

# ADMINISTRACIÓN DE PROYECTOS POR CAMINO CRÍTICO

ING. MIGUEL MIRANDA

CÁTEDRA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

	<b><u>TEMARIO</u></b>	<b><u>Pág.</u></b>
I	INTRODUCCIÓN	2
II	DETERMINACIÓN DEL CAMINO CRÍTICO	12
III	ESTIMACIONES DE DURACIONES	30
IV	ACELERACIÓN DE PROYECTOS	38
V	IMPOSICIÓN DE FECHAS	47
VI	PROGRAMACIÓN DE ACTIVIDADES	60



## I. INTRODUCCIÓN

### PROYECTOS

La administración de proyectos consiste básicamente en planear, programar y controlar las actividades de los mismos.

Llamaremos "proyecto" a un emprendimiento temporario, constituido por un conjunto de actividades (o tareas) interrelacionadas, que se lleva a cabo para alcanzar un producto o servicio determinado como ser la construcción de un edificio, el lanzamiento de un nuevo producto al mercado, la instalación de una fábrica, el mantenimiento anual de una planta, el montaje e instalación de máquinas y equipos, la filmación de una película, la implementación de un sistema, el desarrollo de un nuevo programa de computación, la puesta en marcha de un programa de investigación y desarrollo para una nueva droga medicinal, la realización de una operación quirúrgica de muy alta complejidad, una invasión militar, etc.

Todo proyecto, independientemente de su tamaño, tiene ciertas características que lo identifican como tal, entre las que podemos mencionar:

- a. repetitividad
- b. división en actividades
- b. relación de precedencias entre las actividades
- c. insumo de tiempo, y
- d. consumo de recursos.

Los proyectos pueden repetirse en condiciones relativamente similares o pueden ejecutarse por única vez. A estos últimos se los denomina "monoproyectos" o proyectos no repetitivos (o no rutinarios) destinados a crear un producto o servicio único, y son tal vez los más difíciles de administrar ya que no se cuenta con información histórica sobre datos relativos a las tareas. Las técnicas que se estudiarán en este capítulo están concebidas principalmente para ser aplicadas a los monoproyectos.

Las relaciones de precedencia entre las actividades gobiernan el orden en el que se deben ejecutar. Por ejemplo, en un proyecto de construcción de una casa, la actividad "levantar las cuatro paredes externas" debe finalizar antes de que pueda comenzar la ejecución de la tarea "colocar el techo".

El planeamiento de un proyecto consiste básicamente en dividirlo en actividades, describir la interrelación entre ellas y estimar recursos los recursos y tiempo necesario para llevarlas a cabo y determinar el tiempo de ejecución del proyecto.

La división de un proyecto en actividades debe responder a cuestiones de tecnología, de sentido común y de grado de control que se quiere ejercer sobre el proyecto. En el caso del

lanzamiento de un nuevo producto al mercado las actividades a desarrollar podrían ser las siguientes:

- A. Diseño de producto
- B. Diseño del "packaging"
- C. Diseño de proceso de fabricación
- D. Adquisición de equipos, herramental y materiales de fabricación
- E. Adquisición y recepción de materiales para el producto
- F. Adquisición y recepción de materiales para el "packaging"
- G. Fabricación de prueba
- G. Fabricación del primer lote del producto
- H. Selección de un nombre para el producto
- I. Fabricación del "packaging"
- J. Campaña publicitaria
- K. Empaque del primer lote del producto
- L. Entrega a distribuidores del primer lote del producto

Cualquiera de estas actividades podría subdividirse a su vez en otras actividades menores. Por ejemplo, la actividad "Generación de un nombre para el producto" podría estar dividida en las siguientes actividades:

1. definición de la anatomía marcaria
2. establecimiento de criterios de selección del nombre
3. generación de lista de nombres
5. pruebas de mercado
6. evaluación de alternativas de marcas candidatas
7. análisis de factibilidad legal
8. selección
9. registro de marca

A su vez, la actividad "pruebas de mercado" podría dividirse en tareas menores a los efectos de su gestión. Es decir, una actividad para un nivel de administración del proyecto puede constituir un proyecto en sí mismo para un nivel más bajo de administración.

La programación del proyecto consiste en calendarizar a las actividades; esto es, ubicar en el tiempo el comienzo y el fin de cada una de las tareas que lo componen, y en función de ello programar los recursos necesarios. Es decir, a partir de la programación de las actividades se podrá determinar la cantidad y oportunidad de los recursos que se necesitarán de mano de obra, equipos y materiales para llevar a cabo el proyecto. Por otra parte, será posible efectuar la programación financiera (flujo de caja) determinando cuándo se deberán efectuar las erogaciones correspondientes y cuándo se obtendrán los ingresos (en el caso de poder ir certificando obra).

Finalmente, el control del proyecto consiste en establecer las diferencias que se verifican entre lo planeado y lo programado, por un lado, y lo efectivamente realizado, por el otro. Para ello se requiere obtener una información detallada y completa del grado de avance de las actividades. Como consecuencia del control será necesario en muchas ocasiones iniciar acciones correctivas, reprogramar las actividades, recalcular los presupuestos monetarios, las necesidades de recursos, etc.

Para llevar a cabo la administración de proyectos se dispone básicamente de dos herramientas. La primera de ellas es una de las utilizadas en la administración que se denomina

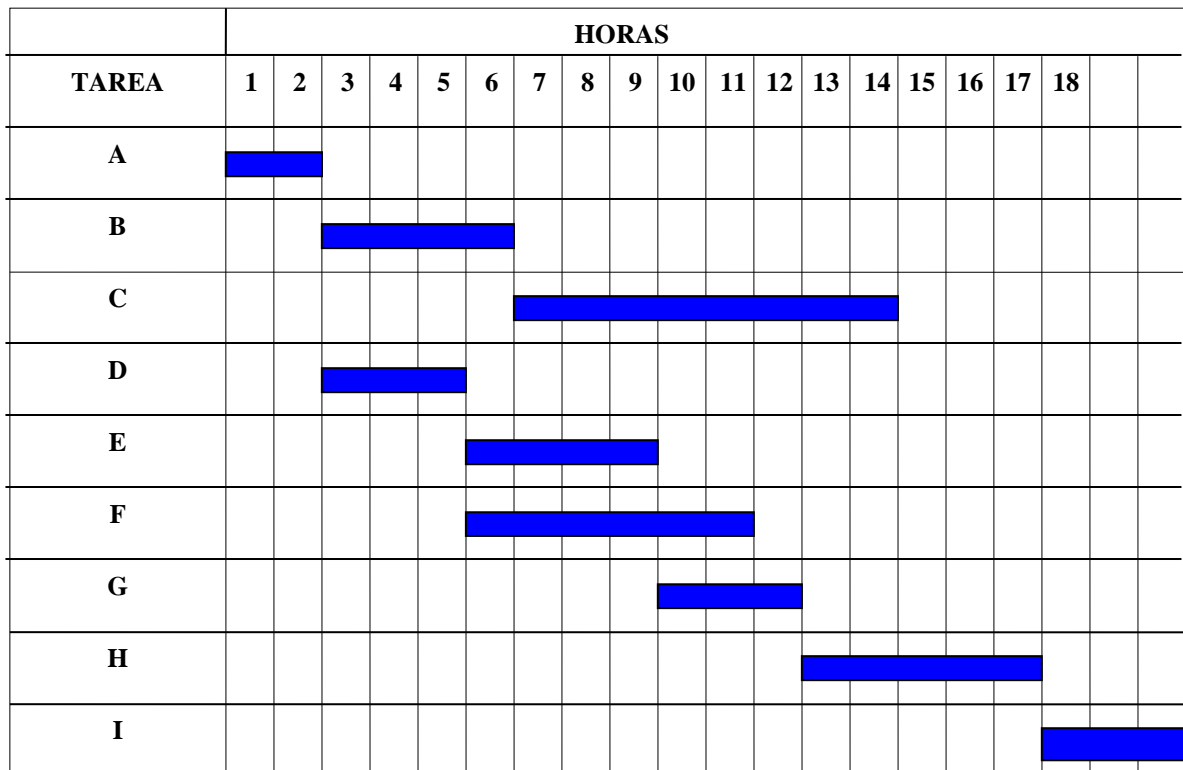
"Gráfico de barras" o "Diagramas de Gantt". La segunda técnica, que constituye el objeto de estudio de este capítulo, está basada en técnicas de redes.

Los Diagramas de Gantt consisten en cuadros formados por filas y columnas. En la primera columna del diagrama, es decir la dispuesta más a la izquierda, se lista el conjunto de actividades con las que se ha dividido el proyecto. Cada actividad será una fila del diagrama. Las columnas son todas de igual ancho e indican unidades de tiempo. La duración de cada actividad se indica con una barra desde su fecha de inicio hasta su terminación.

Supongamos un proyecto muy simple de mantenimiento de un equipo que consiste en la ejecución de las siguientes tareas, cuyo tiempo de realización, y actividades precedentes se indican a continuación:

Act.	Descripción	TIEMPO (hs)	PREDECESORAS
A	Desinstalar un motor de su base	2	-
B	Limpiar la base	4	A
C	Pintar la base	8	B
D	Extraer las piezas X e Y del motor	3	A
E	Rectificar la pieza X	4	D
F	Rebobinar la pieza Y	6	D
G	Alinear la pieza Y	3	E
H	Ensamblar X e Y	5	F, G
I	Instalar el motor en la base	3	C, H

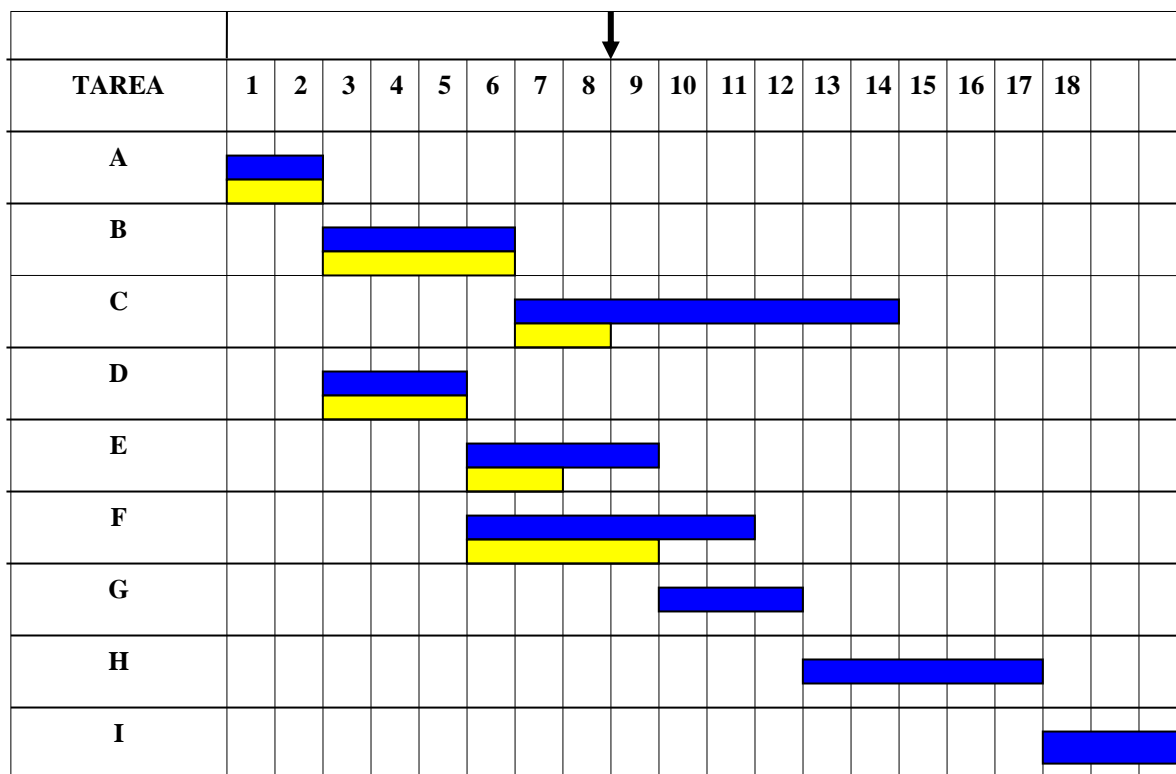
El diagrama de Gantt correspondiente es el siguiente:



Esta técnica es muy fácil de entender y usar. Es tal vez una de las herramientas más difundidas y usadas por los administradores. Es también muy útil para mostrar el estado actual del proyecto con propósitos de control. Dado que la longitud de la barra indica el 100% de su realización, en una barra de control se puede indicar, para una fecha determinada, el grado de

avance de las tareas. Supongamos, en el ejemplo anterior, que al finalizar la hora 8 se hace un control de avance del proyecto. Las barras inferiores indican el estado de cada actividad en porcentaje.

Se puede observar en el gráfico que las tareas A, B y D han sido completadas. La tarea C se ha ejecutado en un 25% conforme a lo esperado, por lo que se está desarrollando normalmente. La actividad E, debería haberse ejecutado en un 75%, pero sin embargo vemos que está atrasada ya que se desarrolló solamente en un 50%. Finalmente, la tarea F está adelantada, ya que debería haberse ejecutado en un 50% pero lleva un 67% de realización.



La mayor dificultad de estos diagramas es la dificultad que tienen para mostrar la interrelación existente entre las variables. Adicionalmente, la planificación y la programación del proyecto se hacen al mismo tiempo, lo que resulta inconveniente en términos de análisis del proyecto y de posibilidades de modificación. Por lo expuesto, esta técnica se puede utilizar solamente para proyectos muy simples.

El éxito de los proyectos a gran escala depende de la calidad con que se llevan a cabo las fases planeamiento, programación y control para administrar las actividades en lo que se refiere al personal, materiales, equipamiento y tiempo de desarrollo. Para este tipo de proyectos se utilizan los métodos basados en redes, que se denominan métodos de camino crítico. Entre ellos, estudiaremos el PERT y el CPM.

El sistema PERT fue desarrollado para el proyecto misilístico "POLARIS" por la Secretaría de Proyectos de la Armada de Estados Unidos de Norteamérica durante los años 1958 y 1959. Mediante la utilización de esta técnica, el Departamento de Defensa pudo completar el proyecto 18 meses antes de lo que originalmente se había programado. PERT significa "Program Evaluation and Review Technique", es decir "técnica de revisión y evaluación de programas".

El CPM fue desarrollado en 1957 conjuntamente por la empresa DuPont de Nemours & Co. y Booz, Allen & Hamilton (una consultora de la industria de la construcción) con motivo

de la ejecución del proyecto de construcción de la planta de Louisville de DuPont. En la segunda oportunidad que esta empresa aplicó el sistema para inspección y mantenimiento de una planta, Sperry-Rand Corporation colaboró con mejoras en la técnica. "CPM" significa "Critical Path Method", es decir "método de camino crítico".

Los dos sistemas de camino crítico presentaban ciertas diferencias en cuanto a la forma de graficación, estimación de duraciones y análisis de costos. Sin embargo, en la medida que se fueron aplicando en la industria, los sistemas de computación de camino crítico comenzaron a utilizar las ventajas de uno y otro, por lo que en la actualidad no hay prácticamente diferencia entre ellos.

## PLANEAMIENTO

La primera fase de un proyecto es la de planeamiento, la cual consiste en identificar cuáles serán las tareas que deberán ejecutarse para llevarlo a cabo, establecer su interrelación, estimar su tiempo, estimar sus recursos, calcular el tiempo de ejecución del proyecto y establecer un plan.

Las tareas son temporarias (tienen principio y fin) e insumen recursos. Es decir, representan un trabajo que se debe realizar. Los recursos pueden ser mano de obra, materiales, equipos y/o espacio, además de recursos financieros. Una de las diferencias entre los sistemas CPM y PERT se da en la forma de efectuar la estimación de los tiempos para las actividades. El CPM hace una estimación única, es decir lo hace con un criterio determinístico, mientras que el PERT efectúa una estimación ponderada, con un criterio probabilístico. Para explicar el método de camino crítico haremos uso en primer lugar de la estimación determinística.

Tal como mencionamos anteriormente, el grado de división en tareas que se debe hacer responde a razones de orden lógico y tecnológico, por un lado, y al nivel de control requerido (recordemos que una actividad puede ser un subproyecto en sí mismo), por el otro. Una vez subdividido al proyecto en tareas se debe establecer la secuencia lógica con las que ellas se deben llevar a cabo. Es decir, para que algunas tareas puedan comenzar a ejecutarse se debe haber finalizado la ejecución de algunas otras. En ciertas ocasiones resulta útil ir relevando la prelación entre las actividades mediante las denominadas "matrices de precedencia inmediata" o mediante las "matrices de secuencia inmediata". Tanto en la primera columna como en la primera fila de estas matrices se consignan todas las actividades del proyecto. En las matrices de precedencia inmediata, para cada actividad dispuesta en una fila determinada se indica con un tilde o una cruz todas las actividades (dispuestas en columnas) a las que ella precede inmediatamente. Para el ejemplo arriba señalado la matriz de precedencia inmediata será:

Act.	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		✓		✓					
B			✓						
C									✓
D					✓	✓			
E							✓		
F								✓	
G								✓	
H									✓
I									

Esto es, la tarea A precede inmediatamente a B y a D; la actividad B precede inmediatamente a C, y así sucesivamente.

La matriz de secuencia inmediata para el mismo proyecto será:

Act.	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A									
B	✓								
C		✓							
D	✓								
E				✓					
F				✓					
G					✓				
H						✓	✓		
I			✓					✓	

Esto es, la actividad A no sigue inmediatamente a ninguna otra, la actividad B sigue inmediatamente a A, la C sigue inmediatamente a B, la D a A, y así sucesivamente.

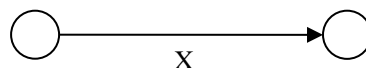
En los métodos de camino crítico los proyectos se grafican con redes. Una red es un conjunto de nodos y flechas que los vinculan. En programación por camino crítico, una red es la representación gráfica de la secuencia en que se ejecutarán las actividades del proyecto.

## GRAFICACIÓN DE REDES

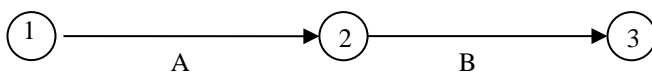
Existen dos métodos de graficar los proyectos. El primero de ellos es el denominado "FLECHA-ACTIVIDAD", que fue el utilizado inicialmente por el sistema PERT, y que consiste en evidenciar a las actividades en flechas. El otro método, desarrollado por CPM, es el denominado "NODO-ACTIVIDAD" (o de potenciales) que consiste en representar a las actividades en nodos.

### Método Flecha-Actividad

Las flechas representan a las actividades del proyecto y los nodos representan eventos. Los eventos, también llamados sucesos o acontecimientos, establecen estados en la ejecución del proyecto, los que se verifican básicamente como consecuencia de comienzos y finalizaciones de actividades. Cada actividad queda representada mediante un nodo inicio (dispuesto en la cola de la flecha) y un nodo fin (dispuesto en la punta de la flecha). La siguiente es la representación de una actividad X,



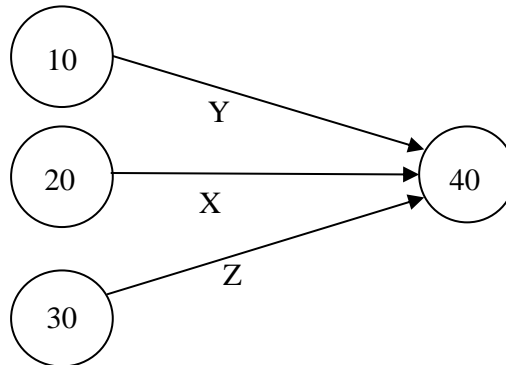
Cada nodo se numera con un código único. No es necesario que la numeración sea correlativa; la única restricción que se impone en el sistema de numeración es que para una actividad cualquiera, el código origen tiene que ser un número menor que el código fin. El siguiente gráfico



indica que la actividad A queda definida por los nodos 1 y 2, por lo que se la puede llamar actividad 1-2. Del mismo modo la tarea B es la 2-3.

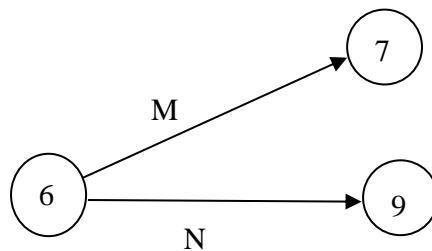
En este ejemplo el nodo 1 indica que puede comenzar a ejecutarse la actividad A, mientras que el nodo 2 indica que la actividad A ha terminado de llevarse a cabo y que puede comenzar a desarrollarse la tarea B. Finalmente, el nodo 3 muestra que la tarea B ha finalizado.

A un nodo pueden concurrir varias actividades:



En este caso el suceso 40 queda definido recién cuando han finalizado todas las actividades que concurren a él (Y, X y Z).

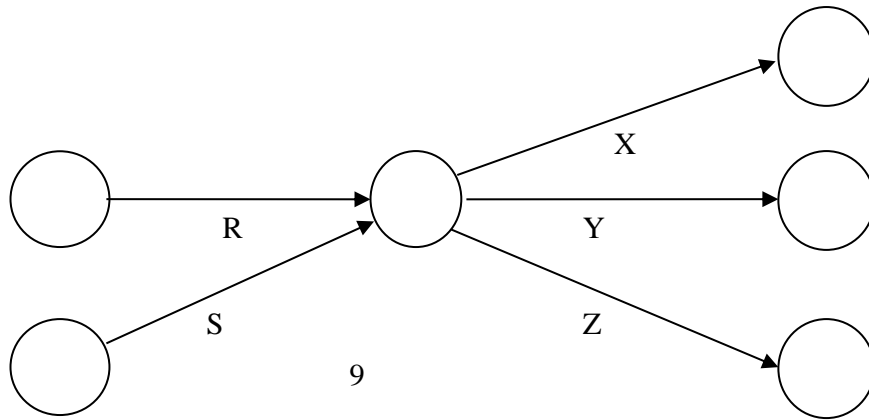
También, un mismo evento puede generar el comienzo de varias actividades:



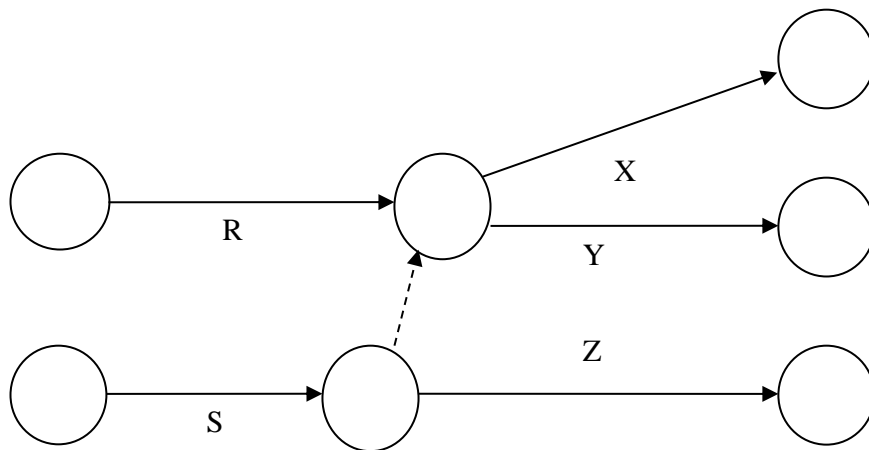
El nodo 6 indica que pueden comenzar a ejecutarse las actividades 6-7 (M) y 6-9 (N).

La representación flecha-actividad requiere en muchos casos la formulación de las denominadas actividades "ficticias" (o "dummy"). Estas actividades son de duración nula y no insumen ningún tipo de recurso físico, constituyendo solamente un recurso gráfico para salvar algunos inconvenientes gráficos que se pueden presentar con este método.

Supongamos una actividad R que precede inmediatamente a X e Y, y una actividad S que precede inmediatamente a X, Y y Z. Es obvio que la siguiente graficación de la situación sería incorrecta:

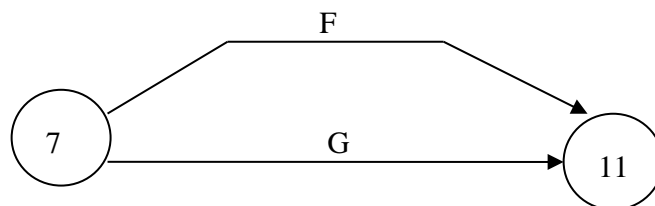


Esto es porque se estaría estableciendo una precedencia de R con Z que no existe. Para salvar este inconveniente se utiliza el recurso de incluir una actividad ficticia (que se grafica en forma punteada), como se indica a continuación:



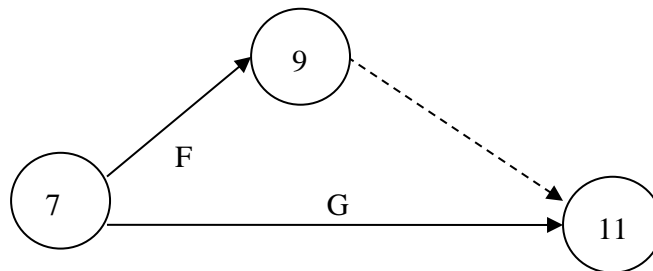
De esta forma queda establecida la precedencia inmediata de R con X e Y solamente, y la de S con X, Y y Z.

