Simulación

<u>Temario de la clase</u>

- Introducción.
- Generacion de variables aleatorias: método de la transformada inversa.
- Avance del tiempo de simulación.
- Determinación de la cantidad de iteraciones requeridas.
- Ejemplos de aplicación:
  - Problema del jardinero.
  - Modelo de stock aleatorio.
  - Camino crítico.

Introducción

- *Simulación es una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora digital. Estos experimentos involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento de sistemas de negocios, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos a través de largos períodos de tiempo (H.Maisel-G.Gnugnoli).*

- La simulación debe entenderse como un *experimento estadístico;* sus resultados son *observaciones* que están sujetas a error experimental.
- Difiere de un experimento normal de laboratorio en que puede desarrollarse integramente en una computadora.

Introducción

- Encuadre dentro de los modelos de IO
  - Experimentación.
  - Modelos matemáticos optimizantes.
  - Modelos matemáticos descriptivos.
  - Modelos de Simulación.

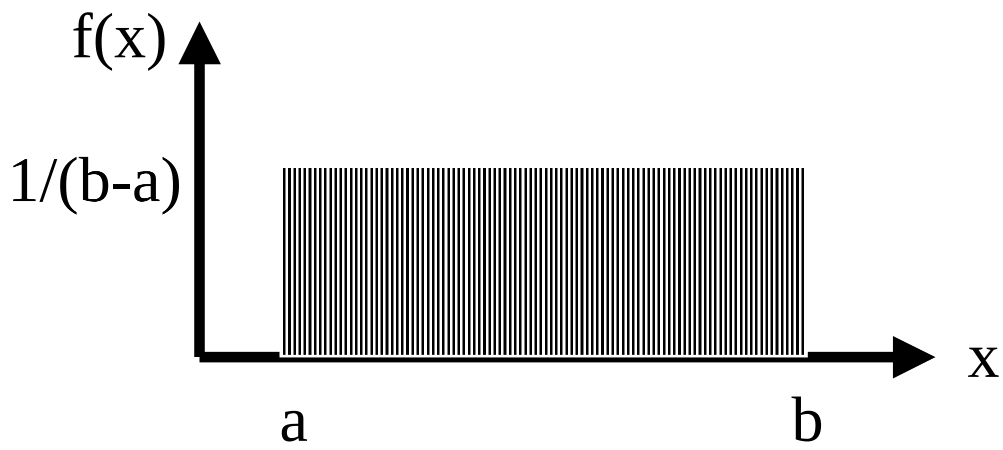
- La simulación es un “recurso extremo” al que se recurre cuando no se pueden plantear modelos matemáticos optimizantes o descriptivos debido a la complejidad del problema.

Introducción

- Etapas de un estudio de simulación:
  - Definición del sistema.
  - Formulación del modelo.
  - Recolección de datos.
  - Implementación del modelo en computadora.
  - Validación.
  - Experimentación.
  - Interpretación.
  - Documentación.

Generación de variables aleatorias.

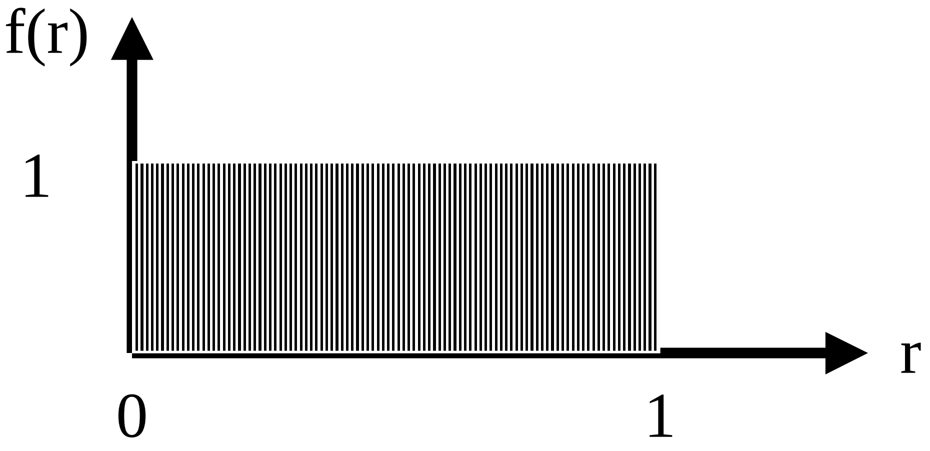
- Distribución uniforme



- $E(x) = (a+b)/2$
- $\sigma^2 = (b-a)/12$

Generación de variables aleatorias.

