no hay canales activos y para cualquier otro estado hay un canal activo

$$H = 1 - p_0$$

Tasa promedio de ingreso de clientes al sistema

$$\bar{\lambda} = \sum_{0}^{N} \lambda_n \,.\, p_n \qquad \bar{\lambda} = \lambda\,(1 - p_3)$$

Tasa promedio de egreso de clientes del sistema

$$\bar{\mu} = \sum_{0}^{N} \mu_n . p_n \qquad \bar{\mu} = \mu\,(1 - p_0) = \mu . H = \bar{\lambda}$$

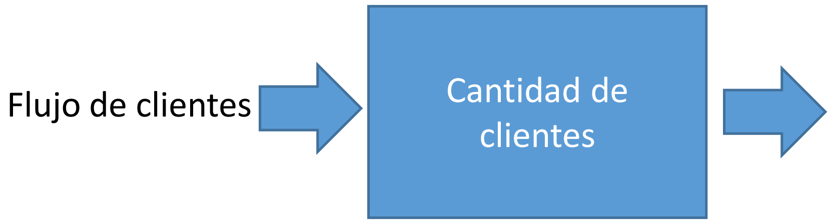
Tasa promedio de clientes rechazados

$$\bar{R} = \lambda . p_N = \lambda . p_3 = \lambda - \bar{\lambda}$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Finitos: Indicadores

<u>Fórmula de John Little</u>: el tiempo promedio de permanencia es el cociente entre la variable de stock y la variable de flujo.



Tiempo promedio de permanencia en el Sistema

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$W = W_c + T_s = W_c + \frac{1}{\mu}$$

Tiempo promedio de permanencia en la cola

$$W_c = \frac{L_c}{\bar{\lambda}}$$

Tutorial Teoría de Colas