Otra situación que requiere la utilización de actividades ficticias es la que se da cuando dos o más actividades quedan definidas entre los mismos eventos:



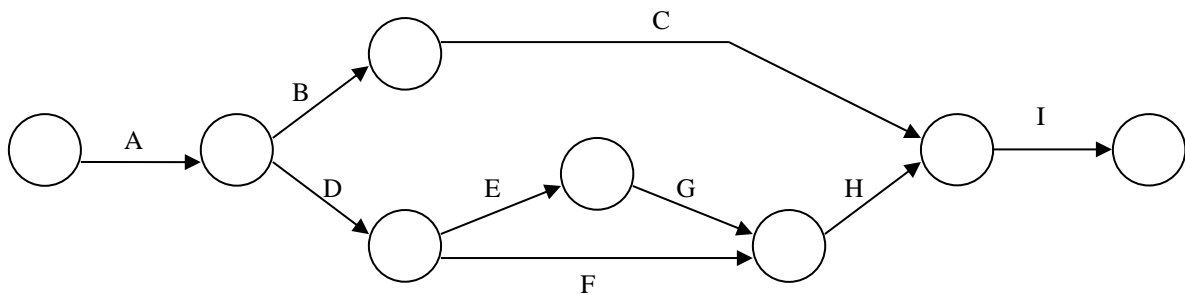
La graficación precedente es incorrecta por cuanto cada actividad tiene que quedar perfectamente definida por un par de códigos único. En efecto, en ella no queda claro cuál de

las dos tareas (F y G) es la actividad 7-11. Para salvar este inconveniente, se utilizan las tareas ficticias, como se indica a continuación:



De esta forma queda la actividad F perfectamente definida entre los nodos 7 y 9, mientras que la G lo está entre 7 y 11.

La graficación de la red correspondiente al ejemplo de mantenimiento del equipo es la siguiente:



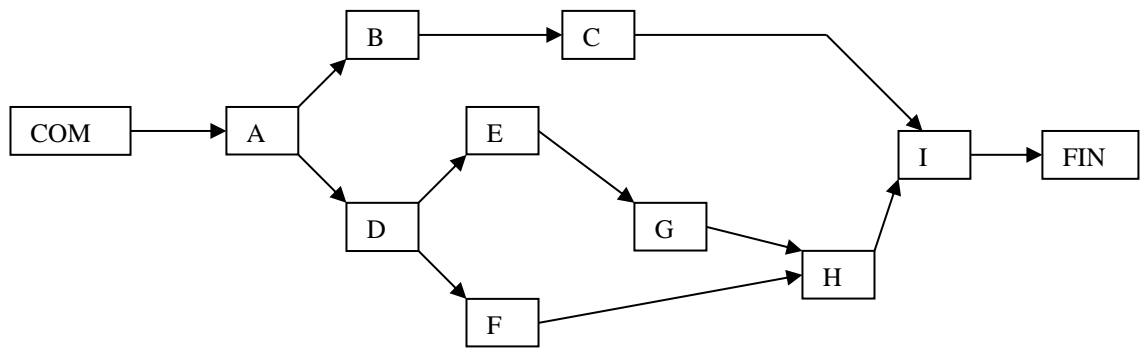
Llamaremos “camino” a una secuencia de actividades que va desde el nodo origen al nodo fin del proyecto, y “rama” a una secuencia definida entre dos nodos del proyecto. Por ejemplo, la secuencia A-D-F-H-I constituye un camino, mientras que E-G es una rama.

### Método Nodo-Actividad

Esta forma de graficación, llamada también "de potenciales", propuesta inicialmente por el sistema CPM, consiste en evidenciar a las actividades en nodos. Las flechas (o arcos) que conectan a los nodos representan solamente las relaciones de precedencia entre las actividades. Una de las ventajas que presenta es que no requiere de actividades ficticias, con la excepción de una actividad ficticia inicial que llamaremos COM y una final que llamaremos FIN.

Por otra parte, el método de los potenciales es más fácil de comprender por quienes no son expertos en el tema de camino crítico. Esto se debe básicamente al hecho de que es más natural prestar atención a los nodos que a los arcos, y en un proyecto lo que realmente es importante son las actividades y no los eventos.

Para el ejemplo propuesto la red nodo actividad será la siguiente:



## II. DETERMINACIÓN DEL CAMINO CRÍTICO

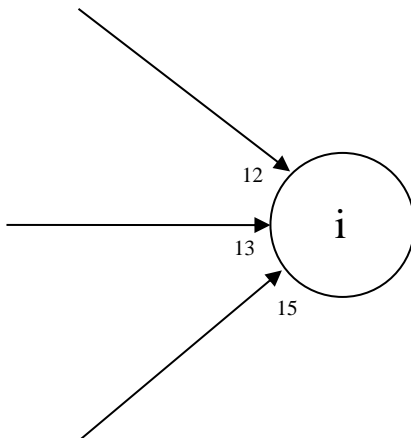
### DEFINICIONES DE FECHAS:

Llamaremos "Primera Fecha de Comienzo" ( $PFC_{i-j}$ ) de una actividad "i-j" al instante más temprano que puede comenzar a ejecutarse una tarea y "Primera Fecha de Finalización" ( $PF_{i-j}$ ) al instante más temprano en que puede finalizar. Es obvio que, si llamamos  $d_{i-j}$  a la duración de la actividad, será:

$$PF_{i-j} = PFC_{i-j} + d_{i-j}$$

Para determinar estas fechas, todas las predecesoras de la actividad en cuestión también se debieron haber programado para comenzar a ejecutarse lo antes posible, es decir en su PFC.

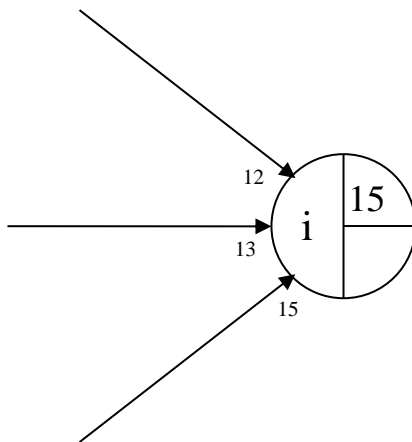
Tal como hemos visto, un suceso puede quedar definido por la finalización de varias actividades. Supongamos, en el sistema de graficación Flecha-Actividad, que a un suceso "i" concurren tres actividades cuyas PFC son las semanas 12, 13 y 15, tal como se indica en el siguiente gráfico:



Comúnmente, en el sistema de graficación Flecha-Actividad, las PFF de las actividades se indican en la parte inferior de la punta de la flecha.

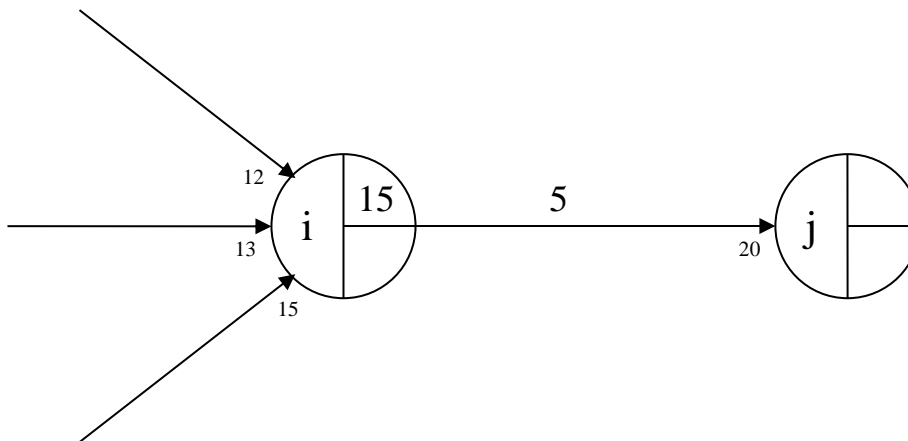
Este acontecimiento se puede verificar recién en la semana 15, ya que es la fecha más temprana en que se puede verificar la finalización de todas las tareas que lo definen. Este instante se llama "Fecha Temprana" del nodo "i" ( $Ft_i$ ).

Típicamente, el código de un nodo se indica en la parte izquierda del mismo, mientras que la Fecha Temprana se consigna en la parte superior derecha.



Cualquier actividad que se genere en el nodo "i" podrá comenzar a ejecutarse en la fecha 15. Así, la actividad i-j tiene como Primera Fecha de Comienzo a la semana 15. La Primera Fecha de Finalización de i-j será entonces:

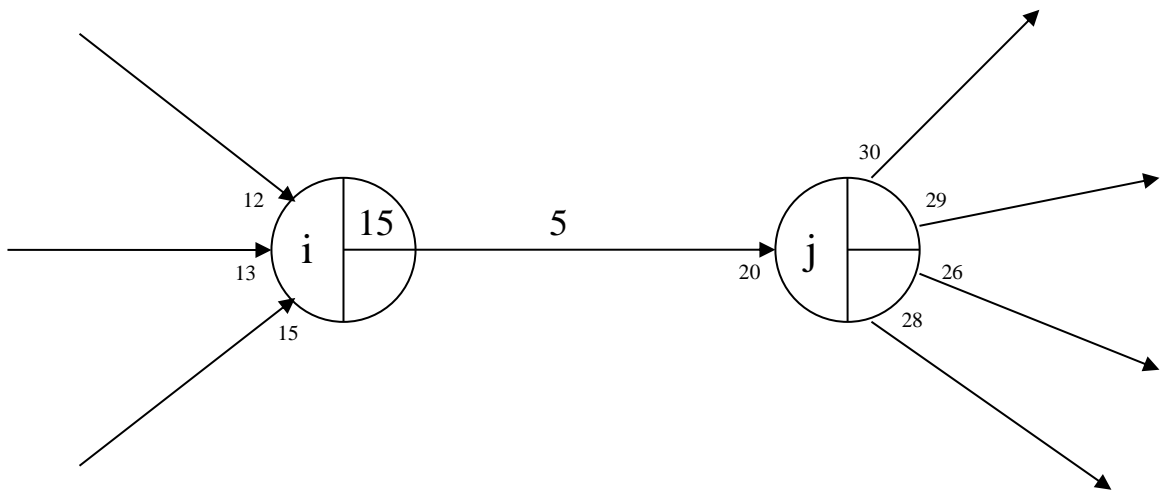
$$PFF_{i-j} = 15 + 5 = 20$$



Llamaremos "Última Fecha de Finalización" ( $UFF_{i-j}$ ) de una actividad "i-j" al instante más tardío que puede finalizar la tarea a fin de no atrasar el proyecto y "Última Fecha de Comienzo" ( $UFC_{i-j}$ ) al instante más tardío en que puede comenzar. Llamando  $d_{i-j}$  a la duración de la actividad, tendremos:

$$UFC_{i-j} = UFF_{i-j} - d_{i-j}$$

Supongamos que el nodo j define el comienzo de cuatro tareas y que las UFC de esas actividades sean las semanas 30, 29, 26 y 28. Normalmente, en el método Flecha-Actividad, las UFC de las actividades se indican en la parte superior de la cola de la flecha, tal como se indica en el siguiente gráfico:

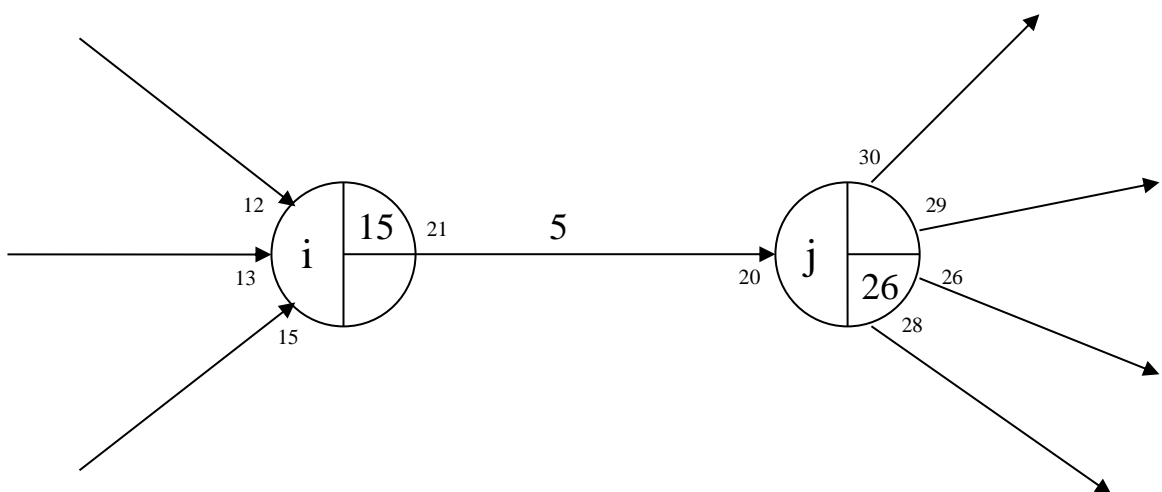


Se llama Fecha Tardía (FT) de un suceso a la última fecha en la cual puede verificarse un suceso sin atrasar el proyecto. Resulta obvio que la Fecha Tardía del nodo "j" del ejemplo que se está planteando es la semana 26, ya que si el suceso no se verifica como muy tarde en dicha fecha, el proyecto se atrasará.

La Fecha Tardía de un suceso se indica en la parte inferior derecha del nodo.

Cualquier actividad que concurre a un nodo debe tener como UFF a la FT del nodo. Para el ejemplo, la Última Fecha de Finalización de la tarea i-j es la semana 26. Y, como hemos visto, la Última Fecha de Comienzo será

$$UFC = 26 - 5 = 21.$$



En resumen, la Ft de un nodo "j" cualquiera es, la mayor de las PPF de las actividades que concurren al a dicho nodo.

$$Ft_j = [PFF_{i,j}]_{mayor}$$

Asimismo, la FT de un nodo "i" cualquiera es la menor de las UFC de las actividades que salen del nodo.

$$FT_j = [UFC_{i,j}]_{menor}$$

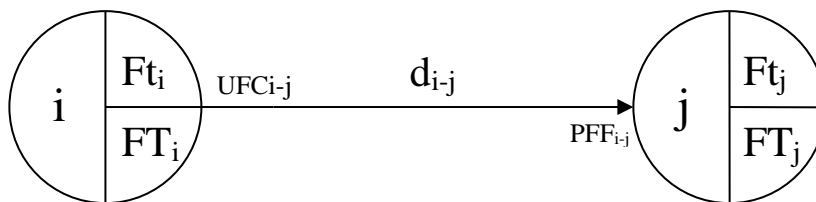
La PFC de una actividad "i-j" es la Fecha Temprana del nodo "i":

$$PFC_{i,j} = Ft_i$$

Y, la UFF de una actividad "i-j" es la Fecha Tardía del nodo "j":

$$UFF_{i,j} = FT_j$$

Finalmente, la forma típica de representación gráfica, de la Primera Fecha de Finalización (PFF) y Última Fecha de Comienzo (UFC) de una actividad i-j, y de las Fecha Temprana (Ft) y Fecha Tardía (FT) de los sucesos, en el sistema "Flecha-Actividad", es la siguiente:

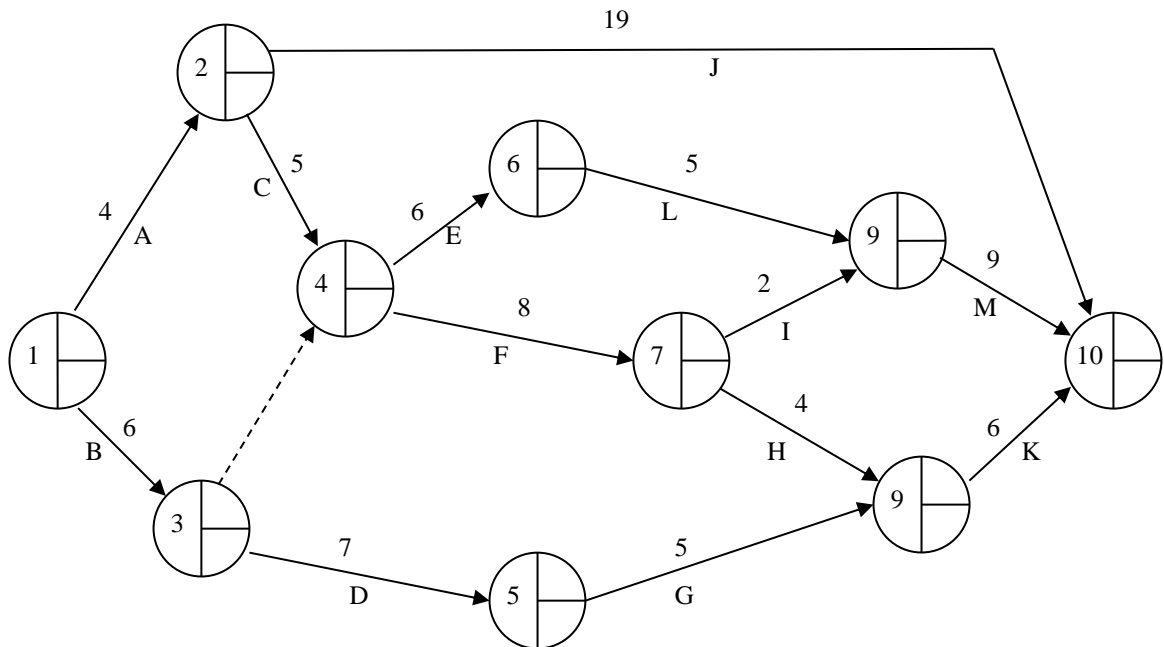


## DETERMINACIÓN DEL CAMINO CRÍTICO

Tomemos como ejemplo un proyecto en donde se ha determinado la prelación entre las actividades y la duración de cada una de ellas, como se indica en el siguiente gráfico:

	Precede inmediatamente a	Duración (semanas)
<b>A</b>	C, J	4
<b>B</b>	D, E, F	6
<b>C</b>	E, F	5
<b>D</b>	G	7
<b>E</b>	L	6
<b>F</b>	I, H	8
<b>G</b>	K	5
<b>H</b>	K	4
<b>I</b>	M	2
<b>J</b>	-	19
<b>K</b>	-	6
<b>L</b>	M	5
<b>M</b>	-	9

Se dibuja en primer lugar la red del proyecto:



Para realizar los cálculos de las fechas del proyecto se comienza con el nodo inicio (suceso 1). Se toma como Fecha Temprana (Ft) del nodo inicio al instante 0. Este valor se elige arbitrariamente. Al menos que se tengan razones como para empezar con algún otro valor diferente de tiempo, el instante cero es lo más conveniente.

La Primera Fecha de Comienzo de las actividades que surgen del nodo 1, es decir las actividades A y B, es 0. Luego, la Primera Fecha de Finalización de A es

$$PFF_{1-2} = Ft_1 + d_{1-2} = 0 + 4 = 4$$

y la de B es

$$PFF_{1-3} = Ft_1 + d_{1-3} = 0 + 6 = 6.$$

La Fecha Temprana del nodo 2 es la mayor de las PFF de las actividades que concurren a él (en este caso, una sola), es decir:

$$Ft_2 = \text{mayor } (PFF_{i-2}) = 4.$$

Por su parte la Fecha Temprana del nodo 3 es

$$Ft_3 = \text{mayor } (PFF_{i-3}) = 6.$$

Continuando ahora por el nodo 2, la Primera Fecha de Comienzo de las tareas que salen de él ( $PFC_{2-j}$ ) es igual a la Fecha Temprana, o sea 4. Por su parte, la Primera Fecha de Finalización de C es

$$PFF_{2-4} = Ft_2 + d_{2-4} = 4 + 5 = 9.$$

y la Primera Fecha de Finalización de J es

$$PFF_{2-10} = Ft_2 + d_{2-10} = 4 + 19 = 23$$

A su vez, la Primera Fecha de Comienzo de las tareas que salen del nodo 3 (PFC<sub>3-j</sub>) es 6, por lo que la Primera Fecha de Finalización de D es

$$PFF_{3-5} = Ft_3 + d_{3-5} = 6 + 7 = 13$$

y la de la actividad ficticia 3-4 es

$$PFF_{3-4} = Ft_3 + d_{3-4} = 6 + 0 = 6$$

Pasando ahora al suceso 4, la Fecha Temprana (la mayor de las Primeras Fechas de Finalización PFF<sub>i-4</sub> que concurren a él) es:

$$Ft_4 = \text{mayor}(PFF_{1-4}) = \text{mayor}(PFF_{2-4}, PFF_{3-4}) = \text{mayor}(9, 6) = 9$$

Las Primeras Fechas de Comienzo de E y F son, entonces 9. Por lo tanto, las Primeras Fechas de Finalización de ellas serán:

$$PFF_{4-6} = Ft_{4-6} + d_{4-6} = 9 + 6 = 15$$

$$PFF_{4-7} = Ft_4 + d_{4-7} = 9 + 8 = 17$$

Siguiendo por el nodo 6, su Fecha Temprana es entonces 15. La Primera Fecha de Finalización de L es:

$$PFF_{6-8} = Ft_6 + d_{6-8} = 15 + 5 = 20$$

En el nodo 7 tendremos que la Fecha Temprana es 17. Las primeras Fechas de Finalización de I y H son:

$$PFF_{7-8} = Ft_7 + d_{7-8} = 17 + 2 = 19$$

$$PFF_{7-9} = Ft_7 + d_{7-9} = 17 + 4 = 21$$

En el nodo 5, como concurre una sola actividad con Primera Fecha de Finalización igual a 13, su Fecha Temprana es 13. Para la actividad G, la Primera Fecha de Finalización será:

$$PFF_{5-9} = Ft_5 + d_{5-9} = 13 + 5 = 18$$

Siguiendo ahora por el nodo 8, tendremos que la Fecha Temprana es la siguiente:

$$Ft_8 = \text{mayor}(PFF_{1-8}) = \text{mayor}(PFF_{6-8}, PFF_{7-8}) = \text{mayor}(20, 19) = 20$$

Entonces, la Primera Fecha de Finalización de M será

$$PFF_{8-10} = Ft_8 + d_{8-10} = 20 + 9 = 29$$

Pasando al nodo 9, la Fecha Temprana será:

$$Ft_9 = \text{mayor}(PFF_{i-9}) = \text{mayor}(PFF_{7-9}, PFF_{5-9}) = \text{mayor}(21, 18) = 21$$

Por su parte, tendremos que la Primera Fecha de Finalización de K es

$$PFF_{9-10} = Ft_9 + d_{9-10} = 21 + 6 = 27$$

Finalmente, en el nodo 10 (nodo fin) la Fecha Temprana será:

$$Ft_{10} = \text{mayor}(PFF_{i-10}) = \text{mayor}(PFF_{2-10}, PFF_{8-10}, PFF_{9-10}) = \text{mayor}(23, 29, 27) = 29$$

La duración total del proyecto será de 29 semanas. Se procede ahora a calcular las Fechas Tardías de los nodos y las Últimas Fechas de Comienzo de las actividades, partiendo desde el último nodo (evento 10) hacia el primero de ellos.