- <u>Distribución uniforme 0-1</u>

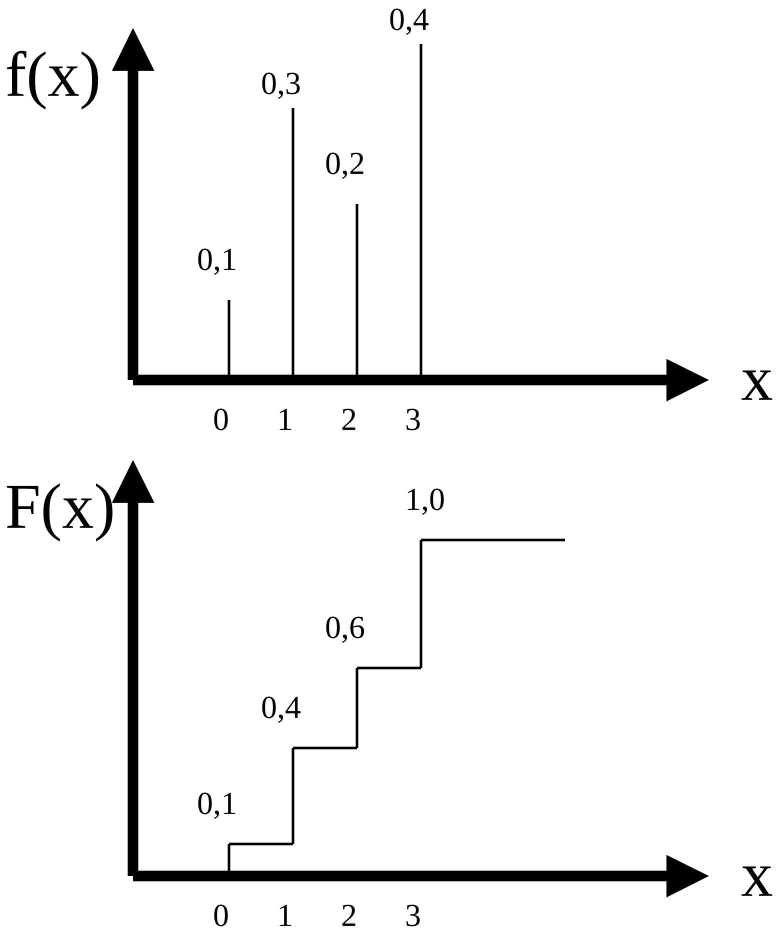


- $E(r) = 1/2$
- $\sigma^2 = 1/12$

Generación de variables aleatorias

- Método de la transformada inversa para variables discretas

x	f(x)	F(x)	r
0	0,1	0,1	0,0 - 0,1
1	0,3	0,4	0,1 - 0,4
2	0,2	0,6	0,4 - 0,6
3	0,4	1,0	0,6 - 1,0