Se establece como Fecha Tardía del último nodo a la Fecha Temprana del mismo. Es decir,

$$FT_{10} = 29$$

En consecuencia, las últimas Fechas de Finalización de todas las actividades que concurren al nodo 10 (J, M y K) serán igual a 29. De tal forma, las Últimas Fechas de Comienzo de esas actividades serán:

$$UFC_{2-10} = FT_{10} - d_{2-10} = 29 - 19 = 10$$

$$UFC_{8-10} = FT_{10} - d_{8-10} = 29 - 9 = 20$$

$$UFC_{9-10} = FT_{10} - d_{9-10} = 29 - 6 = 23$$

La Fecha Tardía de un nodo es la menor de las Últimas Fechas de Comienzo de las actividades que parten de él. Como del nodo 8 sale una sola actividad la Fecha Tardía es 20, es decir:

$$FT_8 = \text{menor}(UFC_{8-j}) = 20$$

Las Últimas Fechas de Comienzo de L e I serán:

$$UFC_{6-8} = FT_8 - d_{6-8} = 20 - 15 = 15$$

$$UFC_{7-8} = FT_8 - d_{7-8} = 20 - 2 = 18$$

Pasando ahora al nodo 9, tendremos que su Fecha Tardía es 23, es decir

$$FT_9 = \text{menor}(UFC_{9-j}) = 23$$

y las últimas fechas de comienzo de las actividades que concurren a él (H y G) serán:

$$UFC_{7-9} = FT_9 - d_{7-9} = 23 - 4 = 19$$

$$UFC_{5-9} = FT_9 - d_{5-9} = 23 - 5 = 18$$

Pasando al nodo 7, tendremos que la Fecha Tardía es:

$$FT_7 = \text{menor}(UFC_{7-j}) = \text{menor}(UFC_{7-8}, UFC_{7-9}) = \text{menor}(18, 19) = 18$$

A su vez, la Última Fecha de Comienzo de F será:

$$UFC_{4-7} = FT_7 - d_{4-7} = 18 - 8 = 10$$

Analizando el nodo 6, tendremos que su Fecha Tardía es 15 ya que de él sale sólo una actividad (la L), o sea:

$$FT_6 = \text{menor}(UFC_{6-j}) = 15$$

y, la Última Fecha de Comienzo de E será:

$$UFC_{4-6} = FT_6 - d_{4-6} = 15 - 6 = 9$$

Pasando ahora al nodo 4, tendremos que su Fecha Tardía es:

$$FT_4 = \text{menor}(UFC_{4-j}) = \text{menor}(UFC_{4-6}, UFC_{4-7}) = \text{menor}(9, 10) = 9$$

Por lo tanto las últimas fechas de comienzo de C y de la actividad "dummy" 3-4 serán:

$$UFC_{2-4} = FT_4 - d_{2-4} = 9 - 5 = 4$$

$$UFC_{3-4} = FT_4 - d_{3-4} = 9 - 0 = 9$$

En el nodo 2, tendremos que su Fecha Tardía es:

$$FT_2 = \text{menor}(UFC_{2-j}) = \text{menor}(UFC_{2-10}, UFC_{2-4}) = \text{menor}(10, 4) = 4$$

Por consiguiente, la Última Fecha de Comienzo de la actividad que concurre a él (Actividad A) será:

$$UFC_{1-2} = FT_2 - d_{1-2} = 4 - 4 = 0$$

En el nodo 5, la Fecha Tardía es:

$$FT_5 = \text{menor}(UFC_{5-j}) = 18$$

y, en consecuencia, la UFC de D será:

$$UFC_{3-5} = FT_5 - d_{3-5} = 18 - 7 = 11$$

En el nodo 3, tendremos que la Fecha Tardía es:

$$FT_3 = \text{menor} (UFC_{3-j}) = \text{menor} (UFC_{3-4}, UFC_{3-5}) = \text{menor} (9, 11) = 9$$

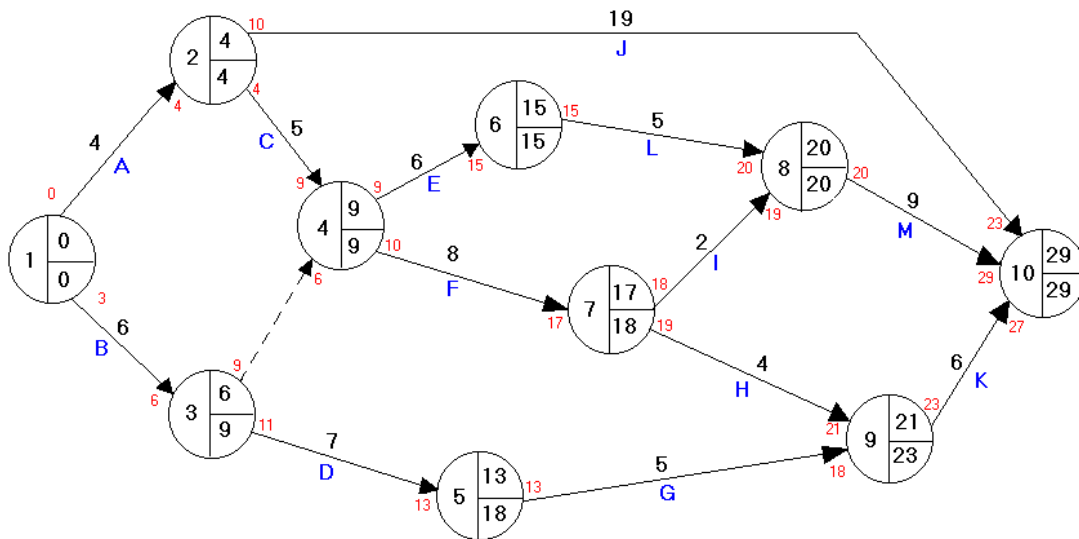
A su vez, la Última Fecha de Comienzo de la actividad B será:

$$UFC_{1-3} = FT_3 - d_{1-3} = 9 - 6 = 6$$

Finalmente, en el nodo 1 (nodo inicial), la Fecha Temprana será:

$$FT_1 = \text{menor} (UFC_{1-j}) = \text{menor} (UFC_{1-2}, UFC_{1-3}) = \text{menor} (0, 3) = 0$$

Todos estos los cálculos efectuados, que se fueron volcando sobre la red, se pueden observar en el siguiente gráfico:



**DEFINICIONES DE MÁRGENES:**

Definiremos como margen de un suceso a la diferencia entre su Fecha Tardía y su Fecha Temprana, es decir:

$$MS_i = FT_i - Ft_i$$

Observando los márgenes de los sucesos del proyecto, encontramos que varios de ellos tienen un margen menor. Éstos son los nodos 1, 2, 4, 6, 8 y 10 (en este caso, margen 0). El resto de los sucesos tienen un margen mayor.

Se dice que los sucesos que tienen el margen menor son sucesos críticos. Existe una secuencia ininterrumpida de acontecimientos críticos desde el comienzo del proyecto (nodo inicio) hasta el final de éste (nodo fin).

Definiremos ahora como "Margen Total" de una actividad a la diferencia entre la Última Fecha de Finalización y la Primera Fecha de Finalización:

$$MT_{i-j} = UFF_{i-j} - PFF_{i-j} = FT_j - (Ft_i + d_{i-j})$$

Es decir,

$$MT_{i-j} = FT_j - Ft_i - d_{i-j}$$

Por ejemplo, en el ejercicio anterior la actividad G tiene el siguiente Margen Total:

$$MT_{5-9} = FT_9 - Ft_5 - d_{5-9} = 23 - 13 - 5 = 5$$

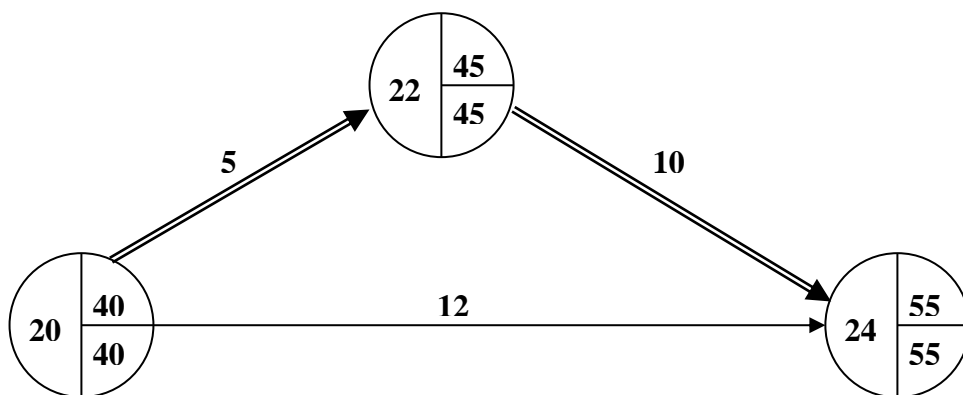
y la actividad F:

$$Mt_{4-7} = FT_7 - Ft_4 - d_{4-7} = 18 - 9 - 8 = 1$$

Las actividades críticas son aquellas que tienen menor Margen Total. En el ejemplo planteado, las actividades A, C, E, L y M son actividades críticas, ya que todas ellas tienen el menor Margen Total (en este caso, margen igual a cero).

Las actividades críticas quedan siempre definidas entre nodos críticos. Existe, por lo tanto, también una secuencia de actividades críticas desde el principio del proyecto hasta el final del proyecto. Esta secuencia de actividades se conoce con el nombre de "camino crítico" que, como dijimos anteriormente, es la secuencia de mayor duración y que define la duración total del proyecto (en nuestro ejemplo, 29 semanas). En el ejemplo planteado, el camino crítico es la secuencia de actividades A-C-E-L-M.

Cuando no hay ningún tipo de restricciones sobre las fechas, los nodos críticos tienen margen cero (es decir, Fecha Tardía igual a Fecha Temprana) y las actividades críticas tienen Margen Total cero. En consecuencia, resulta muy sencillo determinar gráficamente el camino crítico de un proyecto conectando los nodos cuyas Fechas Tardías son iguales a las Fechas Tempranas. Sin embargo hay que tener en consideración que, si bien una actividad crítica queda siempre definida entre dos nodos críticos, no siempre dos nodos críticos definen una actividad crítica. En efecto, supongamos el siguiente caso:



Los nodos 20, 22 y 24 son nodos críticos. Las actividades 20-22 y 22-24 son críticas porque ellas definen el camino más largo. La actividad 20-24, en cambio, no es crítica (y, sin embargo, está definida entre dos nodos críticos).

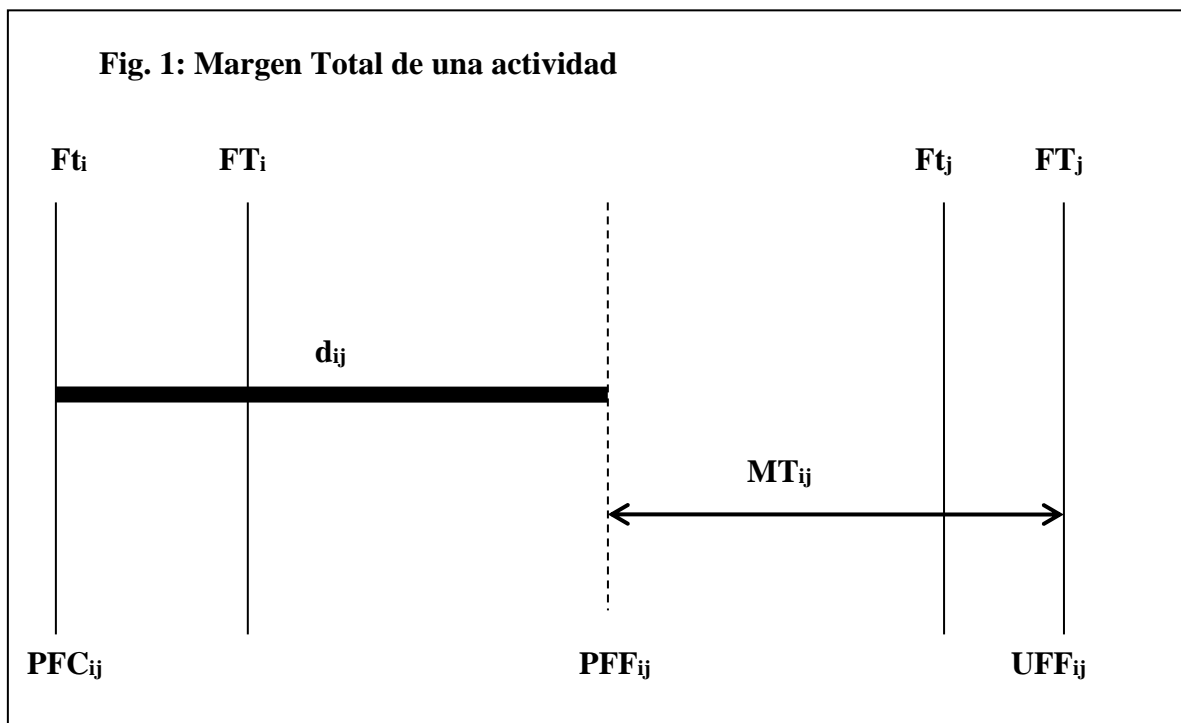
Como se dijo anteriormente, el camino crítico es la secuencia más larga de la red. Es importante porque, por un lado, determina la longitud del proyecto y, por el otro, si alguna actividad del camino crítico se retrasa, el proyecto se retrasa.

En los modelos de los proyectos reales las fechas calculadas en forma relativa al instante cero se calendarizan. La mayoría de los sistemas computarizados de programación por camino crítico presentan esta facilidad. Al definir la fecha de inicio como una fecha calendario, el sistema calcula todas las demás fechas en forma calendario, teniendo en cuenta feriados, fines de semana y otros días no laborables o parcialmente laborables que introduzcan al programa.

En un proyecto pueden existir varios caminos críticos. En el caso de haber más de un camino crítico, éstos pueden ser completamente independientes entre sí, o pueden tener algunas ramas en común.

Como se mencionó más arriba, el Margen Total de una actividad es la diferencia entre la Última Fecha de Finalización ( $UFF_{ij}$ ) de una actividad y la Primera Fecha de Finalización ( $PPF_{ij}$ ) de la misma; es decir, la diferencia entre la Fecha Tardía ( $FT_j$ ) del nodo al que concurre menos la Fecha Temprana del nodo del que parte ( $Ft_i$ ) y menos la duración de la actividad ( $d_{ij}$ ). Gráficamente, lo podemos observar en la figura 1.

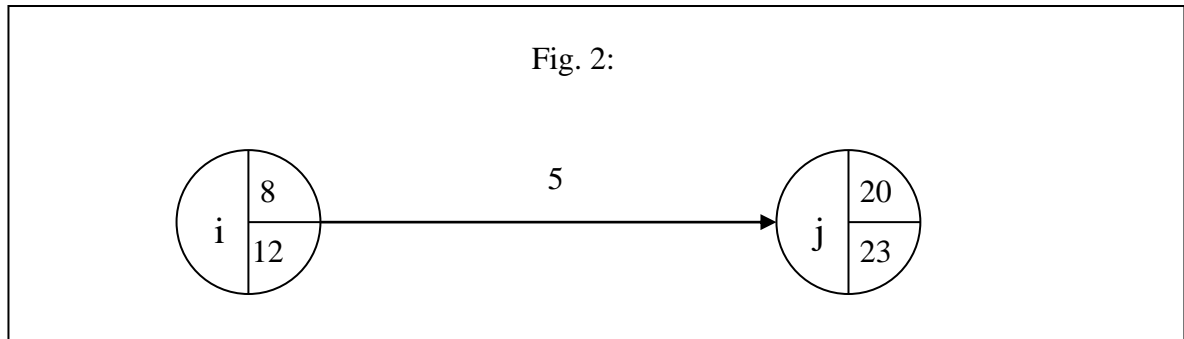
El Margen Total de una actividad representa el tiempo máximo que se puede demorar una actividad sin atrasar el proyecto. Esto es, si una actividad se toma su Margen Total, la actividad se hará crítica y el proyecto quedará, en consecuencia, comprometido desde su origen hasta el nodo inicial de la tarea y desde el nodo fin de la tarea hasta su terminación.



Supongamos una actividad  $i-j$ , cuyos datos en lo que se refiere a duración y Fechas Tempranas y Tardías de los acontecimientos origen y fin de la misma son los siguientes:

Duración: 5 unidades de tiempo  
 Fecha Temprana del nodo  $i$ : 8  
 Fecha Tardía del nodo  $i$ : 12  
 Fecha Temprana del nodo  $j$ : 20  
 Fecha Tardía del nodo  $j$  es 23

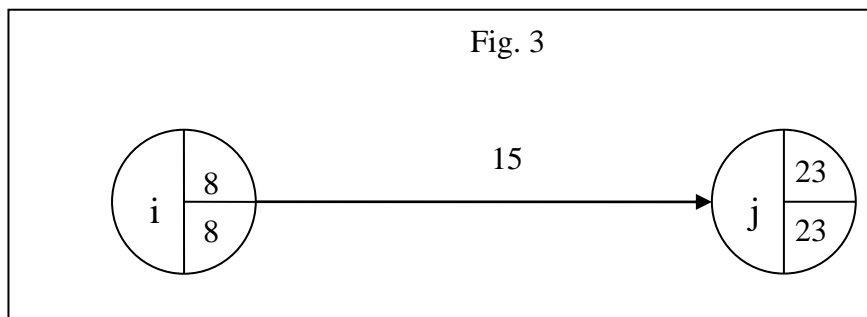
Esta tarea se grafica en la Figura 2.



El Margen Total de la actividad es

$$Mt_{i,j} = 23 - 8 - 5 = 10$$

Esto significa que si la tarea se demora en 10 unidades de tiempo (o sea que la duración total fuera de 15 unidades en lugar de las 5 originales), el nodo origen se tendría que verificar en su Fecha Temprana (en el ejemplo, 8) y el nodo fin en su Fecha Tardía (en el ejemplo, 23), tal como se ve en la figura 3. Tomar el Margen Total para programar una actividad significaría hacer crítica la actividad y quedarían comprometidas las tareas de una rama que concurre a acontecimiento i y las tareas de una rama que emerge del acontecimiento j.



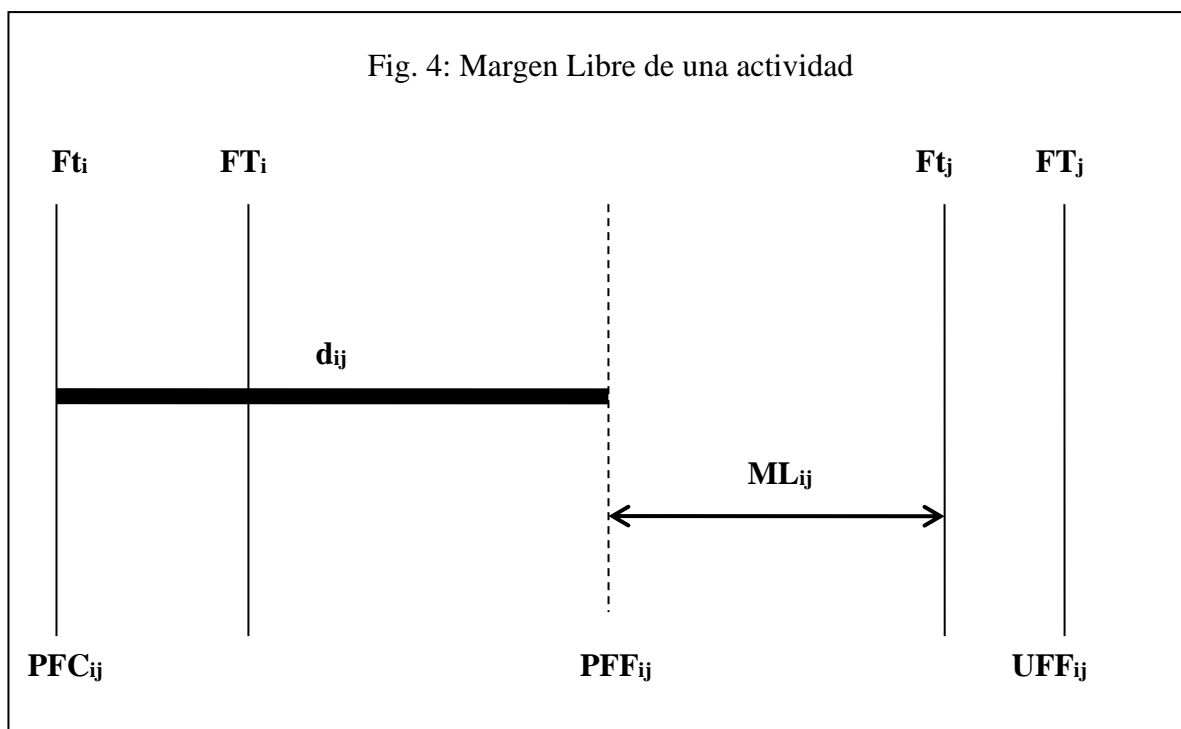
Otro concepto interesante a definir para las actividades es el de "Margen Libre". Este margen es la diferencia entre la Fecha Temprana del nodo j y la Primera Fecha de Finalización de la tarea

$$ML_{i,j} = Ft_j - PFF_{i,j} = Ft_j - (Ft_i + d_{i,j})$$

Es decir, es igual a la Fecha Temprana del nodo j menos la Fecha Temprana de i y menos la duración de la actividad ij:

$$ML_{i,j} = Ft_j - Ft_i - d_{i,j}$$

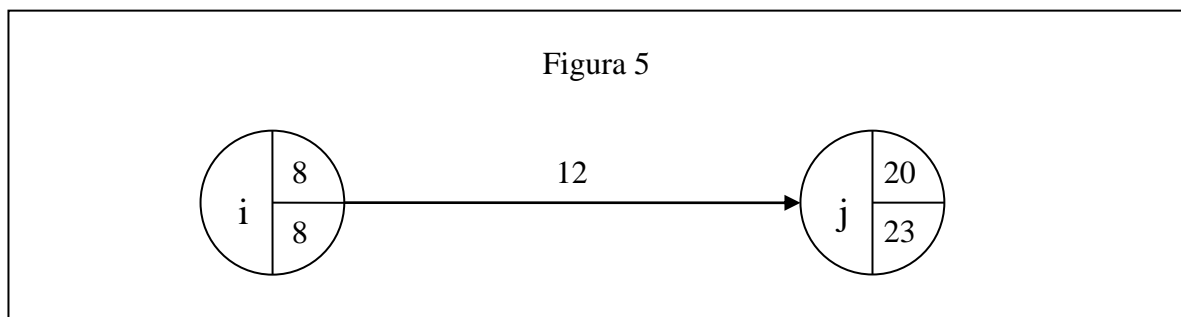
Gráficamente, el Margen Libre se observa en la Figura 4



Este concepto es útil cuando se está programando la actividad para que comience lo antes posible e interesa conocer cuál es el margen de tiempo disponible para no modificar el proyecto hacia adelante, es decir para no modificar las fechas temprana y tardía del nodo j que define su finalización. Tomando el mismo ejemplo de la Figura 2, el Margen Libre es:

$$ML_{i-j} = 20 - 8 - 5 = 7$$

Esto significa que si la tarea se demora en 7 unidades de tiempo (o sea que la duración total fuera de 12 unidades en lugar de las 5 originales), y programándola para que comience en su Fecha Temprana (en el ejemplo, 8), las fechas temprana y tardía del suceso j no se modificarían, como se indica en la Figura 5. Tomar el Margen Libre para programar una actividad significa hacer crítico su nodo origen, es decir comprometer al proyecto hacia atrás, y no modificar en absoluto el proyecto hacia adelante.