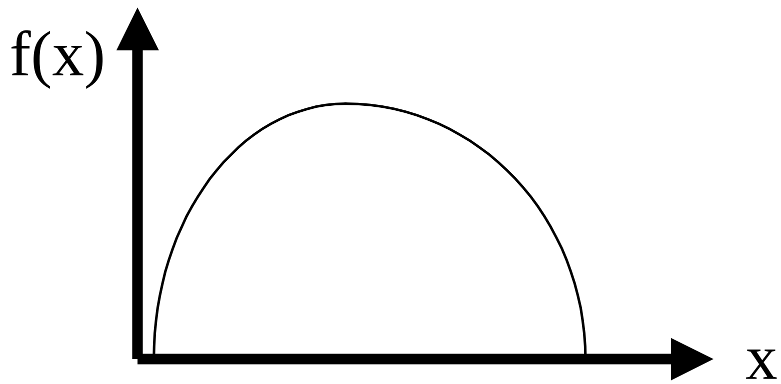


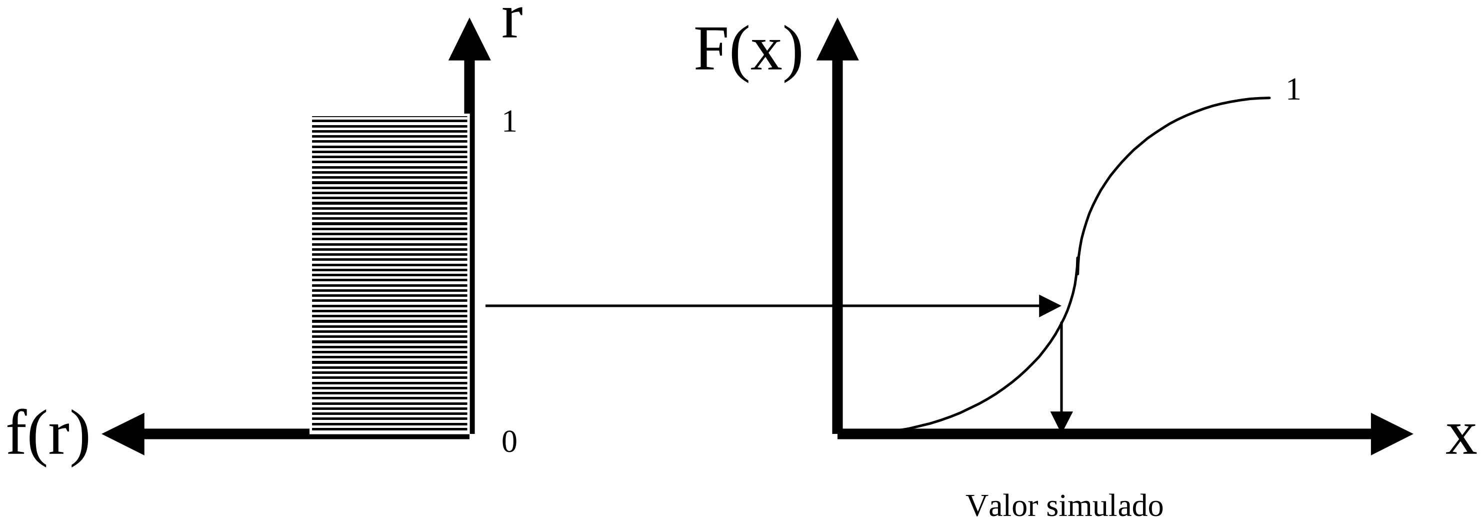
Generación de variables aleatorias

- <u>Método de la transformada inversa para variables contínuas</u>

$$F(x) = r$$

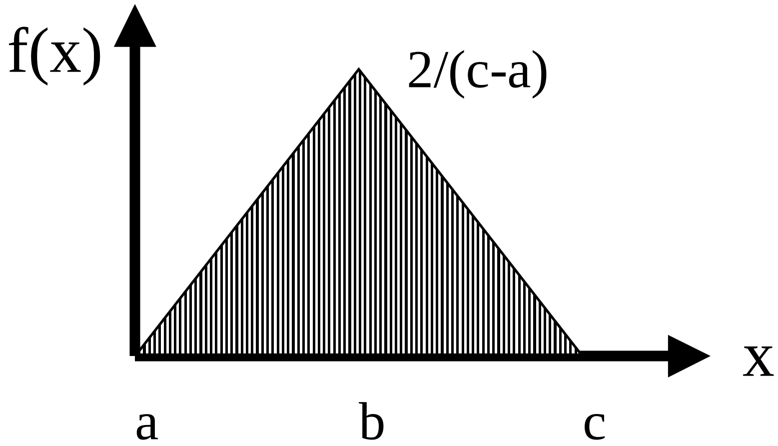
$$x = F^{-1}(r)$$





Generación de variables aleatorias

- Método de la transformada inversa: Distribución Triangular



$$x = a + \sqrt{(c-a).(b-a).r}$$

si $\quad r \leq (b-a)/(c-a)$

$$x = c - \sqrt{(c-a).(c-b).(1-r)}$$

si $\quad r \geq (b-a)/(c-a)$

Generación de variables aleatorias

- Método de la transformada inversa: Distribución Poisson:

  – La probabilidad de encontrar x eventos en el tiempo t es:

$$f(x) = (e^{-\lambda}.\lambda.^{x}) / (x!)$$

  – El tiempo entre eventos es:

$$f(t) = \lambda.e^{-\lambda.t}$$

  – Aplicando el método de la transformada inversa, los valores del tiempo entre eventos pueden simularse como:

$$t = (1/\lambda.).\ln(1/r)$$

Donde los valores de r provienen de una distribución uniforme 0-1

Generación de variables aleatorias

- Distribución normal: *La distribución normal no es integrable analiticamente, por lo que no es posible aplicar el método de la transformada inversa. Para simular valores normales se puede optar entre:*

  – Tablas de números normales al azar.

  – Algún procedimiento de integración numérica (Regla de Simpson).

  – Aplicación del *Teorema del Límite Central*: valores de una distribución normal 0-1 pueden simularse a través de:

$$z = \sum_{1}^{12} r_i - 6$$

Donde los valores de r provienen de una distribución uniforme 0-1

Avance del tiempo de la simulación

- Avance del tiempo de la simulación por eventos: *Consiste en indicar el estado del sistema cada vez que se produce un evento. No se representan instantes entre eventos porque en ellos el estado del sistema sigue siendo igual al que se produjo al concretarse el último evento simulado*

- Avance del tiempo de la simulación por incrementos fijos: *Se representa el estado del sistema en T se determinan los eventos producidos en un lapso* Δt *prefijado y con base en el estado anterior y los eventos producidos se determina el estado del sistema en* $T+\Delta t$.

Determinación de la cantidad de iteraciones requeridas

- Los resultados de un experimento de simulación son una muestra de valores de ciertas variables aleatorias que se desea estimar.
- Es entonces posible aplicar los procedimientos tradicionales de intervalos de confianza.
- Si se conoce la varianza el ancho del intervalo de confianza es:

$$2.\sigma.Z_{\alpha/2} / \sqrt{n}$$

- Si se desconoce la varianza el ancho del intervalo de confianza es:

$$2.S.t_{(n-1).(\alpha/2)} / \sqrt{n}$$

Ejemplo: Problema del jardinero

- Un jardinero atiende una porción de tierra. Todos los años al inicio de la estación de cultivo realiza pruebas químicas para revisar la condición de la parcela. Dependiendo de los resultados de las pruebas puede clasificar la productividad del jardín como "buena" (1), "regular" (2) o "mala" (3). La experiencia anterior indica que la productividad del año en curso puede suponerse dependiente solo de la condición del terreno del año anterior. Por tanto, el jardinero, puede representar las probabilidades de transición en un período de un año de un estado de productividad a otro en términos de la siguiente matríz:

		Estado del sistema el año próximo		
		1	2	3
Estado del	1	0.3000	0.6000	0.1000
sistema este	2	0.1000	0.6000	0.3000
año	3	0.0500	0.4000	0.5500

- Se desea calcular la probabilidad de cada uno de los estados para dentro de 7 años.

Ejemplo: Problema del jardinero

t	Estado Inicial	Probabilidad de Transición 1	2	3	Número Aleatorio	Estado Final	Control de Estado 1	2	3
0	1	0.30	0.60	0.10	0.127524	1	1	0	0
1	1	0.30	0.60	0.10	0.271321	1	1	0	0
2	1	0.30	0.60	0.10	0.496761	2	1	0	0
3	2	0.10	0.60	0.30	0.622325	2	0	1	0
4	2	0.10	0.60	0.30	0.840964	3	0	1	0
5	3	0.05	0.40	0.55	0.432771	2	0	0	1
6	2	0.10	0.60	0.30	0.607316	2	0	1	0

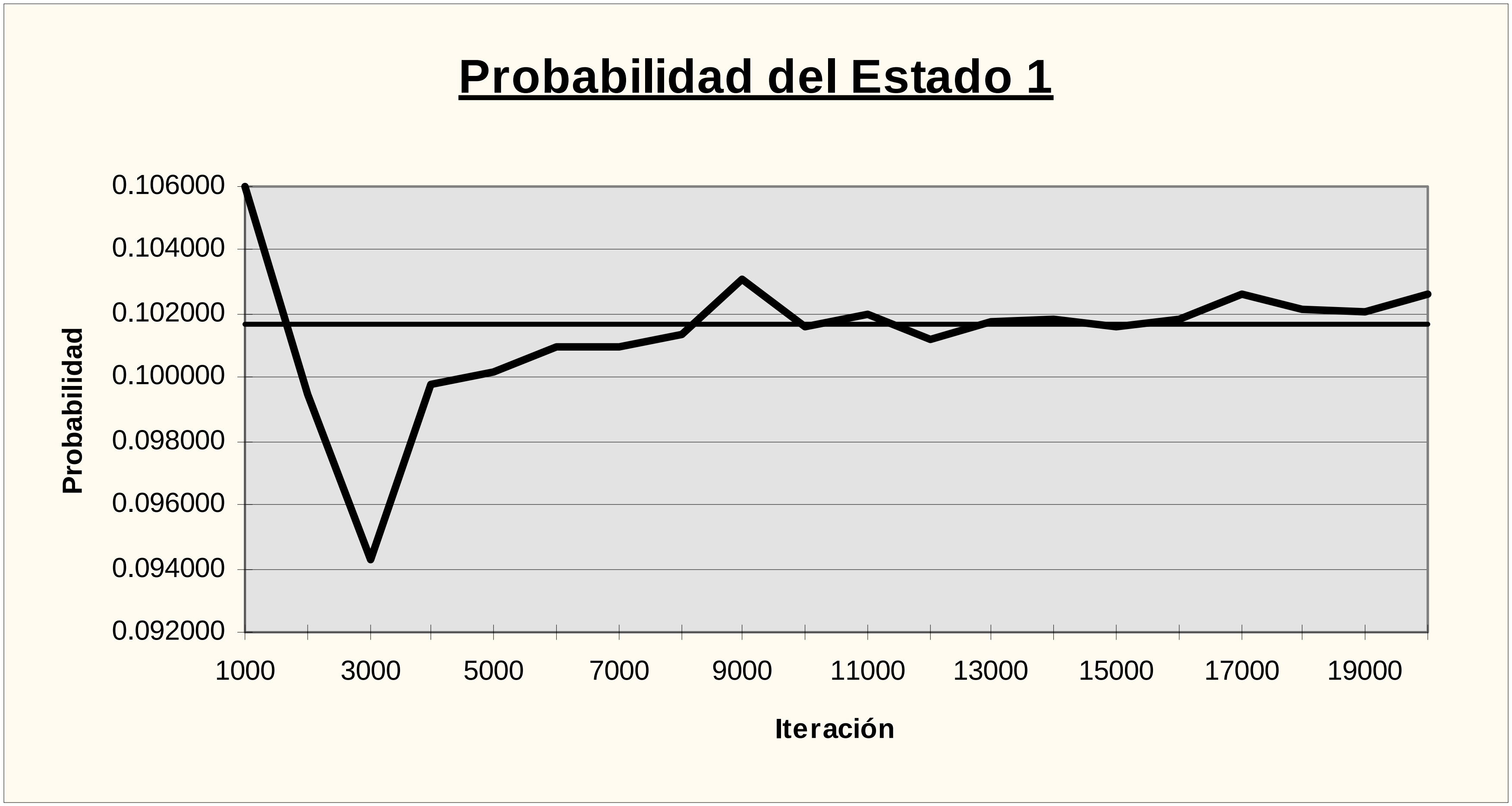
- La tabla muestra el resultado de la simulación de un período de 7 años. Para calcular la probabilidad de cada uno de los estados debe repetirse el experimento una cantidad suficiente de veces. La frecuencia relativa de cada uno de los estados para el año 7, representará la probabilidad de estado buscada.