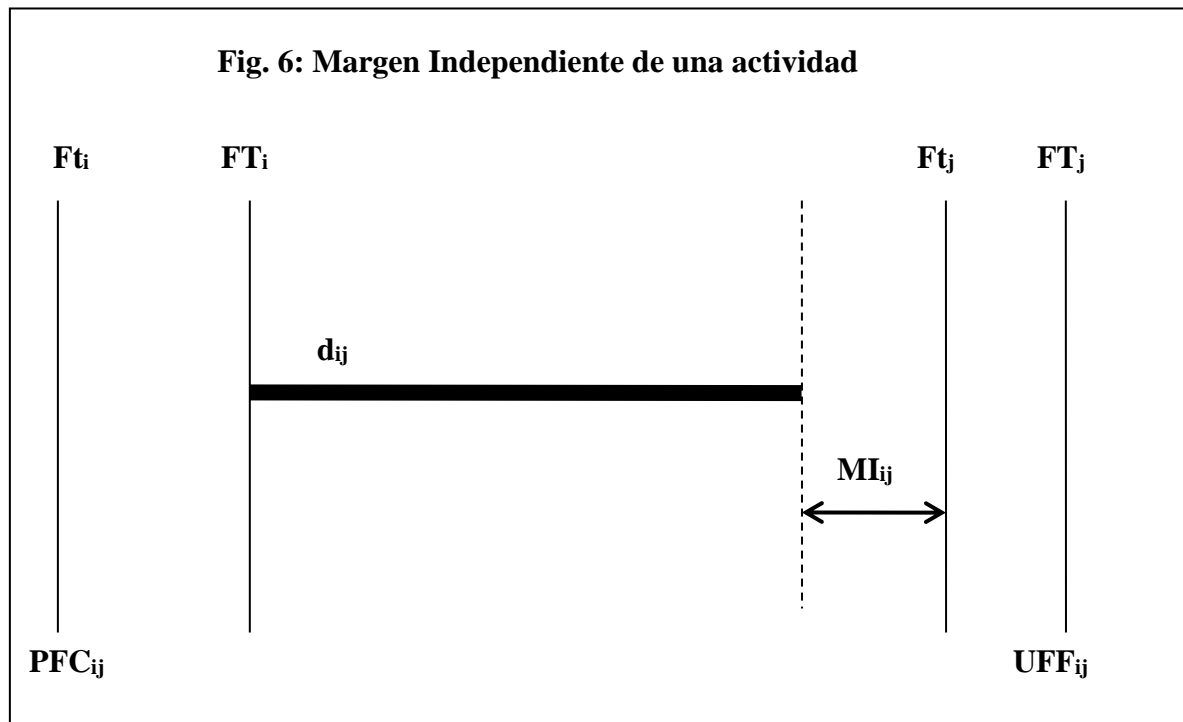
Finalmente, definiremos el "Márgen Independiente" de una actividad. Este margen es la diferencia entre la Fecha Temprana del nodo j y la suma de la Fecha Tardía de i más la duración de la tarea:

$$MI_{i,j} = Ft_j - (FT_i + d_{i,j})$$

Es decir,

$$MI_{i,j} = Ft_j - FT_i - d_{i,j}$$

Gráficamente, el Margen Independiente se observa en la Figura 6



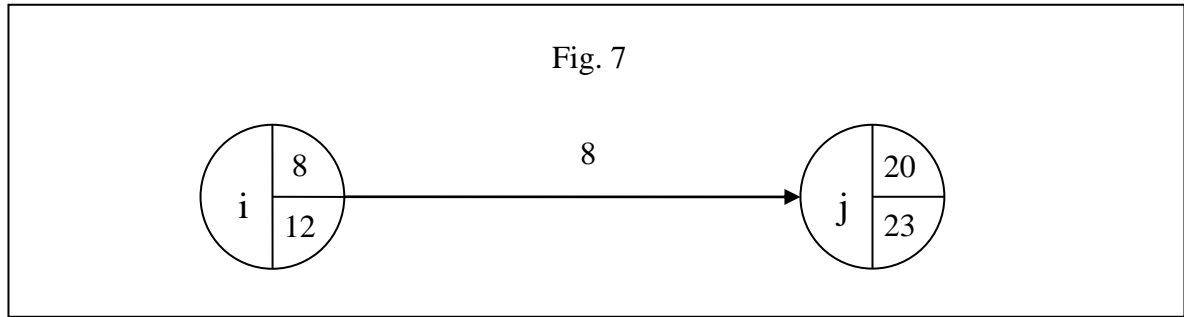
El Margen Independiente representa el Margen Total disponible para programar la actividad sin que se modifiquen los márgenes de los nodos origen y fin de la actividad. Es decir, si se toma todo el margen, el proyecto no se compromete ni hacia atrás del nodo i ni hacia adelante del nodo j. Tomando el mismo ejemplo de la Figura 2, el Margen Independiente es:

$$MI_{i,j} = 20 - 12 - 5 = 3$$

Esto significa que si la tarea se demora en 3 unidades de tiempo (o sea que la duración total fuera de 8 unidades en lugar de las 5 originales), aunque se programe la actividad en su Fecha Tardía (es decir el 12) el margen del suceso i seguiría siendo de 4 y el de j de 3, como se indica en la Figura 7.

Cuando un Margen Independiente es negativo, significa que sería imposible programar la actividad para que comience en la Fecha Tardía de "i" y no modificar la Fecha Temprana de "j". Supongamos que en el ejemplo anterior, la fecha de la tarea i-j fuera de 10 unidades. En ese caso, el Margen Independiente sería:

$$MI_{i,j} = 20 - 12 - 10 = -2$$



Esto implica que para mantener los márgenes de los nodos i y j sin modificar habría que reducir la duración de la actividad de 10 a 8 unidades.

Una actividad ficticia, en un proyecto en donde no hay restricciones de imposiciones de fechas, tiene Margen Total, Margen Libre y Margen Independiente igual a cero.

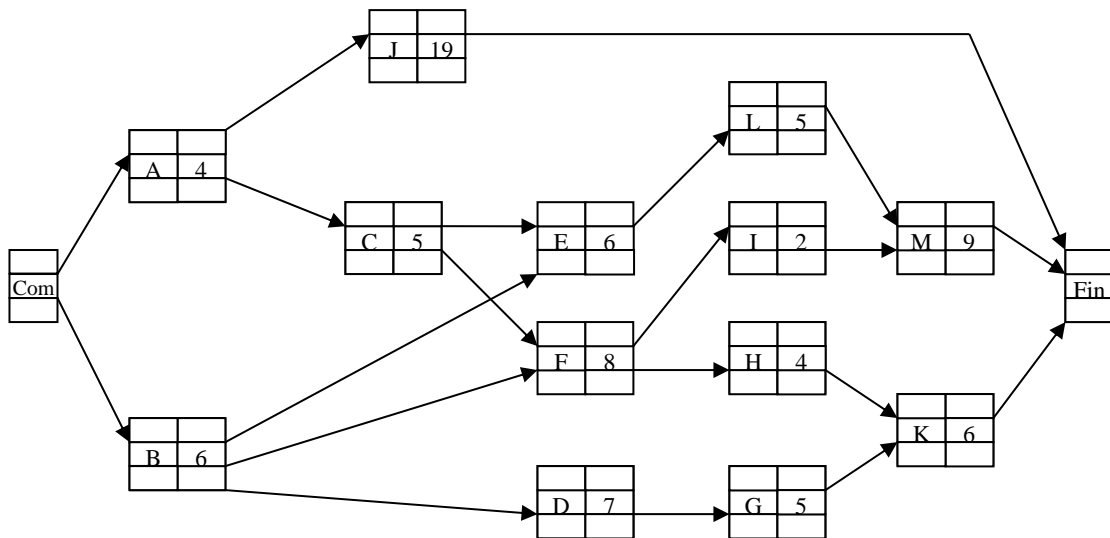
### MÉTODO DE POTENCIALES

El cálculo del camino crítico con el método Nodo-Actividad es similar al visto para el método Flecha-Actividad. Para desarrollar el tema, utilizaremos el mismo ejemplo anterior, que se muestra a continuación:

	Precede inmediatamente a	Duración (semanas)
<b>A</b>	C, J	4
<b>B</b>	D, E, F	6
<b>C</b>	E, F	5
<b>D</b>	G	7
<b>E</b>	L	6
<b>F</b>	I, H	8
<b>G</b>	K	5
<b>H</b>	K	4
<b>I</b>	M	2
<b>J</b>	-	19
<b>K</b>	-	6
<b>L</b>	M	5
<b>M</b>	-	9

En primer lugar se comienza graficando la red.

Posteriormente se establece como fecha de inicio del proyecto la semana 0, por lo que se coloca en el nodo Inicio (Com), como Primera Fecha de Comienzo, el valor 0 en la parte superior del nodo. Las actividades A y B tendrán como Primera Fecha de Comienzo el instante 0. Este valor se coloca en la parte superior izquierda del nodo. Luego se calcula la Primera Fecha de Finalización (como suma de la Primera Fecha de Comienzo más la duración de la Actividad) de estas actividades. Cada uno de estos valores se consigna en la parte superior derecha del nodo respectivo. Así tendremos que  $PFF_A = 4$  y  $PFF_B = 6$ .



Se pasa ahora a las actividades consecuentes de A (J y C). En ambos nodos se consigna la Primera Fecha de Comienzo igual a 4 y se calculan las Primeras Fechas de Finalización (23 y 9, respectivamente).

Luego se pasa a las actividades consecuentes de B (E, F y D). La Primera Fecha de Comienzo de E es la mayor de las Primeras Fechas de Finalización de sus precedentes; es decir, entre 9 y 6 seleccionamos el valor 9. Para la actividad F ocurre lo mismo ( $PFC_F = 9$ ), mientras que para D la Primera Fecha de Comienzo es 6. Se calculan, entonces las Primeras Fechas de Finalización de estas tareas, que resultan respectivamente 6, 17 y 13.

Así se prosigue hasta el último nodo (Nodo Fin), en donde observamos que la Primera Fecha de Finalización del proyecto es igual a 29 semanas. Como este valor será la duración del proyecto, se lo consigna en el último nodo como Última Fecha de Finalización. La UFF se consigna en la parte inferior derecha del nodo.

Luego se calculan los valores de las últimas fechas de comienzo y finalización de las actividades recorriendo la red en sentido inverso al efectuado, es decir desde la finalización del proyecto hasta el principio. Así todas las actividades que terminan en el nodo fin (J, M y K) tendrán como Última Fecha de Finalización la semana 29. Se procede entonces a calcular la Última Fecha de Comienzo de cada una de estas tareas cuyos valores son respectivamente

$$UFC_J = 29 - 19 = 10$$

$$UFC_M = 29 - 9 = 20$$

$$UFC_K = 29 - 6 = 23$$

Las tareas predecesoras de M (L e I) tendrán como Última Fecha de Finalización la semana 20, mientras que las predecesoras de K (H y G) tendrán como Última Fecha de Finalización la semana 23. Por su parte, las Últimas Fechas de Comienzo de estas actividades serán:

$$UFC_L = 20 - 5 = 15$$

$$UFC_I = 20 - 2 = 18$$

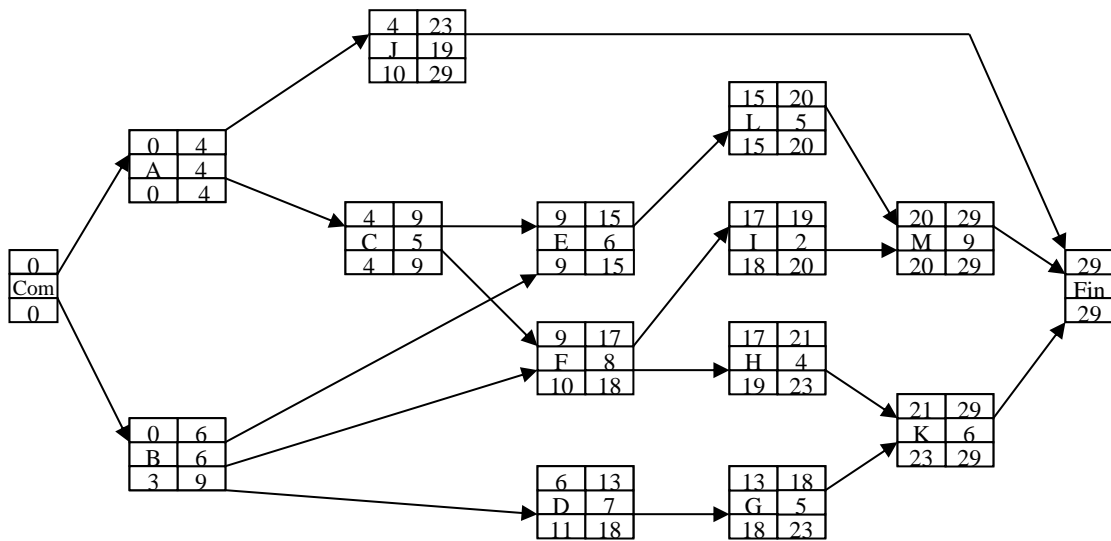
$$UFC_H = 23 - 4 = 19$$

$$UFC_G = 23 - 5 = 18$$

Siguiendo el proceso, E tendrá como Última Fecha de Finalización la semana 15 y como Última Fecha de Comienzo  $15 - 6 = 9$ .

Por su parte, F tendrá como Última Fecha de Finalización a la menor de la Últimas Fechas de Comienzo de sus consecuentes (es decir, 18). Su Última Fecha de Comienzo será entonces  $18 - 8 = 10$ .

El proceso de cálculo se continúa hasta el nodo inicial. Para determinar el Camino Crítico bastará con identificar la secuencia de actividades cuya Primera Fecha de Comienzo coincida con su Última Fecha de Comienzo y su Primera Fecha de Finalización con su Última Fecha de Finalización (es decir, actividades críticas). Esto es, cuando la fila superior y la inferior del nodo son iguales. De este modo, entonces el camino crítico es la secuencia A-C-E-L-M.



### III. ESTIMACIÓN DE DURACIONES

#### ESTIMACIONES PONDERADAS

El sistema CPM asume una estimación única para la determinación de la duración de cada una de las tareas que componen el proyecto. Es decir, supone que los tiempos son determinísticos. En los procesos reales, sin embargo, existe generalmente aleatoriedad, aún bajo las mejores circunstancias de planeamiento. Estas desviaciones se pueden dar por fallas en las máquinas, enfermedades del personal, condiciones climáticas, etc. En proyectos en donde se tiene una importante experiencia previa, el componente aleatorio en lo que se refiere a la duración de las actividades es bajo y, en consecuencia, hacer una estimación única resulta apropiado. Este fue el caso de la empresa DuPont cuando desarrolló el método de CPM, ya que contaba con una importante experiencia en proyectos de construcción de plantas, y conocía con bastante precisión las duraciones de las actividades asociadas.

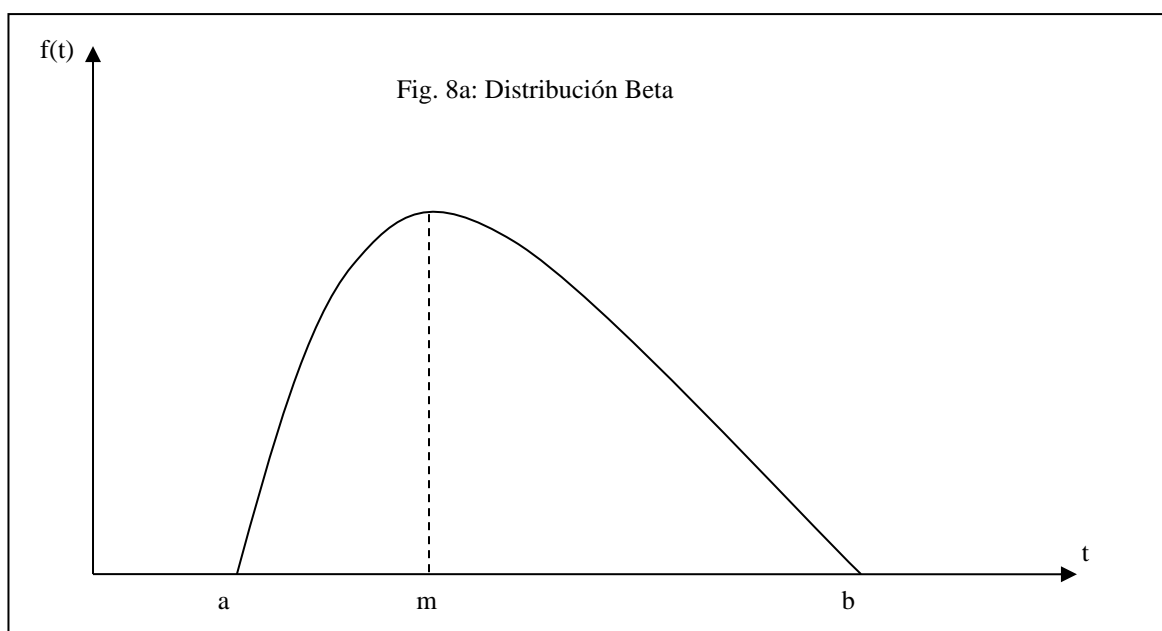
En muchos proyectos esta suposición resulta bastante pobre, especialmente cuando no se tiene experiencia previa, como ocurrió con la Secretaría de Proyectos de la armada de los Estados Unidos cuando desarrolló el método PERT, para el proyecto Polaris. El PERT fue desarrollado para considerar valores inciertos al estimar las duraciones de las actividades.

En lugar de una estimación única para la duración de una tarea, el PERT efectúa tres estimaciones que se combinan estadísticamente para producir la estimación que se utilizará en el cálculo del camino crítico. Ellas son:

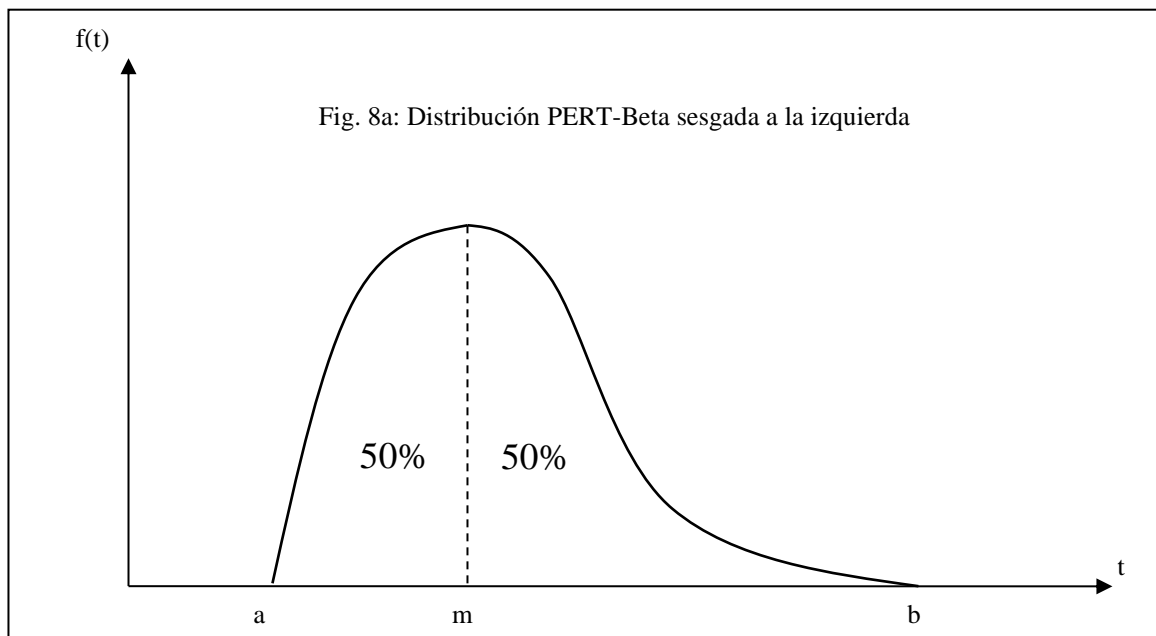
1. Tiempo optimista (a). Es el tiempo mínimo de duración de la tarea bajo la suposición de que, en condiciones normales de realización, todo anda bien.
2. Tiempo pesimista (b). Este tiempo constituye, por el contrario, el tiempo máximo de duración de la tarea en condiciones normales.
3. El tiempo más probable (m). Representa el tiempo de ejecución con mayor probabilidad de ocurrencia, en condiciones normales.

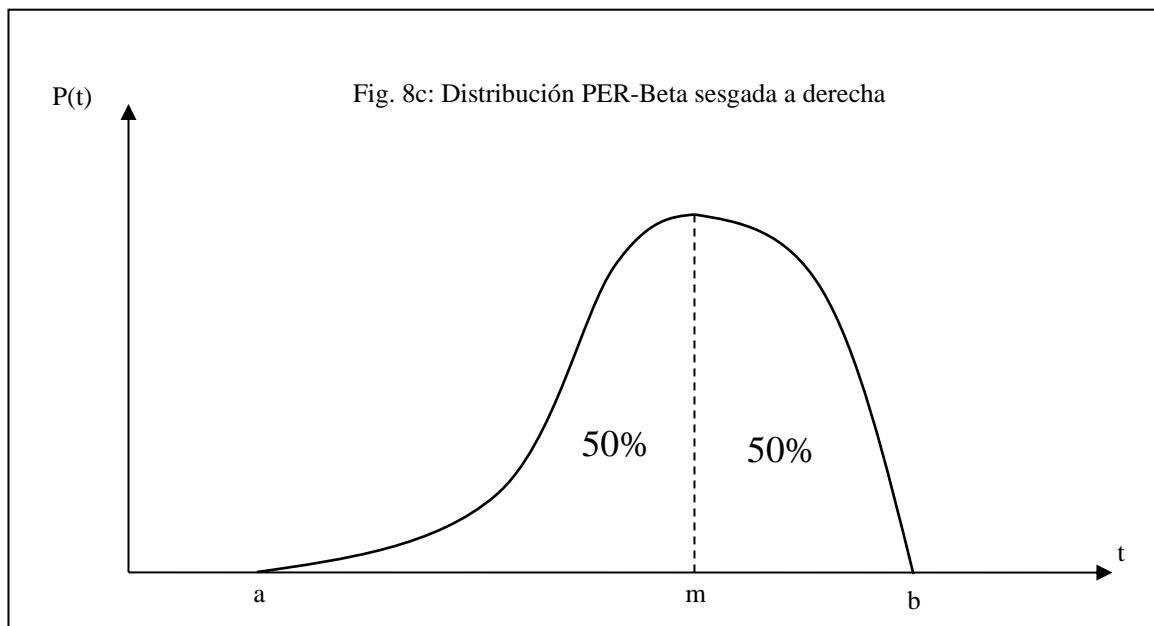
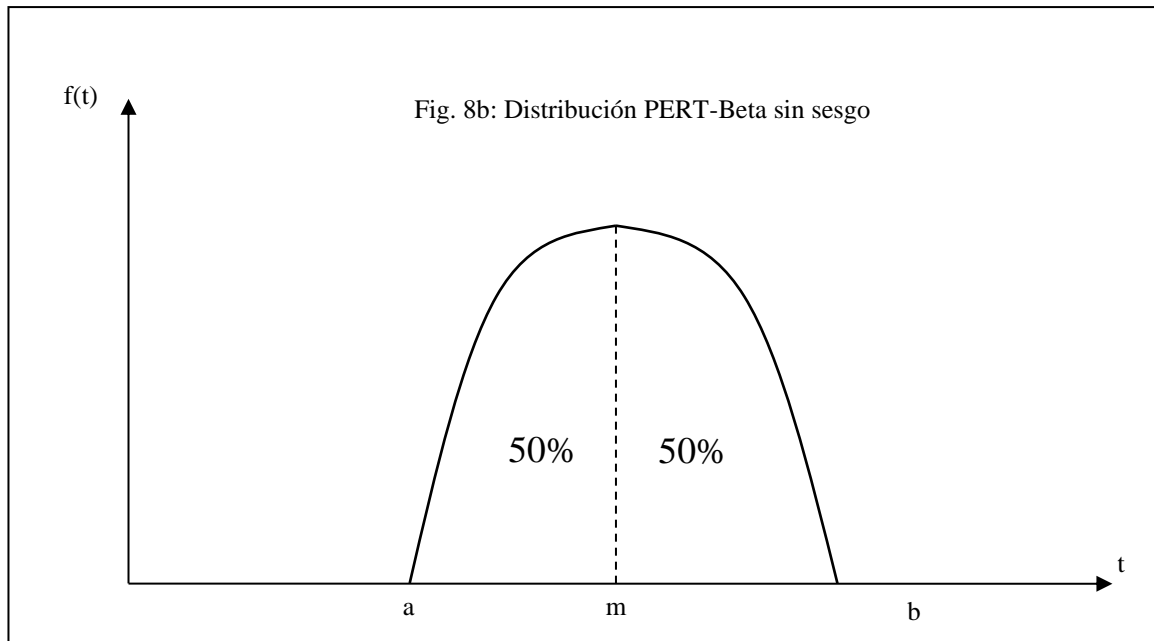
El PERT asume que las duraciones de las actividades tiene una distribución Beta, cuyos parámetros son los tiempos optimista (límite inferior de la distribución), pesimista (límite superior de la distribución) y más probable (moda de la distribución), como se muestra en el gráfico de la Fig. 8.

La distribución Beta es muy apropiada para describir duraciones de actividades. Por un lado, corta al eje de las abscisas en dos puntos; esto se da con las duraciones de tareas (es decir hay un mínimo y un máximo). Por otro lado, la distribución Beta es una distribución monomodal, como ocurre con la mayoría de las duraciones de las actividades en la práctica. La Beta es una distribución muy flexible y se adapta, modificando sus parámetros, a distintas situaciones del mundo real. Por ejemplo, las distribuciones Uniforme, Delta y Triangular son casos particulares de la distribución Beta.



Una segunda suposición de este sistema de administración de proyectos es que la distribución tiene una media que coincide con la moda, de manera tal de dar mayor preponderancia a la duración más probable. A esta distribución se la denomina PERT-Beta. En las Figuras 8a, 8b y 8c se muestra esquemáticamente la forma para variables con sesgo a izquierda, sin sesgo y con sesgo a derecha, respectivamente.

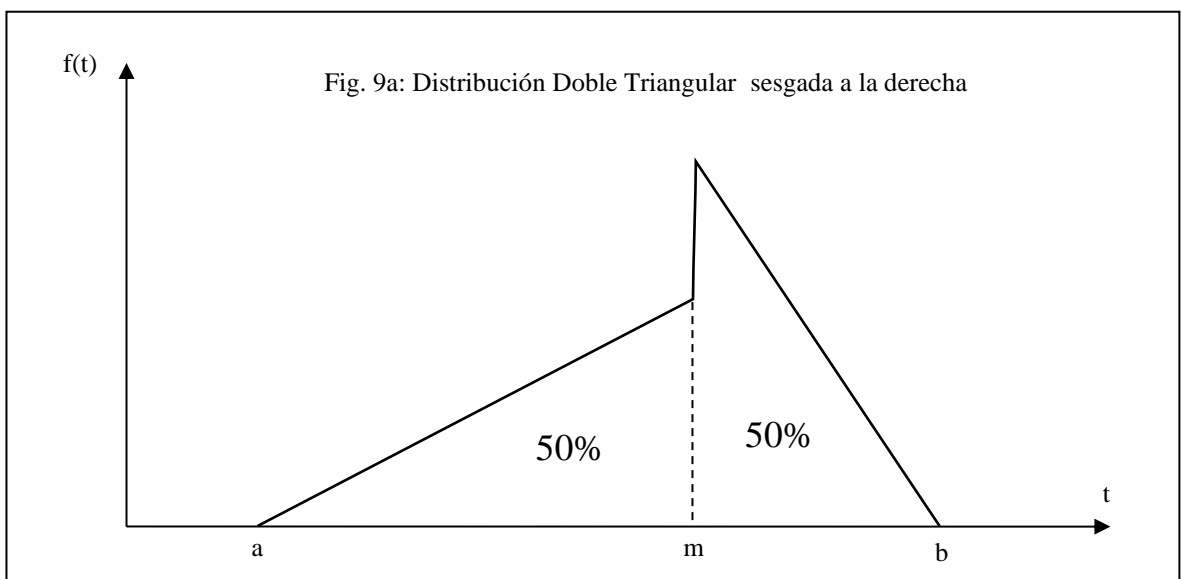
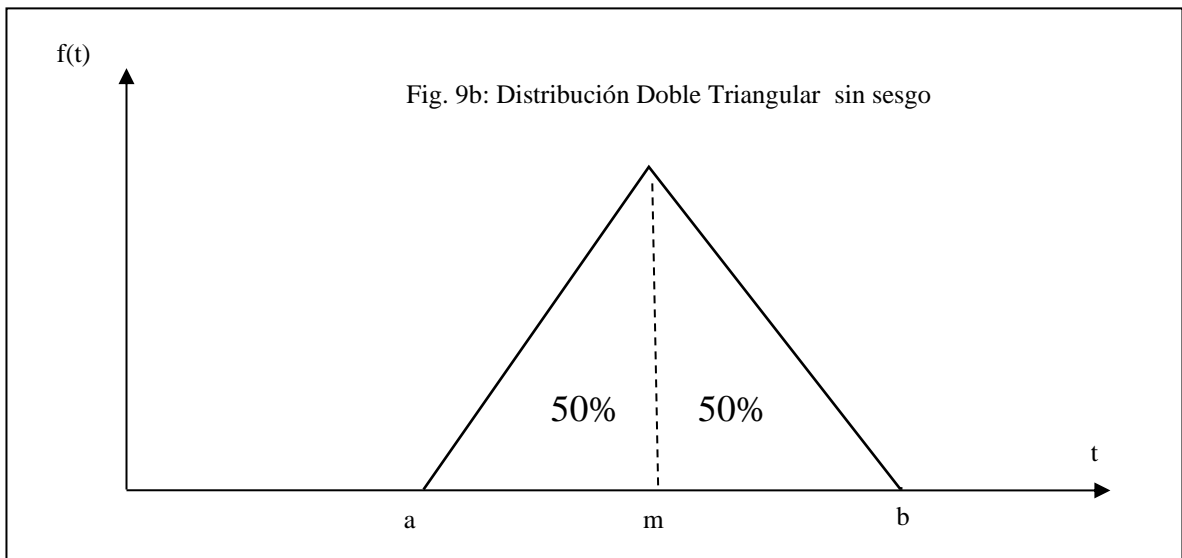
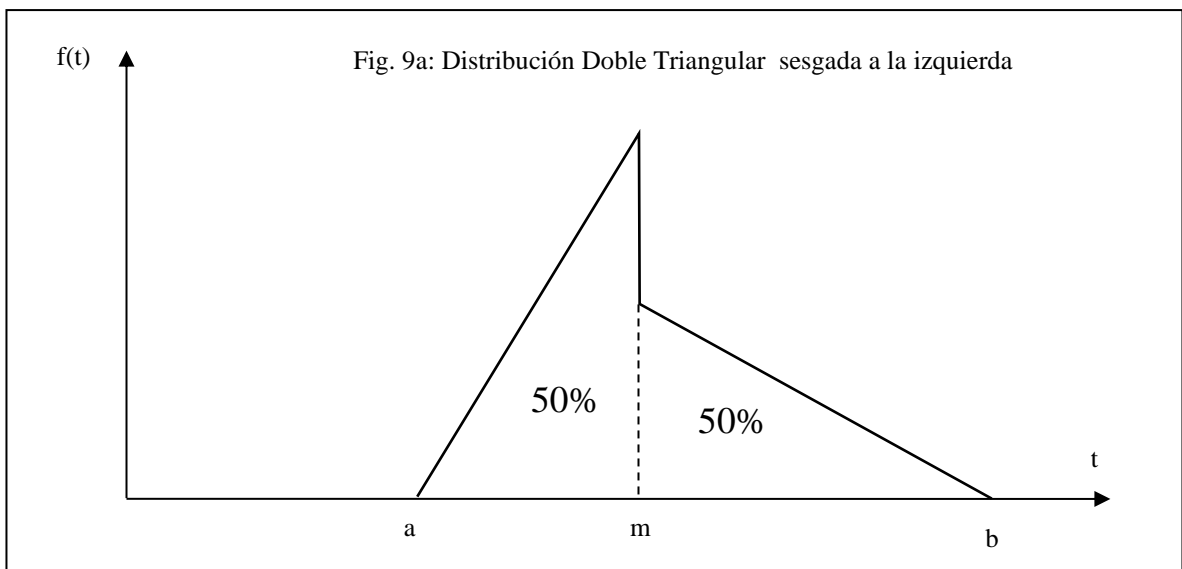




Otra simplificación que efectúa el PERT es que las duraciones de las actividades tienen una distribución doble triangular (Figs. 9a, 9b y 9c). Esto se hace a los efectos de simplificar significativamente los cálculos de la media (tiempo esperado de duración de la actividad) y del desvío estándar.

Esta distribución es una combinación de dos triangulares con un área de 0,5 cada una de ellas, de modo que la moda coincide con la mediana, y así dar un peso mayor a la estimación más probable. La densidad de probabilidad la doble-triangular es:

$$f(x) = \frac{x - a}{(m - a)^2} \quad \text{para } a \leq x \leq m$$



$$f(x) = \frac{b - x}{(b - m)^2} \quad \text{para } a < x \leq m$$

y la distribución acumulada:

$$F(x) = \frac{(x - a)^2}{2 \cdot (m - a)^2} \quad \text{para } 0 \leq x \leq m$$

$$F(x) = 1 - \frac{(b - x)^2}{2 \cdot (b - m)^2} \quad \text{para } m < x \leq b$$

El tiempo esperado para una variable con distribución doble triangular está dado por la siguiente expresión:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6} \quad (1)$$

en donde "a" es el tiempo optimista, "b" el tiempo pesimista y "m" el tiempo más probable. Por su parte, el desvío estándar es:

$$\sigma = \frac{b - a}{6} \quad (2)$$

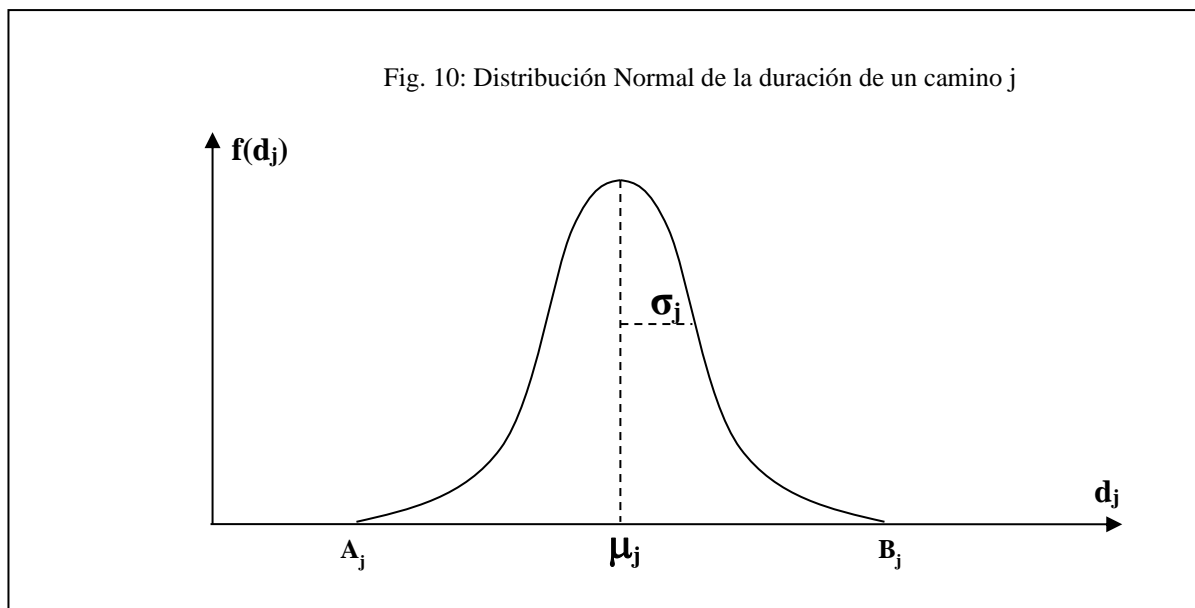
La duración de un camino 'j' del proyecto será también una variable aleatoria. Si la secuencia de actividades de ese camino está compuesto por un número de actividades 'i' relativamente grande, podemos hacer uso del teorema del límite central que establece que la variable suma de 'n' variables aleatorias (cualquiera sea su distribución) tiene una distribución normal cuya media es la suma de las medias de dichas variables aleatorias y cuya variancia es la suma de las variancias de dichas variables aleatorias (Fig. 10). La duración total ( $d_j$ ) tendrá, entonces, una distribución normal de media

$$\mu_j = \sum te_{ij} \quad (3)$$

y desvío estándar

$$\sigma_j = \sqrt{\sum \sigma_{ij}^2} \quad (4)$$

en donde los  $te_{ij}$  son los tiempos de ejecución esperados de las actividades 'i' que componen el camino 'j' y las  $\sigma_{ij}^2$  son las variancias de los tiempos de dichas actividades. Lógicamente la duración del camino tendrá una duración mínima (u optimista)  $A_j$  (si todas las actividades que lo componen se verificaran en sus tiempos optimistas) y una duración máxima (o pesimista)  $B_j$  (si todas las tareas se cumplieran en sus tiempos pesimistas).



Luego, para calcular la probabilidad de que ese camino termine antes de una fecha ‘t’ dada se puede utilizar la tabla de la función acumulada de la distribución normal estandarizada considerando la siguiente expresión:

$$p(d_j \leq t) = F_{N^*} \left( \frac{t - \mu_j}{\sigma_j} \right) = F_{N^*}(z)$$

Asimismo, es posible determinar la fecha ‘t’ que asegure, con una probabilidad ‘p’ determinada que el camino ‘j’ podrá terminar antes de esa fecha. Para ello, se despeja el valor de ‘t’ de la fórmula:

$$\frac{t - \mu_j}{\sigma_j} = z$$

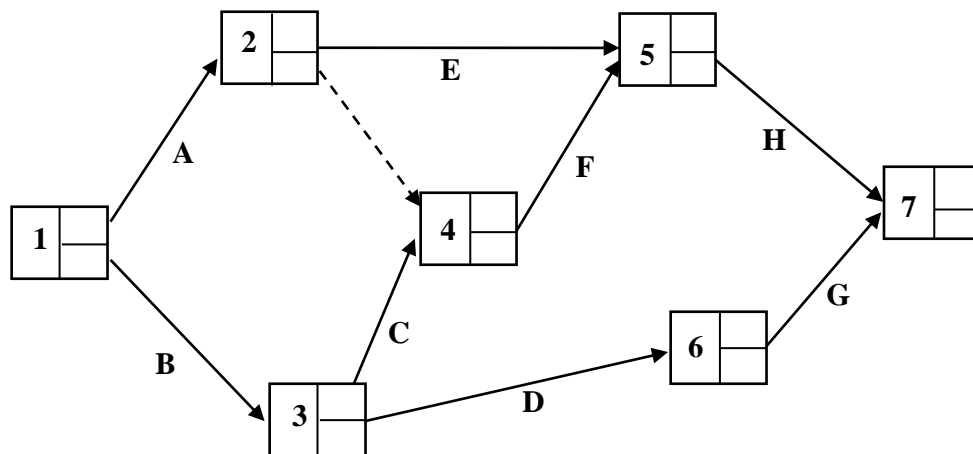
en donde ‘z’ se obtiene entrando en la tabla normal estandarizada con el valor ‘p’.

El camino crítico es el que tiene mayor duración promedio  $\mu_j$ . En caso de que se presentara más de una secuencia con igual duración, habría que considerar como más crítico a aquel que tenga el mayor desvío estándar, ya que contempla la situación más desfavorable.

Para describir el método de cálculo del camino crítico en el sistema PERT, se formula el siguiente ejemplo en el que se ha determinado la prelación entre las actividades y las duraciones (expresadas en semanas) optimistas, pesimistas y más probables de cada una de ellas, como se indica en la siguiente tabla de precedencias inmediatas. El objetivo es determinar el camino crítico, la duración del proyecto, la probabilidad de que el mismo finalice antes de 30 y de 35 semanas, y la duración que asegure, con un 90% de confianza, que el proyecto se habrá terminado.

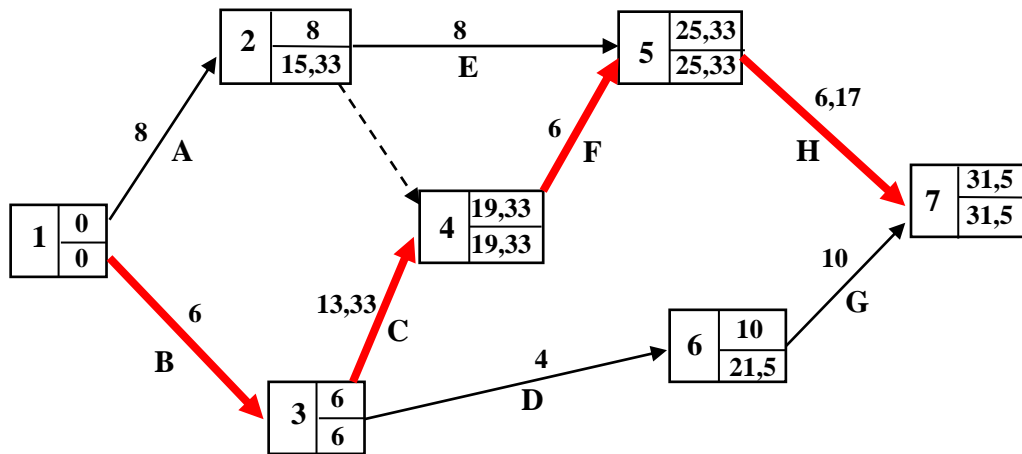
									Estimación (sem.)		
	A	B	C	D	E	F	G	H	a	m	b
A					✓	✓			4	8	12
B			✓	✓					2	6	10
C						✓			8	12	24
D							✓		2	4	6
E								✓	10	10	10
F								✓	2	6	10
G									4	10	10
H									5	6	7

En primer lugar se grafica la red:



Luego, se procede a determinar las duraciones estimadas de las actividades y se procede a calcular el camino crítico.

TAREA					
	a	m	b	$\mu$	$\sigma$
A	4	8	12	8	1,33
B	2	6	10	6	1,33
C	8	12	24	13,33	2,67
D	2	4	6	4	0,67
E	8	8	8	0	0
F	2	6	10	6	1,33
G	9	10	11	10	0,33
H	6	6	7	6.17	0,17

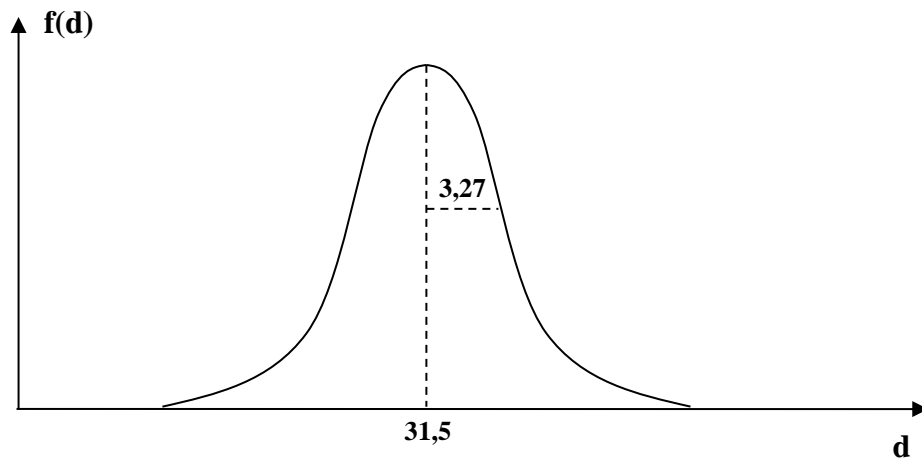


Asumiendo que se cumple el teorema del límite central, la duración del camino crítico tiene una distribución normal de media:

$$\mu = 6 + 13,33 + 6 + 6,17 = 31,5$$

y desvío estándar:

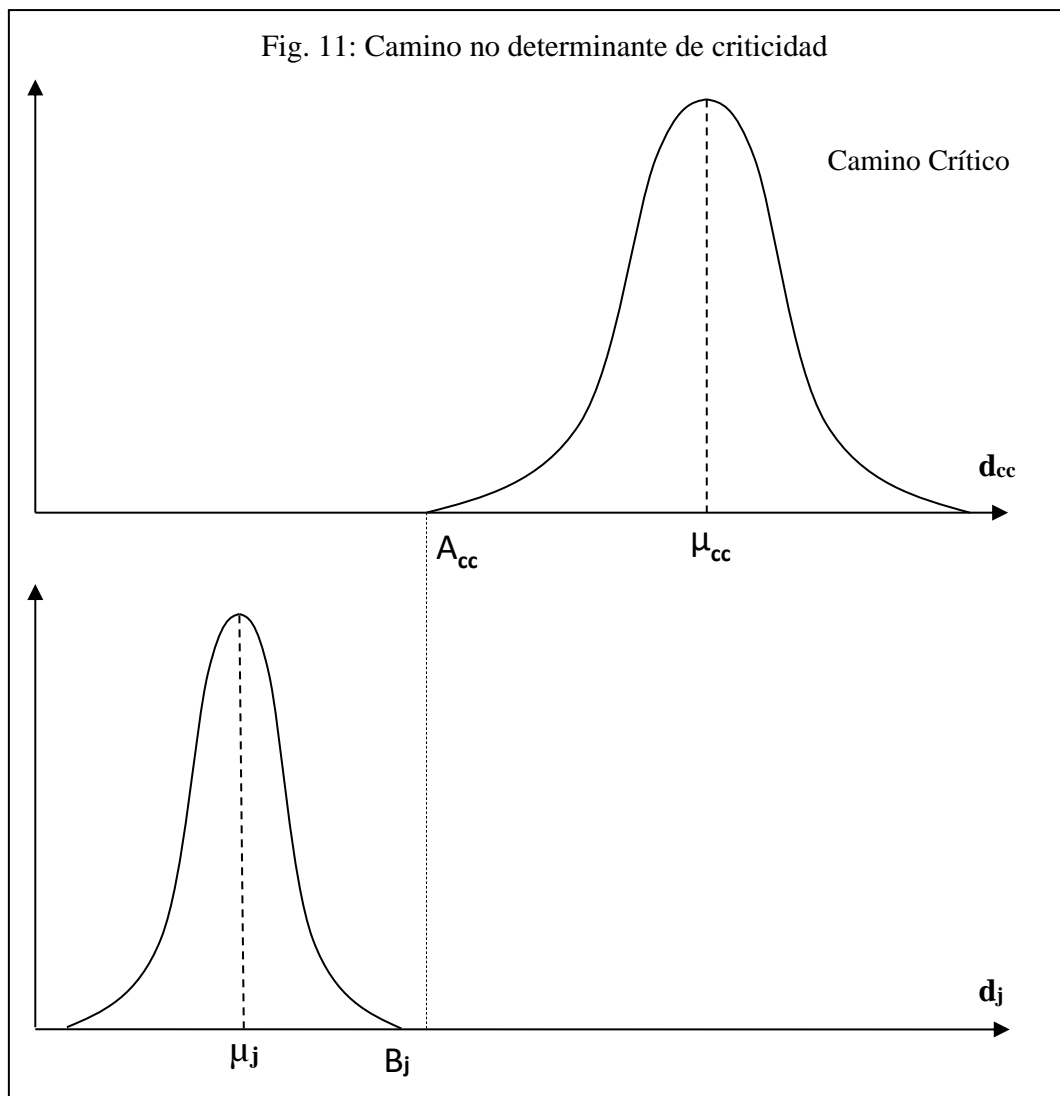
$$\sigma = \sqrt{1,33^2 + 2,67^2 + 1,33^2 + 0,17^2} = 3,27$$



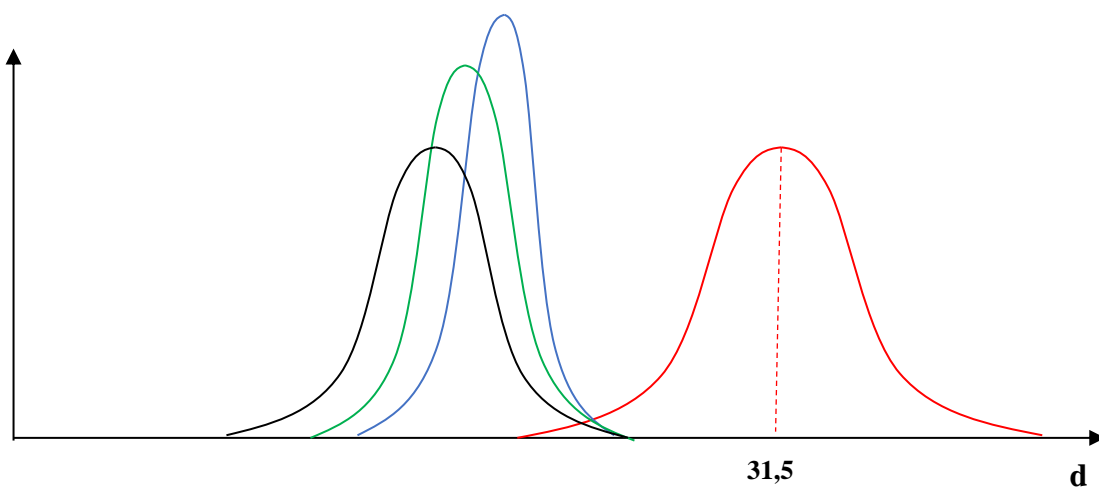
Con respecto a la duración del proyecto, el sistema supone que es la del camino crítico. Sin embargo, esto es cierto si el camino crítico es único y si el resto de las secuencias no son determinantes de criticidad, tal como se muestra en la Figura 11. Que un camino “j” no sea determinante de criticidad significa que su duración pesimista es menor a la duración optimista del CC, o por lo menos que la probabilidad de superarla sea muy pequeña.

Analizando la criticidad de cada una del resto de las ramas:

AEH:	$\mu = 22,16$	$\sigma = 1,34$	$\mu + 3\sigma \cong 26$
AFH:	$\mu = 20,17$	$\sigma = 1,89$	$\mu + 3\sigma \cong 26$
BDG:	$\mu = 20,00$	$\sigma = 1,57$	$\mu + 3\sigma \cong 25$



puede observarse que estas ramas no terminan más allá de 25 semanas, y prácticamente no determinan criticidad, como puede observarse en el siguiente gráfico.