Ejemplo: Problema del jardinero

- En este problema las probabilidades de estado al cabo de 7 años pueden calcularse exactamente ya que se trata de una Cadena de Markov. La tabla que sigue compara los valores obtenidos luego de 20.000 replicaciones y los valores exactos:

Estado	Probabilidad Exacta	Probabilidad Simulada
1	0.1017	0.1026
2	0.5254	0.5251
3	0.3723	0.3729

Ejemplo: Problema del jardinero



Ejemplo: Modelo de Stock Aleatorio

- <u>Parámetros:</u>
  - Tamaño del lote de reposición 4.000 unidades
  - Stock mínimo al inicio del día 1.500 unidades
  - Demanda triangular
    - » Mínimo (a) 800 unidades/día
    - » Moda (b) 1.000 unidades/dìa
    - » Máximo (c) 1.500 unidades/día
  - Costo de almacenamiento 0,04 $/unidad.día
  - Costo de reorden 320 $

Ejemplo: Modelo de Stock Aleatorio

DIA	r	DEMANDA D	STOCK INICIAL	Repos.	Costo Almac.	Costo Repos.	Costo Total	Cto Diar Prom Acum
1	0.4904	1078	0	4000	138.4	320.0	458.4	458.4
2	0.1870	962	2922	0	97.6	0.0	97.6	278.0
3	0.0652	896	1960	0	60.5	0.0	60.5	205.5
4	0.9543	1374	1064	2936	132.5	320.0	452.5	267.3
5	0.8218	1250	2626	0	80.0	0.0	80.0	229.8
6	0.8053	1239	1376	2624	135.2	320.0	455.2	267.4
7	0.3751	1032	2761	0	89.8	0.0	89.8	242.0
8	0.9552	1375	1729	0	41.7	0.0	41.7	217.0
9	0.4808	1074	354	3646	138.5	320.0	458.5	243.8
10	0.7952	1232	2926	0	92.4	0.0	92.4	228.7

- Luego de 1.000 iteraciones el Costo Total presenta una media de $ 207.1 y un desvío standard de 183.8

Ejemplo: Modelo de Stock Aleatorio

- Intervalo de confianza para el costo total

  - S = 183,8
  - nivel de significación = 10%
  - n = 1.000
  - t = 1,645

  El ancho del intervalo de confianza es:

  $$2.S.t_{(n-1).(\alpha/2)} \;/\; \sqrt{n} \;=\; 19.12$$

  - Límite superior = 207,1 + 19.12 /2 = 216.7
  - Límite inferior = 207,1 - 19.12 /2 = 197.5

Ejemplo: Camino Crítico

Guia de Trabajos Practicos, problema 8.7 modificado

ACTIVIDAD	A	B	C	D	E		
DURACION (D)							
Minima (a):	5	3	3	3	1		
Moda (b):	7	10	5	4	2		
Maxima (c):	8	20	12	12	9		
(b-a)/(c-a)	0.6667	0.4118	0.2222	0.1111	0.1250		
(c-b)/(c-a)	0.3333	0.5882	0.7778	0.8889	0.8750		
PROBABILIDAD	76.9%	31.1%	72.0%	7.7%	95.3%		
DE SER CRITICA							
Int.Cfza. 10%							
S	0.51	0.55	0.54	0.41	0.36		
t	1.645	1.645	1.645	1.645	1.645		
n	1000	1000	1000	1000	1000	DURACION DE	ACTIVIDADES
Limite Superior	79.6%	34.0%	74.8%	9.9%	97.2%	LAS RAMAS	CRITICAS
Limite Inferior	74.2%	28.2%	69.2%	5.5%	93.4%		

	r	D	r	D	r	D	r	D	r	D	A-D	A-C-E	B-E	A	B	C	D	E
1	0.9127	7	0.0822	6	0.6699	7	0.2055	4	0.7879	6	11	20	12	1	0	1	0	1
2	0.3091	6	0.5505	11	0.9474	10	0.2439	5	0.1541	2	11	18	13	1	0	1	0	1
3	0.1183	6	0.8404	15	0.7894	8	0.8156	8	0.7663	5	14	19	20	0	1	0	0	1
4	0.3698	6	0.3553	10	0.0832	4	0.4115	5	0.8940	7	11	17	17	1	1	1	0	1
5	0.7109	7	0.6822	13	0.4830	6	0.9706	11	0.6930	5	18	18	18	1	1	1	1	1
6	0.8420	7	0.1116	7	0.5468	7	0.8939	9	0.7837	6	16	20	13	1	0	1	0	1
7	0.4645	7	0.2615	9	0.0960	4	0.2024	4	0.3518	3	11	14	12	1	0	1	0	1
8	0.9810	8	0.3908	10	0.8136	9	0.5062	6	0.7026	5	14	22	15	1	0	1	0	1