Por ejemplo, la probabilidad de terminar el camino crítico antes de 25 semanas se puede determinar con la tabla de la función acumulada de la distribución normal estandarizada:

$$F_{N^*} \left( \frac{t - \mu}{\sigma} \right) = F_{N^*} \left( \frac{25 - 31,5}{3,27} \right) \cong F_{N^*}(-1,99) = 1 - F_{N^*}(1,99) = 2,33\%$$

Aún así, todavía podría ser mayor la probabilidad de que el camino crítico sea la secuencia de mayor duración, de modo que la probabilidad de que el camino crítico no sea el de mayor criticidad es muy baja. En consecuencia, la duración del proyecto para este ejemplo es la del camino crítico.

Luego, para calcular la probabilidad de terminar el proyecto antes de 30 semanas:

$$F_{N^*} \left( \frac{t - \mu}{\sigma} \right) = F_{N^*} \left( \frac{30 - 31,5}{3,27} \right) \cong F_{N^*}(-0,46) = 1 - F_{N^*}(0,46) = 32,28\%$$

y la probabilidad de finalizarlo antes de 35 semanas:

$$F_{N^*} \left( \frac{35 - 31,5}{3,27} \right) \cong F_{N^*}(1,07) = 85,77\%$$

Finalmente, la fecha en la que, con una confianza determinada (por ejemplo 90%), el proyecto esté cumplido:

$$F_{N^*} \left( \frac{t - 31,5}{3,27} \right) = F_{N^*}(z) = 0,90$$

Entrando en las tablas

$$z \cong 1,285$$

Luego:

$$\frac{t - 31,5}{3,27} = 1,285$$

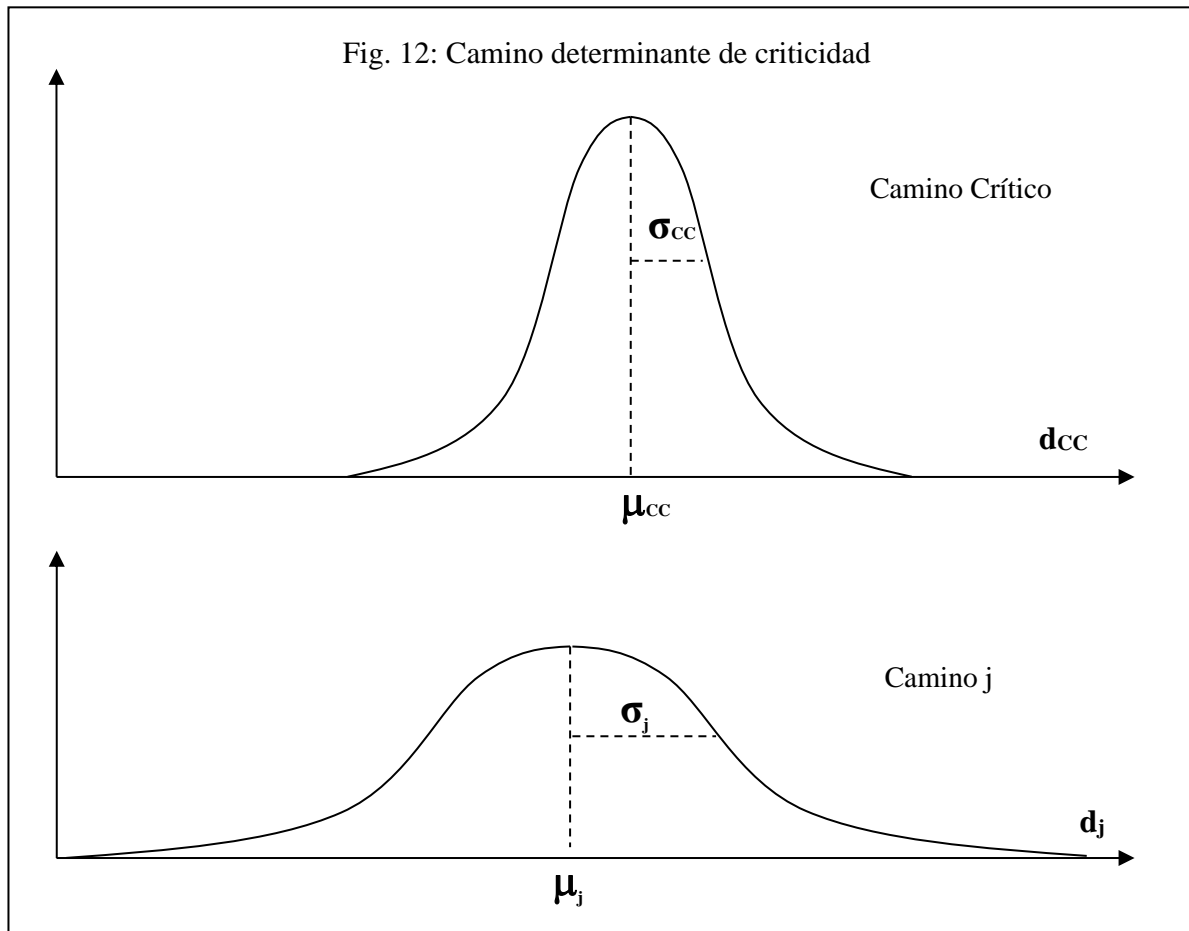
Despejando,  $t = 35,70$

Cuando existan ramas con posibilidad de ser determinantes de criticidad, la duración del proyecto es mayor que la del camino crítico.

En la Figura 12 se muestra un claro ejemplo de una situación en donde hay un camino 'j' que es determinante de criticidad, ya que si bien su duración promedio es menor a la del crítico tiene una considerable dispersión. En tal situación, si se repitiera el proyecto una cantidad considerable de veces, en algunas ocasiones el camino de mayor duración será el de la secuencia crítica, pero otra vez será la del camino 'j'. Entonces, cuando existen situaciones de más de un camino determinante de criticidad, la variable aleatoria que describe la duración del proyecto (d) es la que resulta de calcular la máxima duración de dichos caminos (incluido, por supuesto el crítico):

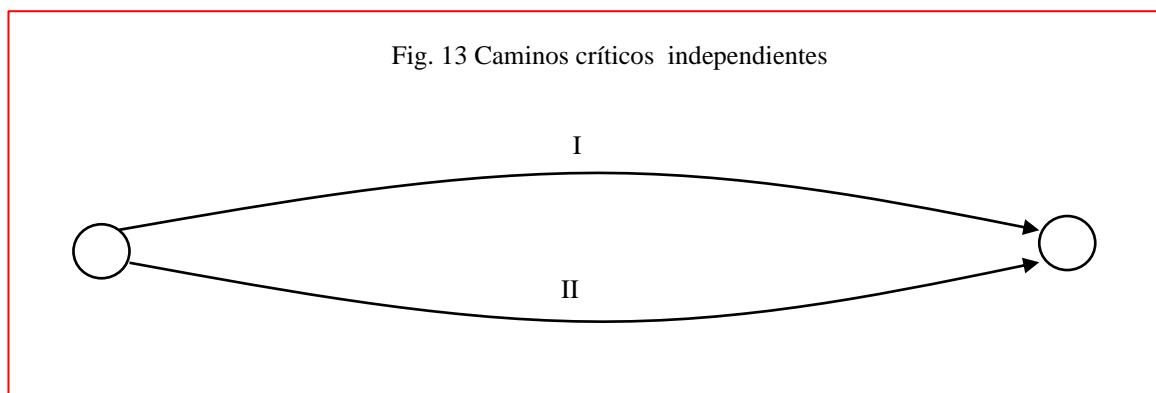
$$d = \text{MAX} [d_j]$$

y el efecto es que la duración esperada del proyecto es mayor a la del crítico, el desvío estándar es diferente y la distribución no es normal.



Supongamos un proyecto con dos caminos críticos I y II totalmente independientes (es decir constituídos por tareas no comunes), tal como se muestra en la Figura 13, con los siguientes parámetros (expresados en días):

$$\mu_I = 100, \sigma_I = 20, \text{ y } \mu_{II} = 100, \sigma_{II} = 10$$



Consideraremos también que no hay otros caminos o que, si los hay, no son determinantes de criticidad.

Si bien ambos caminos son críticos, conforme a la definición que se dio más arriba, la secuencia I es de mayor criticidad debido a su mayor desvío estándar.

Las probabilidades de finalizar los caminos I y II antes de la media de ellos son:

$$p(d_I \leq 100) = F_{N^*} \left( \frac{100 - 100}{20} \right) = 0,5$$

$$p(d_{II} \leq 100) = F_{N^*} \left( \frac{100 - 100}{10} \right) = 0,5$$

Luego, la probabilidad de terminar el proyecto antes de  $t = 100$  días será igual a la probabilidad de que antes de esa fecha finalicen todas las actividades del camino I y que también lo hagan las del camino II:

$$p(d \leq 100) = p(d_I \leq 100) \cdot p(d_{II} \leq 100) = 0,25$$

Es decir la distribución resultante queda sesgada a la derecha.

Del mismo modo, la probabilidad de terminar cada camino antes de 80 días será:

$$p(d_I \leq 80) = F_{N^*} \left( \frac{80 - 100}{20} \right) = F_{N^*}(-1.0) = 1 - F_{N^*}(1.0) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

$$p(d_{II} \leq 80) = F_{N^*} \left( \frac{80 - 100}{10} \right) = F_{N^*}(-2.0) = 1 - F_{N^*}(2.0) = 1 - 0,9773 = 0,0228$$

Entonces, la probabilidad de que el proyecto finalice antes de los 80 días es:

$$p(d \leq 80) = p(d_I \leq 80) \cdot p(d_{II} \leq 80) = 0,004$$

Si se repitiera este procedimiento para todos los posibles tiempos 't' comprendidos entre la duración optimista y la pesimista, estaríamos calculando la variable que resulta de establecer el máximo valor de los dos caminos:

$$d = \text{MAX} [d_I(\mu_I, \sigma_I), d_{II}(\mu_{II}, \sigma_{II})]$$

En la Fig. 14 se muestran esquemáticamente las distribuciones de ambos caminos y de la duración del proyecto, pudiéndose observar que la mediana y el valor promedio de ésta resulta mayor a la del camino crítico.

Para establecer el tiempo 't' del camino I que asegura con una confianza de 80% que el proyecto estará terminado, tal como se muestra resaltado en la Figura 14, se determina en tablas el valor de z para 0,8:

$$F_{N^*} \left( \frac{t - 100}{20} \right) = 0,8 \quad \rightarrow \quad z = \frac{t - 100}{20} = 0,7881 \quad \therefore \quad t = 115,8$$

Del mismo modo, para el camino II sería:

$$F_{N^*} \left( \frac{t - 100}{10} \right) = 0,8 \quad \rightarrow \quad z = \frac{t - 100}{10} = 0,7881 \quad \therefore \quad t = 107,9$$

Finalmente, el tiempo 't' que asegure que el proyecto se termina, con una confianza del 80%, es un tiempo tal que la probabilidad de terminarlo tanto por el camino I como por el camino II sea igual a 0,8, es decir:

$$F_{N^*}\left(\frac{t-100}{20}\right) \cdot F_{N^*}\left(\frac{t-100}{10}\right) = F_{N^*}(z_I) \cdot F_{N^*}(z_{II}) = 0,8$$

Para resolver este tipo de ecuación se sugiere utilizar un sistema de programación matemática, tal como el sistema LINGO. A continuación se muestra un pequeño programa de cálculo de las funciones acumuladas y de las z de la función normal estandarizada:

! DATOS ;

mu1 = 100;

mu2= 100;

sigma1 = 20;

sigma2 = 10;

p = 0.80;

! ECUACIONES ;

z1 = (t - mu1)/sigma1;

z2 = (t - mu2)/sigma2;

p1 = @PNORMCDF( mu1, sigma1, t);

p2 = @PNORMCDF( mu2, sigma2, t);

p = p1 \* p2;

cuya solución es:

t = 118,7142

z<sub>I</sub> = 0,9357

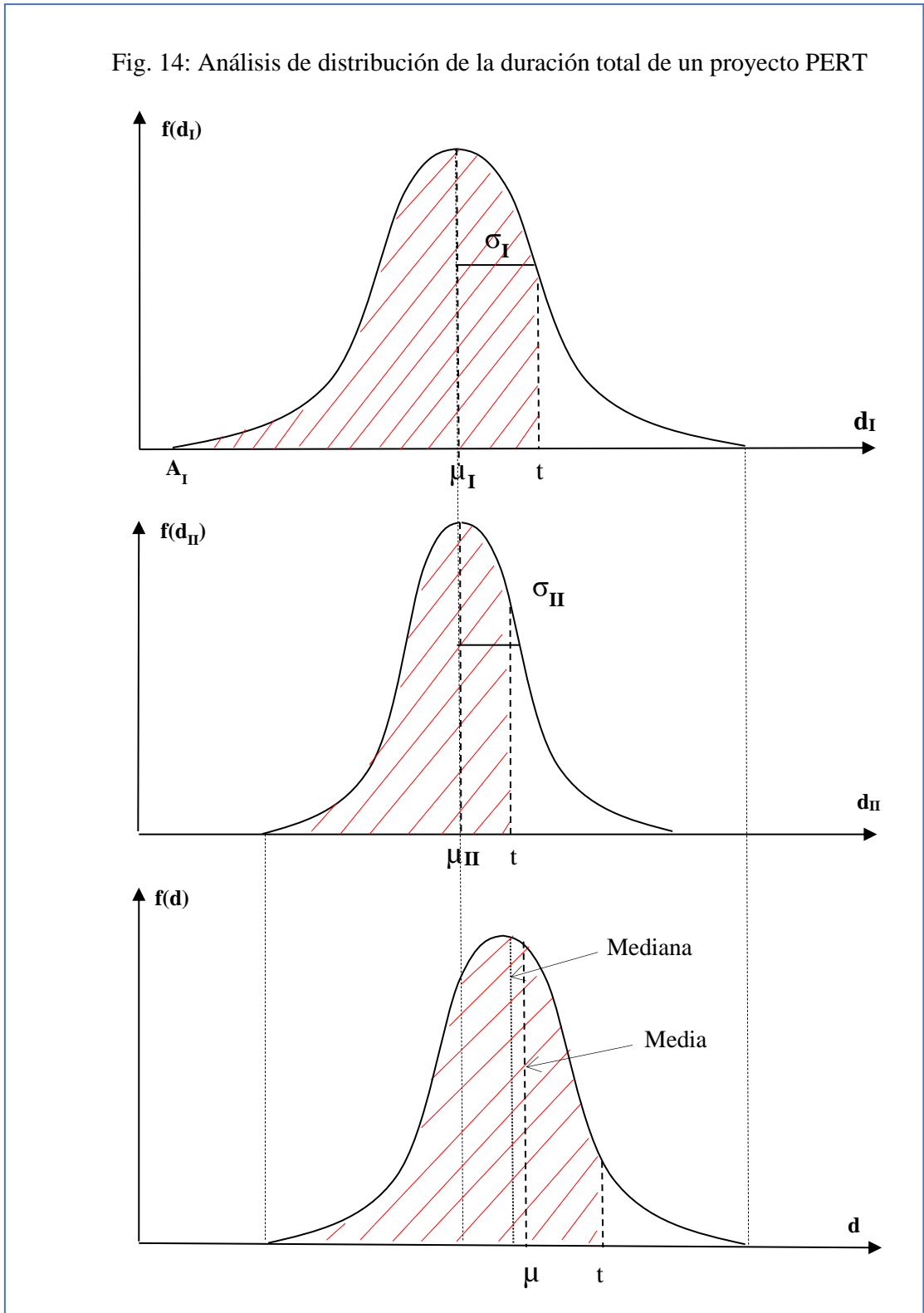
z<sub>II</sub> = 1,8714

Nótese que la función @PNORMCDF( $\mu$ ,  $\sigma$ , t) del LINGO, arriba utilizada, devuelve la función de la distribución normal acumulada:

$$p(d \leq t) = F_{N^*}\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

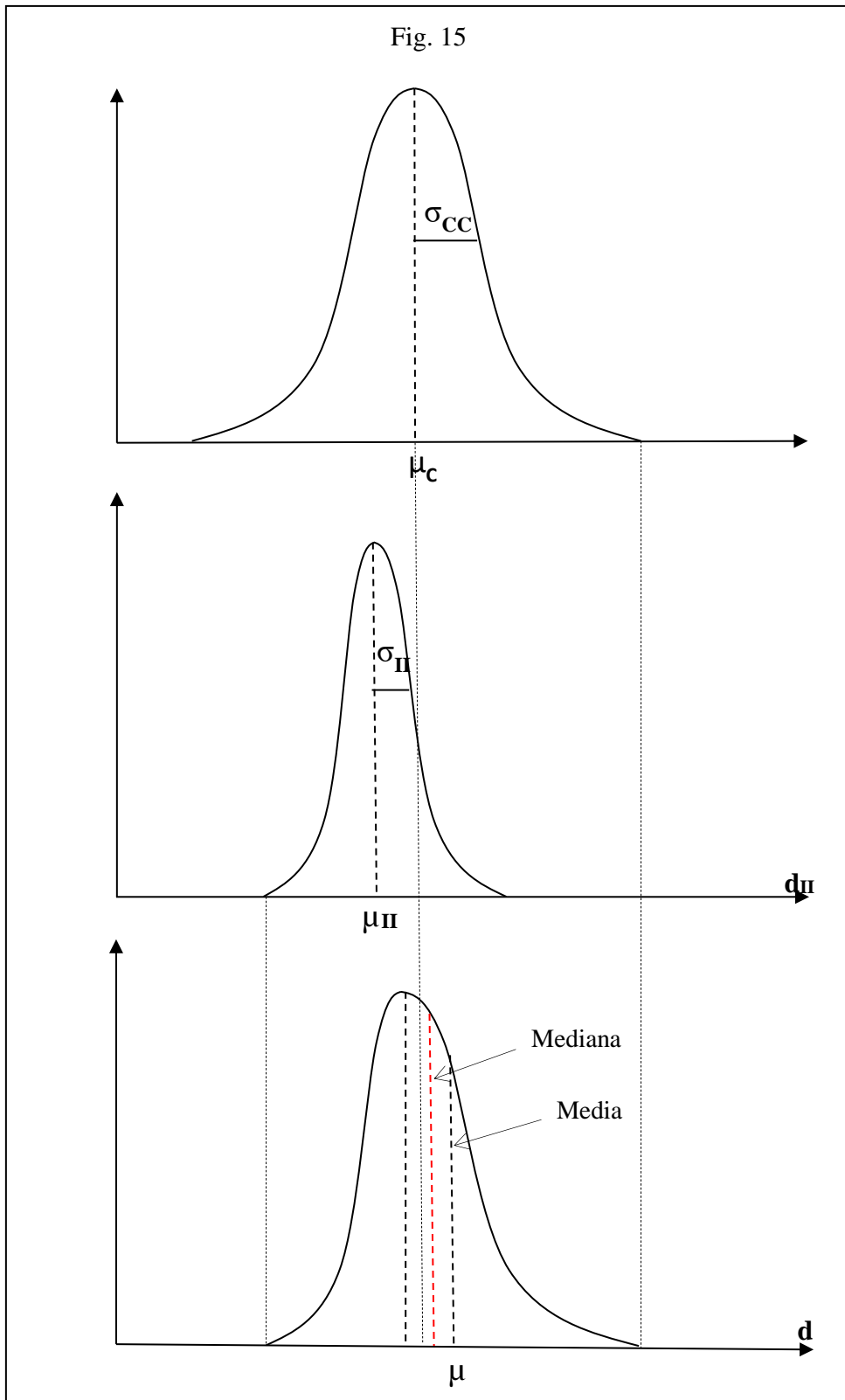
y que, en el programa LINGO, el signo de admiración luego de un punto y coma produce que la información siguiente sea simplemente una leyenda hasta el próximo punto y coma. Cuando se utilizan las funciones estadísticas del LINGO se recomienda utilizar el optimizador global. A tal fin, antes de seleccionar la opción SOLVE, se debe clicar la pestaña SOLVER, seleccionar la opción OPTIONS y clicar la pestaña GLOBAL SOLVER.

Fig. 14: Análisis de distribución de la duración total de un proyecto PERT



Para hallar la mediana ( $m$ ) de la distribución establecemos como parámetro  $p = 0.5$ , en el programa, lo que dá como resultado:  $t = 107,81$ . Los cálculos de la media y del desvío son complicados de hallar analíticamente, por lo que se sugiere resolverlos por simulación. Para este ejemplo son:  $\mu \cong 109$  días, y  $\sigma \cong 15,2$ .

Se analiza a continuación otro ejemplo, mostrado esquemáticamente en la Figura 15, en donde el camino I es crítico y el camino II es no crítico, para los siguientes datos:



$$\mu_I = 100, \sigma_I = 20, \text{ y } \mu_{II} = 90, \sigma_{II} = 10$$

Los parámetros de la distribución resultante 'd' son:

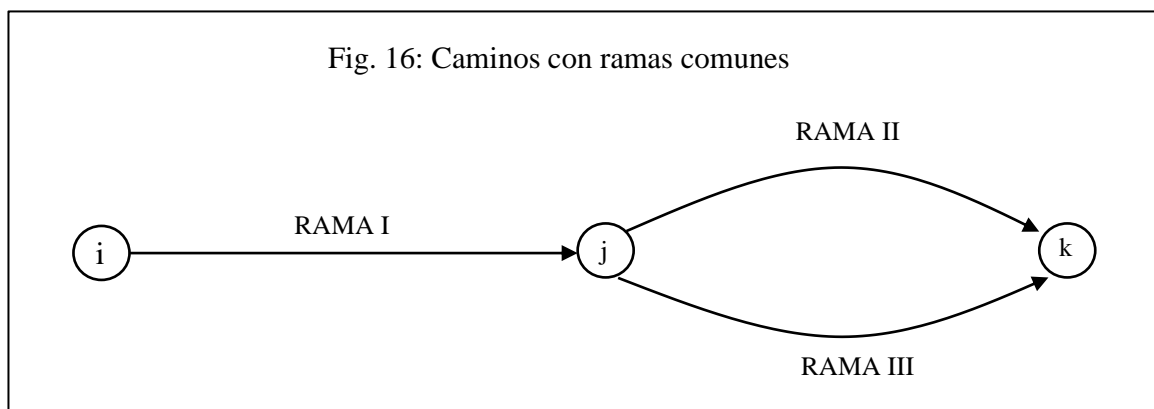
$$\mu = 104,80$$

$$m = 102,81$$

$$\sigma = 15,56$$

en donde 'm' indica el valor de la mediana.

Cuando los caminos determinantes de criticidad no son independientes, sino que tienen ramas en común, la discrepancia de media, mediana y desvío estándar con respecto al camino crítico es menor. En la Figura 16 se muestra un ejemplo de dos caminos críticos, siendo la secuencia de actividades comunes a ambos caminos la indicada como Rama I, comprendida entre el nodo 'i' y el nodo 'j', y estando las ramas II y III (definidas entre los nodos 'j' y 'k') constituidas por actividades independientes. La duración  $d_{jk}$  es mayor a la duración de las rama II y III, y el tiempo promedio estimado que transcurre para que se ejecuten las actividades del proyecto, comprendidas entre los nodos 'i' y 'k', será la suma de las duraciones de la rama I (nodos i-j) y de  $d_{jk}$ . En estos casos en los que hay actividades comunes, la diferencia entre el tiempo de ejecución del proyecto y el del camino crítico, es pequeña, y por razones de simplificación podría considerarse que es igual a la del camino crítico más un pequeño incremento. La práctica muestra que la diferencia no es significativa y que en general está en el rango que va de 0,01% a 3 %.



#### Cálculo de duración del proyecto mediante simulación:

Para simular la duración de una variable aleatoria 'x' con distribución doble-triangular, se debe generar en primer lugar un número aleatorio  $r_1$  definido en el dominio 0-1. Si el valor de  $r_1$  es igual o menor a 0,50 se debe generar un segundo número aleatorio  $r_2$ , definido en el mismo dominio, se toma la distribución triangular sesgada a derecha, y se utiliza la expresión:

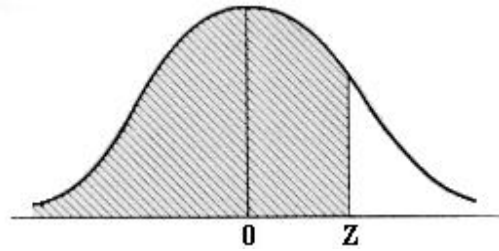
$$x = a + \sqrt{r_2} \cdot (m - a)$$

Si, en cambio  $r_1 > 0,50$  se toma la distribución triangular sesgada a izquierda, siendo el valor simulado de  $x$ :

$$x = b - \sqrt{(1 - r_2)} \cdot (b - m)$$

Con los valores simulados de las duraciones de cada una de las variables se calcula el camino crítico en cada corrida. La operación se repite hasta que la cantidad de corridas haya sido suficientemente grande, y se puede así determinar la probabilidad de que cada camino sea crítico, y sus valores promedios, medianas y desvíos estándar.

**DISTRIBUCIÓN NORMAL ACUMULADA ESTANDARIZADA  $F_{N^*}(Z)$**



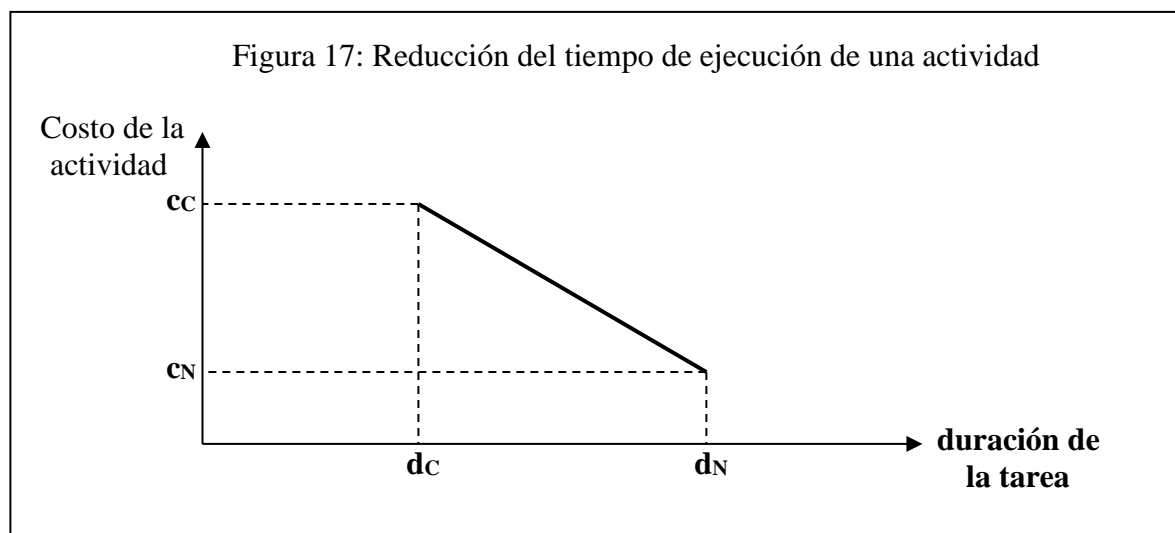
Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

#### IV. ACELERACIÓN DE PROYECTOS

La metodología que se verá a continuación fue desarrollada por el sistema CPM. La estimación única utilizada por el CPM y la estimación estimada del PERT, que se denominan "duración normal", se hacen bajo el supuesto de que las actividades se desarrollan en condiciones estándar y con la disponibilidad normal de recursos para llevarla a cabo.

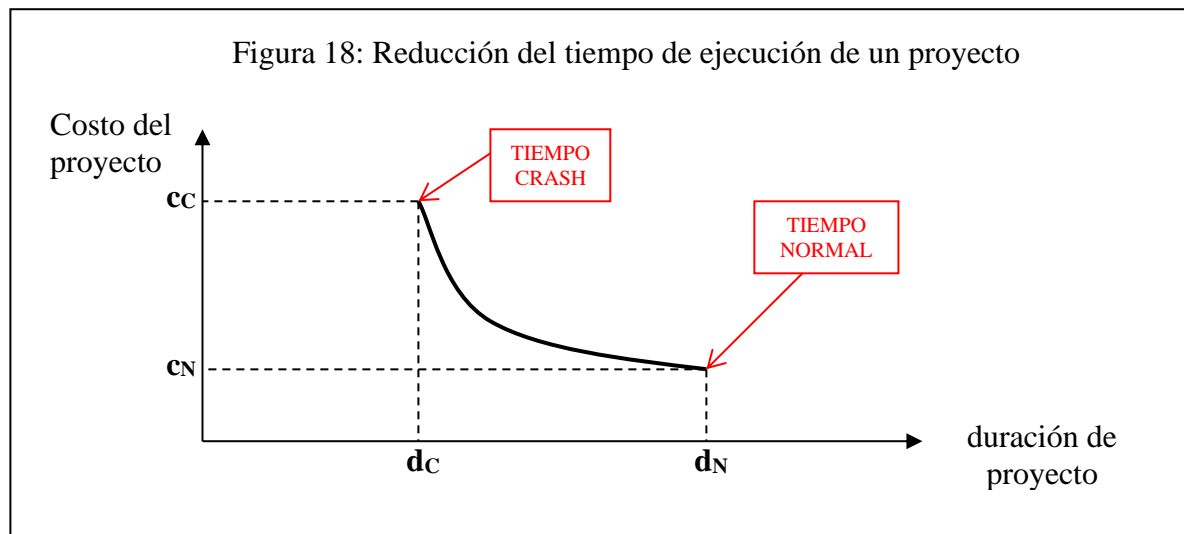
En la mayoría de las ocasiones es posible reducir el tiempo de realización de una actividad aumentando la cantidad y/o calidad de recursos asignados para su ejecución, y en consecuencia incrementando el costo de realización. Esta reducción tiene un límite tecnológico, por debajo del cual sería imposible llevar a cabo la tarea, por más recursos que se le asignen y esfuerzo que se realice. Este límite se denomina "tiempo crash" o "tiempo mínimo tecnológico".

El CPM propuso, entonces, dos estimaciones para cada actividad: la duración normal y la duración "crash". El costo directo asociado a la realización de una tarea en su duración normal se llama costo normal, mientras que el costo directo asociado a la realización de la tarea en su tiempo mínimo tecnológico se denomina costo "crash". En la figura 17 se puede ver un ejemplo gráfico del incremento de costo de una actividad al reducirla desde su tiempo normal hasta su tiempo "crash". El método CPM supone que la relación en el incremento de costo es lineal, aunque esto puede resultar una hipótesis muy simplificativa en algunos casos.



En resumen, las actividades son susceptibles de ser reducidas, incrementando su costo.

Con relación al proyecto, su duración también puede reducirse desde su tiempo de ejecución normal hasta su tiempo mínimo tecnológico (o "crash"), por debajo del cual no podría realizarse, mediante la reducción de las duraciones de tareas que lo componen. Un ejemplo gráfico del incremento de costo por reducción de tiempo de un proyecto se puede ver en la Figura 18.



El incremento de costo que se observa en la Figura 18 es el costo directo, es decir el asociado a los recursos (mano de obra, materiales, equipos, capital, etc.) que se asignan para las actividades del proyecto.

Sin embargo, en los proyectos existe típicamente también un costo indirecto, que se incrementa en la medida que se demora su ejecución.

Supongamos un proyecto de mantenimiento de una planta. Mientras se lleva a cabo el mantenimiento, la planta está parada, lo que implica un lucro cesante. En la medida que el proyecto se atrasa, el costo por lucro cesante se incrementa.

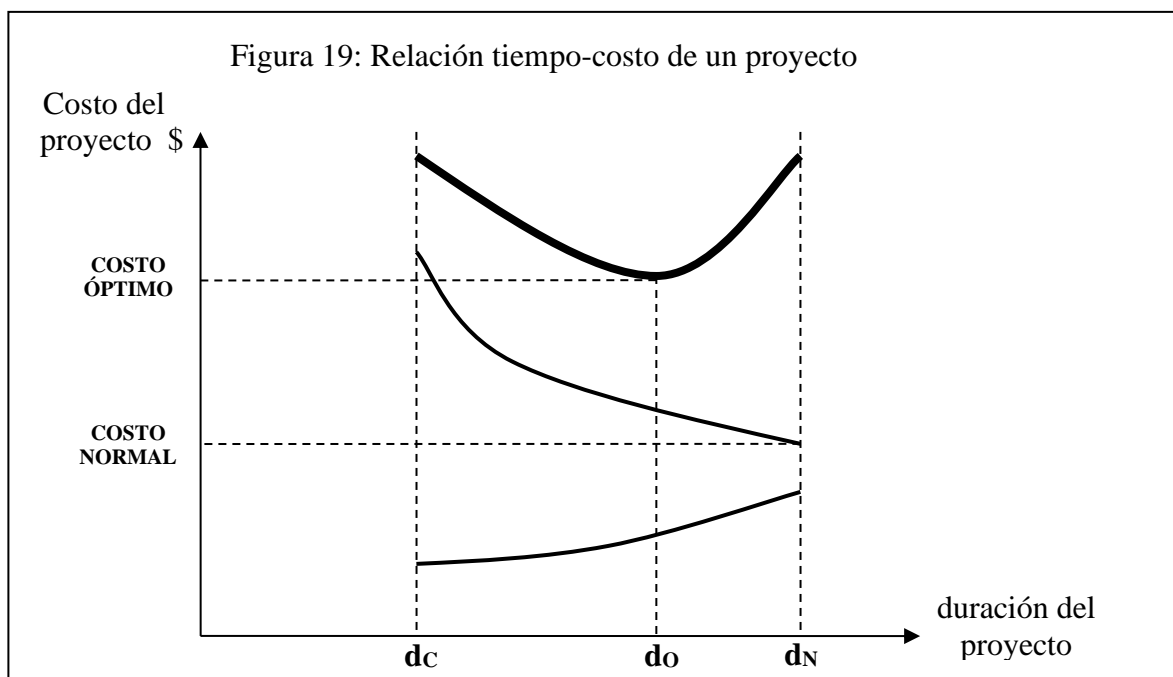
Otro ejemplo de costo indirecto es el de la ejecución de una obra en donde haya que pagar una multa por no finalizar el proyecto en término. Cuanto más se demore el proyecto tanto más aumentará la multa.

Es decir, al disminuir el tiempo de realización del proyecto aumenta el costo directo pero disminuye el costo indirecto, tal como se puede ver en la Figura 19. La composición de ambas componentes constituye el costo total del proyecto. El objetivo que se plantea a menudo consiste en reducir el tiempo de ejecución normal ( $t_N$ ) hasta el tiempo óptimo ( $t_o$ ), es decir aquel que minimiza el costo total.

La segunda razón por la cual se reducen los proyectos es simplemente por razones políticas. Puede ocurrir que, por algún motivo, el tiempo calculado de ejecución  $t_N$  sea inaceptable y que la gerencia requiera que se reduzca a un valor determinado.

En definitiva, es muy común que deba planearse la reducción del tiempo de ejecución de un proyecto. Para ello el procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Las actividades que se seleccionan para reducir deben ser las críticas, porque son aquellas que aseguran que su reducción puede significar efectivamente una reducción en la duración total del proyecto.
2. De las actividades críticas se elige aquella cuyo incremento de costo por unidad de tiempo reducido sea menor. Esto es obvio, por cuanto el objetivo consiste en reducir la duración del proyecto al menor costo posible.
3. Se reduce la actividad crítica seleccionada hasta llegar a su mínimo tecnológico o hasta que se modifica la criticidad del proyecto, lo que ocurra primero.
4. Si aún no se llegó a la duración óptima (o a la mínima exigida), se selecciona otra actividad crítica (o varias actividades críticas dispuestas en ramas paralelas) y se procede de la forma indicada hasta alcanzar dicha meta.



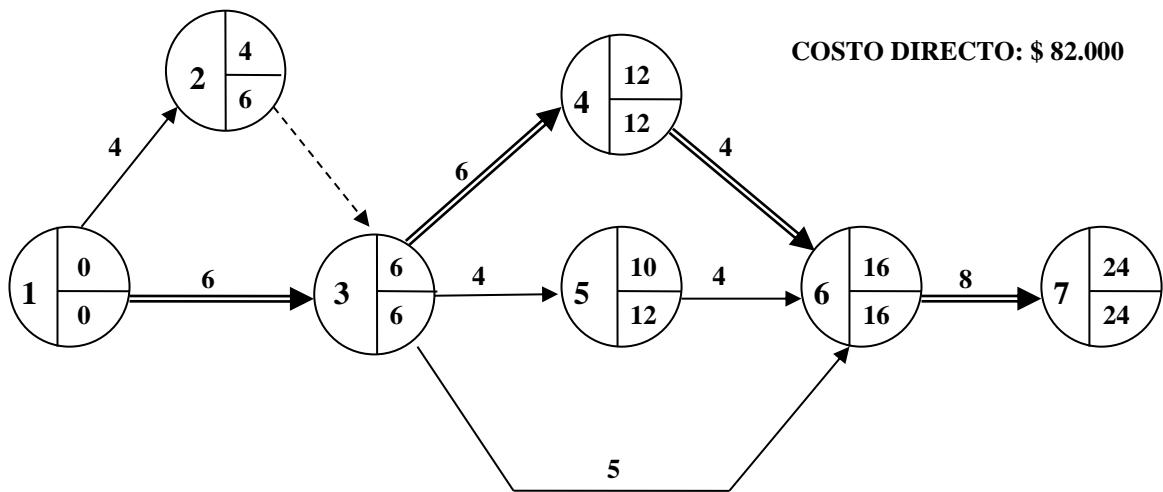
A fin de explicar el tema, se efectuará una reducción, sobre un ejemplo, desde el tiempo normal hasta el tiempo mínimo tecnológico. En la tabla siguiente se indican las actividades de un proyecto, sus prelacións (a través de sus nodos origen y fin), sus duraciones (en semanas) y costos normales y, finalmente, sus duraciones y costos "crash".

Actividad	Normal		Crash	
	d	\$	d	\$
1-2	4	14.000	2	20.000
1-3	6	15.000	3	20.000
2-3	0	0	0	0
3-4	6	15.000	5	19.000
3-5	4	7.000	1	10.000
3-6	5	12.000	4	14.300
4-6	4	4.000	4	4.000
5-6	4	8.000	3	9.500
6-7	8	7.000	6	13.000
<b>Costo Directo</b>		82.000		

En primer lugar se debe calcular el incremento de costo directo por unidad de tiempo reducida para todas las actividades del proyecto. Estos valores se pueden observar en la tabla siguiente:

Actividad	Normal		Crash		Crash		Costo de reducción
	d	\$	d	\$	$\Delta d$	$\Delta \$$	$\Delta \$/\text{sem}$
1-2	4	14.000	2	20.000	2	6.000	3.000
1-3	6	15.000	3	22.500	3	7.500	2.500
3-4	6	15.000	5	19.000	1	4.000	4.000
3-5	4	7.000	1	10.000	3	3.000	1.000
3-6	5	12.000	4	14.300	1	2.300	2.300
4-6	4	4.000	3	10.500	1	6.500	6.500
5-6	4	8.000	3	9.500	1	1.500	1.500
6-7	8	7.000	6	11.000	2	4.000	2.000
<b>Costo Directo</b>	<b>82.000</b>						

La red correspondiente a este proyecto en su tiempo normal se grafica a continuación:

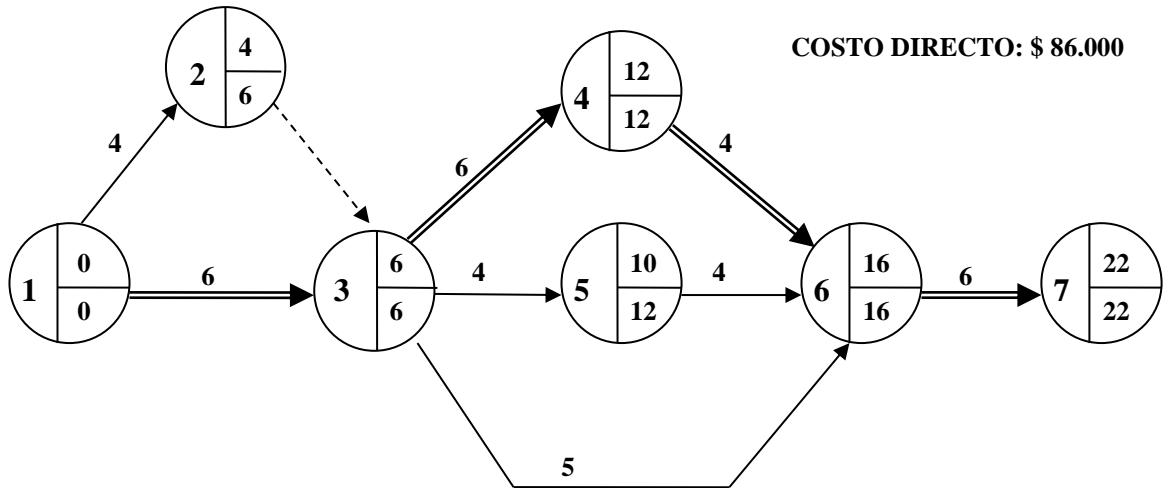


De las actividades críticas (1-3, 3-4, 4-6 y 6-7) se elige aquella que tiene menor incremento de costo por unidad de tiempo reducido.

Actividad	$\Delta C/\text{sem}$
1-3	2.500
3-4	4.000
4-6	6.500
6-7	2.000

←

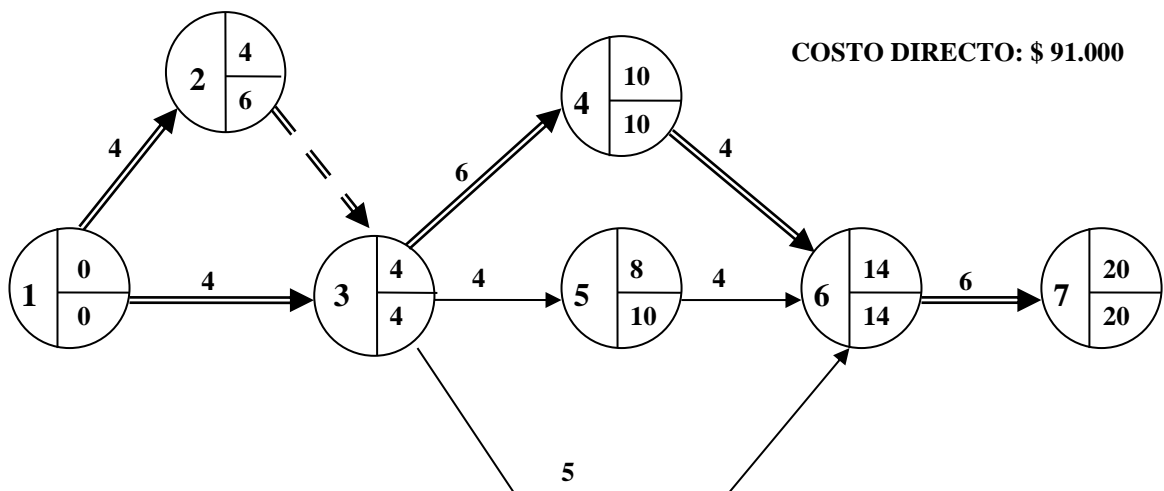
Se selecciona, entonces, la 6-7. Esta actividad se puede reducir hasta su mínimo tecnológico sin que cambie la criticidad del proyecto. En consecuencia se la reduce en 2 semanas, lográndose una reducción de igual magnitud en el proyecto, e incrementando el costo directo en \$ 4.000. La nueva red del proyecto es la siguiente:



Se procede ahora a seleccionar una nueva actividad para reducir. Ahora las opciones son:

Actividad	ΔC/sem
1-3	2.500
3-4	4.000
4-6	6.500

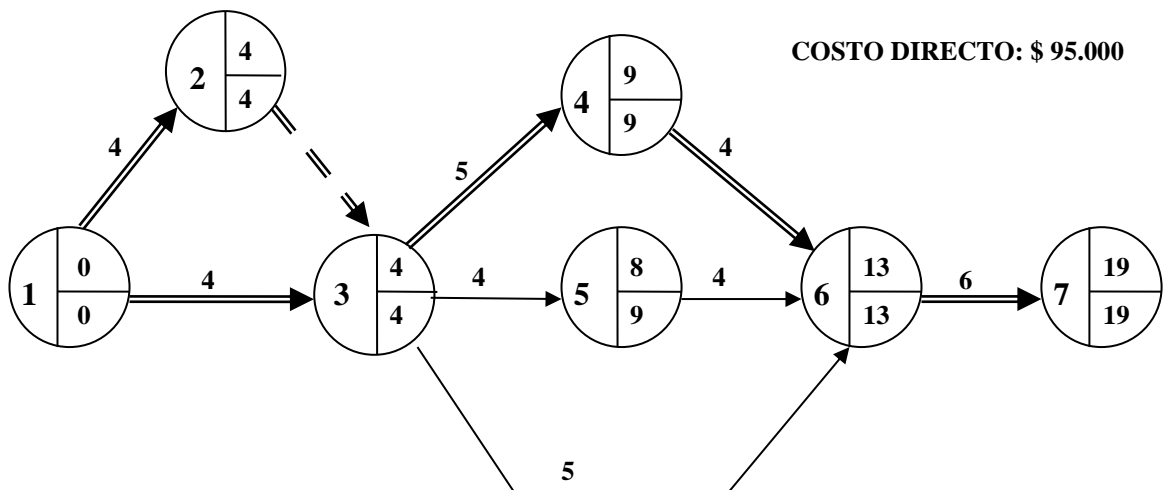
Se elige entonces la actividad 1-3. Considerando el mínimo tecnológico, esta tarea se podría reducir en tres semanas. Sin embargo, al reducir en dos semanas cambiaría la criticidad porque se formaría una nueva rama crítica 1-2-3. Esto quiere decir que si se redujeran las tres semanas en la actividad, la duración total del proyecto se reduciría sólo en dos semanas, incrementándose innecesariamente el costo. En consecuencia se reduce dos semanas, por lo que la nueva red y el costo directo aumentado en \$ 5.000 se indican a continuación:



Se sigue el procedimiento de elección de tareas a reducir. Al quedar dos caminos críticos se debe hacer el análisis con las ramas paralelas. Esto es, si se reduce la actividad 1-3, para lograr una reducción en el proyecto se debe reducir en igual magnitud la rama paralela (en este caso la actividad 1-2). En consecuencia, las nuevas alternativas son:

Actividades	$\Delta C/\text{sem}$
1-2 + 1-3	$3.000 + 2.500 = 5.500$
3-4	4.000
4-6	6.500

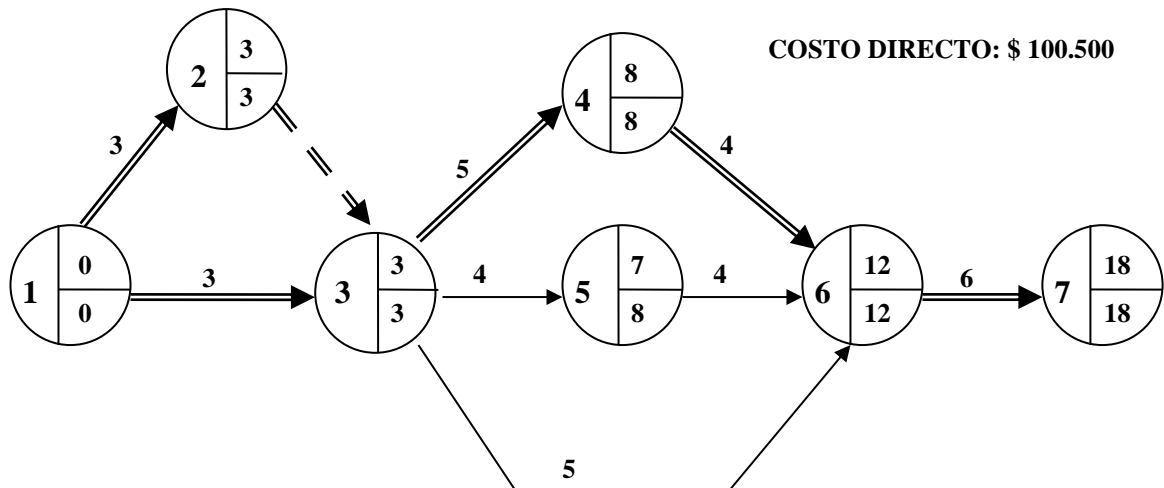
Se elige entonces la actividad 3-4. Esta tarea se puede reducir sólo una semana hasta su mínimo tecnológico. El proyecto quedará con una duración de 19 semanas a un costo total de \$ 95.000.



Siguiendo el proceso, las alternativas son:

Actividades	$\Delta C/\text{sem}$
1-2 + 1-3	$3.000 + 2.500 = 5.500$
4-6	6.500

Se elige entonces reducir conjuntamente las tareas 1-2 y 1-3. La 1-2 se puede reducir en dos semanas, pero la 1-3 sólo en 1 (ya que se había reducido anteriormente en dos semanas). Se reducen entonces ambas actividades una sola semana.



La única opción ahora es reducir la actividad 4-6. Esta se puede reducir en 1 semana, verificándose que se llega al mínimo tecnológico y que también cambia justo la criticidad del proyecto. El costo directo aumenta en \$ 6.500, quedando un costo total de \$ 107.000 en 17 semanas.

Ya no es posible seguir reduciendo más. En el siguiente gráfico se observa cómo se incrementa el costo directo en la medida que se reduce el proyecto desde las 24 semanas iniciales hasta las 17 finales.

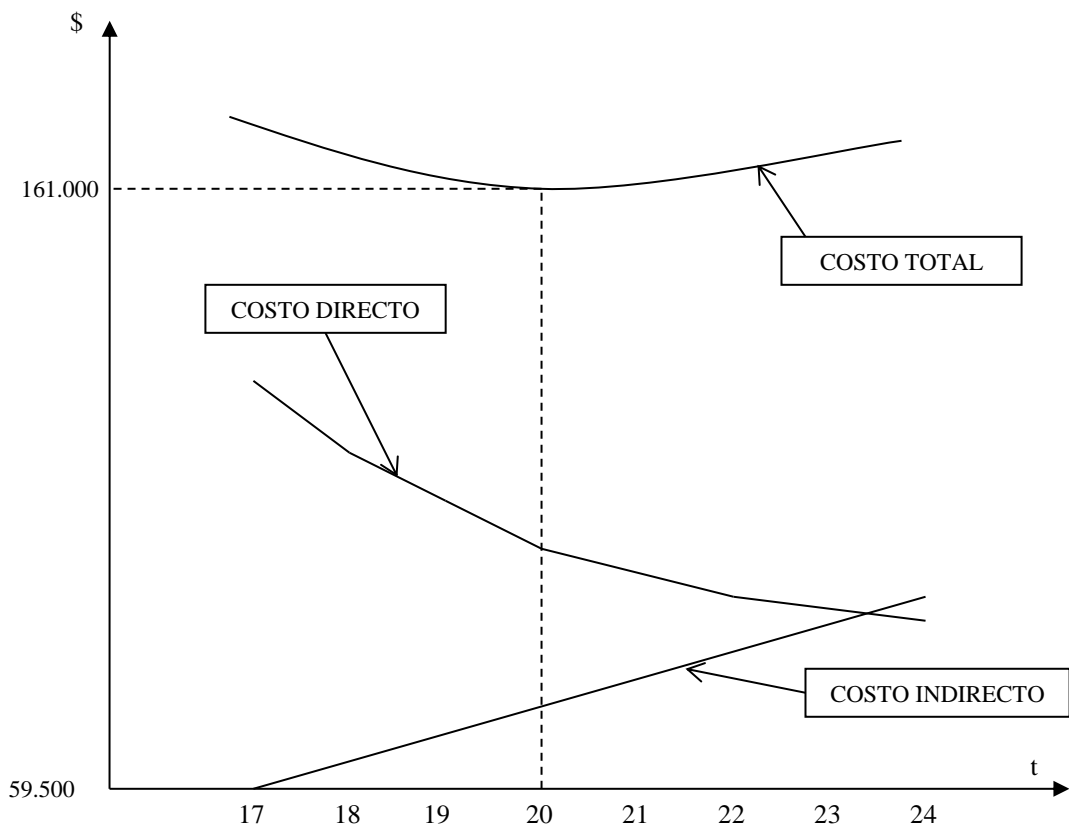
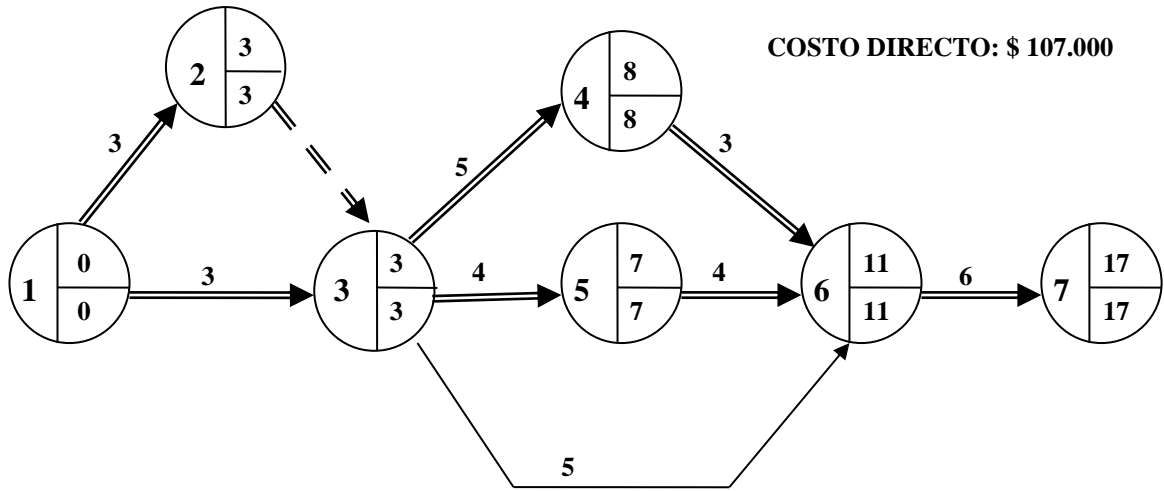
Duración	Costo Directo
24	82.000
22	86.000
20	91.000
19	95.000
18	100.500
17	107.000

En el gráfico se puede observar esta variación.

Supongamos ahora que el proyecto tiene un lucro cesante de \$ 3.500 por semana. El costo total será entonces:

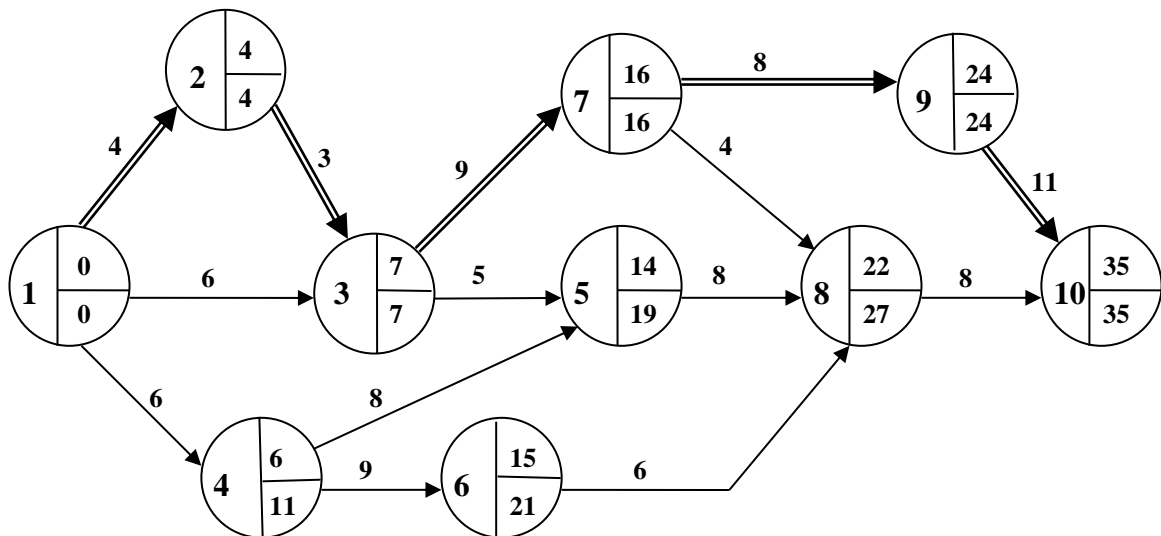
Duración	Costo Directo	Costo Indirecto	Costo Total
24	82.000	84.000	166.000
22	86.000	77.000	163.000
20	91.000	70.000	161.000
19	95.000	66.500	161.500
18	100.500	63.000	163.500
17	107.000	59.500	166.600

El tiempo óptimo de realización del proyecto será, entonces, de 20 semanas a un costo total de \$161.000.



## V. IMPOSICIÓN DE FECHAS

En un proyecto real es muy común que existan ciertas restricciones en lo que se refiere a las fechas. Puede ocurrir que se impongan fechas tempranas a los nodos (o Primeras Fechas de Comienzo a las actividades que sale de esos nodos), o fechas tardías (o Últimas Fechas de Finalización a las actividades que concurren a ellos). Tomaremos el siguiente ejemplo para explicar el concepto:



### Restricciones sobre Fecha Temprana (Ft)

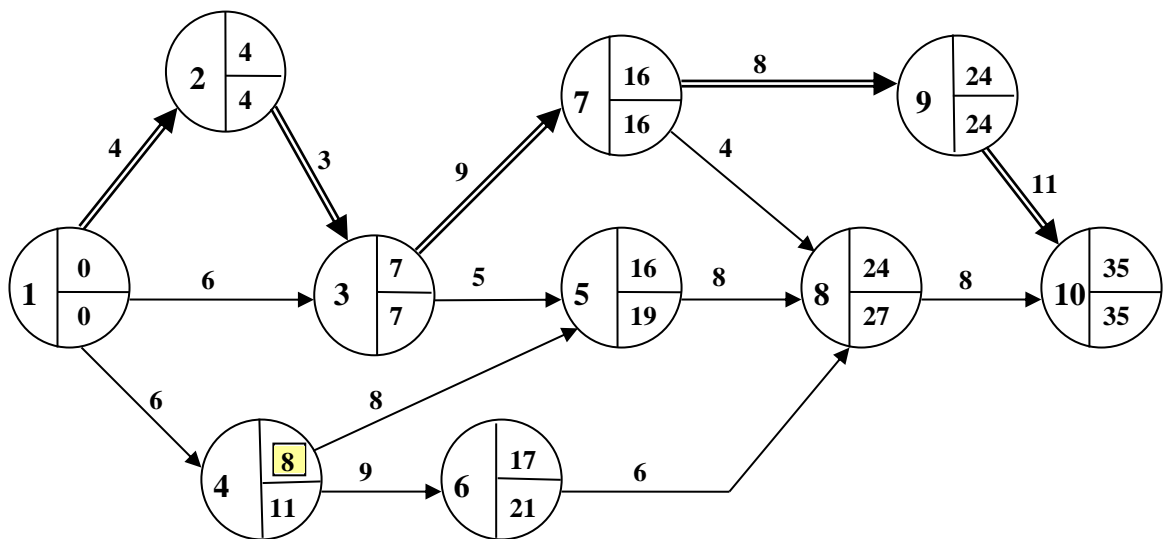
Supongamos que se impone una restricción sobre la Fecha Temprana del nodo 4. Esto podría ser, por ejemplo, debido a que la actividad 1-4 sea el proceso de contratación de dos nuevos gerentes a la empresa: el gerente de marketing y el gerente de planta. La verificación del nodo 4 significará que estas personas ingresarán y estarán disponibles para trabajar. Asumamos también que el gerente de marketing sea quien debe ejecutar la tarea 4-5 y el gerente de planta la tarea 4-6. Estas dos tareas no podrán comenzar a ejecutarse hasta tanto no se verifique el nodo.

En la imposición de una Fecha Temprana se pueden dar tres casos:

- que la Fecha Temprana impuesta sea menor que la fecha de cálculo. Si los gerentes ingresan, digamos, en la semana 5, no habría ningún problema, ya que estarán disponibles para realizar las tareas 4-5 y 4-6 a partir de la semana 6. Entonces, si  $Ft_{impuesta} < Ft_{cálculo}$  no se produce ninguna modificación al plan.

- b) que la Fecha Temprana impuesta sea mayor que la fecha de cálculo pero menor que la Fecha Tardía del nodo. En este caso se deben recalculan las fechas desde el nodo en donde se impone la restricción hacia el nodo fin del proyecto. El impacto será simplemente que se modifican las fechas tempranas de los nodos posteriores, pero no se modifica la fecha de finalización del proyecto ni se generan nuevas actividades críticas.

Supongamos que los gerentes ingresan recién en la semana 8. Es obvio que habrá que modificar la Fecha Temprana del nodo 4. Al hacer esta modificación, se recalculan las fechas de los nodos posteriores, observándose que, en este caso, sólo se modificarán las fechas tempranas de los nodos 6 y 8. Vemos que el proyecto sigue con igual fecha de finalización (semana 35) y que la criticidad no ha cambiado.



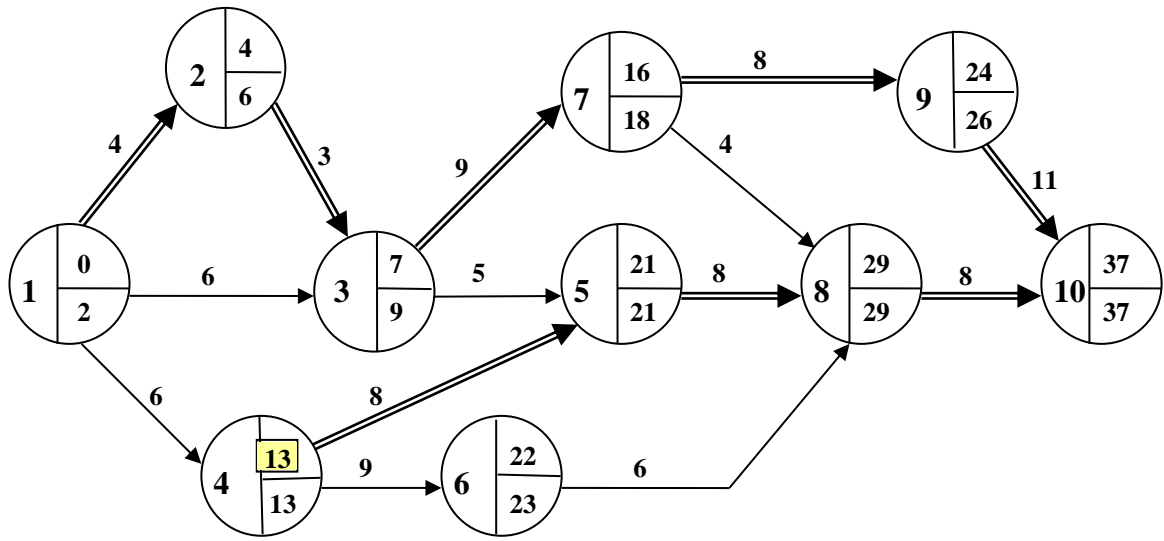
- c) que la Fecha Temprana impuesta sea mayor que la fecha de cálculo y también mayor que la Fecha Tardía del nodo. En este caso se deben recalculan las fechas tempranas de los nodos posteriores hasta el fin del proyecto (último nodo), y luego las fechas tardías desde el fin del proyecto hasta el comienzo del mismo (primer nodo). El impacto será que se atrasa la fecha de finalización del proyecto y que se genera una rama crítica adicional al camino crítico básico calculado que va desde el nodo en donde se hace la imposición hasta el fin del proyecto. Esta rama crítica adicional es simplemente consecuencia de la restricción mencionada.

El margen de los nodos del camino crítico básico es mayor a cero (con excepción del último que sigue siendo cero). La iniciación del proyecto se debería postergar en un tiempo igual al margen de dichos nodos. Por su parte, el margen de los nodos de la nueva rama crítica formada (incluyendo, como dijimos, el nodo fin) es igual a cero.

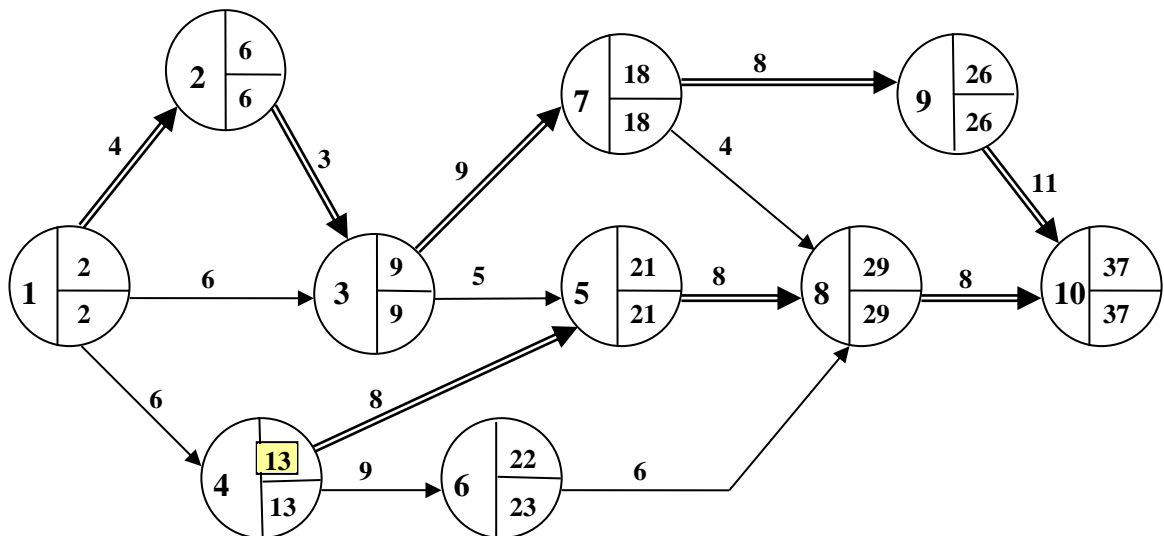
Supongamos, en el ejemplo, que los gerentes ingresarán a la empresa recién en la semana 13. Esto implica imponer como Fecha Temprana del nodo 4 el valor 13. Se recalculan entonces las fechas tempranas "aguas abajo" del nodo 4 hasta el último nodo y luego las fechas tardías de todos los nodos.

Observamos que el margen de dos semanas del nodo 1 (y del resto de los nodos del camino crítico original, excepto del nodo 10) significa que el proyecto debería comenzar dos semanas más tarde.

Vemos también que, a partir del nodo 4 y hasta el fin del proyecto, se genera una rama crítica adicional como consecuencia de la restricción impuesta. Esto significa que a partir de la semana 13 habrá dos caminos críticos hasta la finalización del proyecto en la semana 37. Cualquier atraso en alguna tarea, ya sea del camino crítico original como del camino crítico adicional, se traducirá en un atraso de igual magnitud en la duración del proyecto.



Recalculando, entonces el proyecto, comenzándolo en la semana 2, tendremos:



Las imposiciones se pueden hacer también sobre una Primera Fecha de Comienzo de una actividad (en lugar de hacerlo sobre la Fecha Temprana). Supongamos que en la red formulada

como ejemplo la actividad 1-4 sea el proceso de contratación solamente del gerente de marketing, que la actividad 4-5 sea una actividad a ser realizada por dicho gerente, y que la actividad 4-6 sea, por ejemplo, el proceso de contratación del gerente de planta. Como la actividad 4-5 requiere la incorporación previa del gerente de marketing, pero no la 4-6, la imposición se hace sobre la Primera Fecha de Comienzo de 4-5 y no sobre la Fecha Temprana de 4. En este caso, el proceso es similar al visto:

- a) Si  $PFC_{i-j \text{ impuesta}} < Ft_{i \text{ cálculo}}$ , el proyecto no se modifica en absoluto.
- b) Si  $Ft_{i \text{ cálculo}} < PFC_{i-j \text{ impuesta}} < FT_{i \text{ cálculo}}$  se recalculan las fechas tempranas de los nodos posteriores a i-j hasta que la modificación de margen quede absorbida por alguna otra rama.. La fecha de finalización del proyecto no se modifica y la criticidad no cambia.
- c) Si  $FT_{i \text{ cálculo}} < PFC_{i-j \text{ impuesta}}$  se recalculan también las fechas tempranas aguas abajo de los nodos posteriores a i-j hasta el último nodo del proyecto y luego todas las fechas tempranas desde el último nodo hasta el nodo inicial. La fecha de finalización del proyecto se modifica. Se origina una rama crítica adicional que va desde la actividad i-j hasta el último nodo. El margen de los nodos críticos básicos (excepto el último) es mayor a cero, mientras que los de los nodos críticos nuevos (incluido el último) es igual a cero. Se debería comenzar el proyecto más tarde (en una cantidad de tiempo igual al margen de los nodos del camino crítico básico).

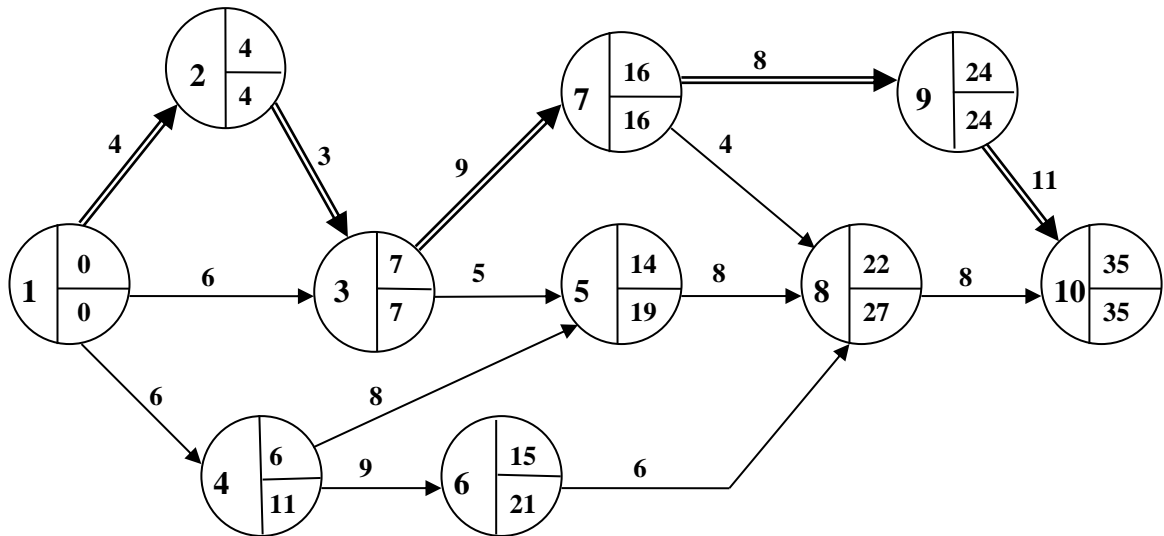
Es obvio que si de un nodo i sale una sola actividad i-j, resulta lo mismo hacer la imposición sobre la Fecha Temprana del nodo i que hacerla sobre la Primera Fecha de Comienzo de i-j.

#### Restricciones sobre Fecha Tardía (FT):

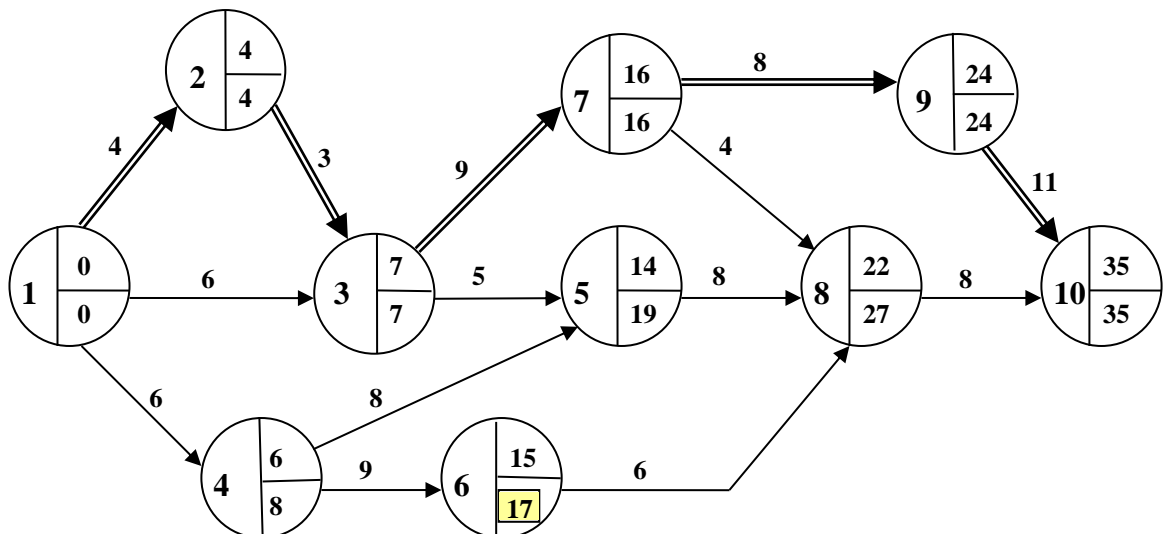
Supongamos el mismo ejemplo inicial anterior, al que se le impone una restricción sobre la Fecha Tardía del nodo 6. Esto podría ser, por ejemplo, debido a que la actividad 4-6 requiere la utilización de un equipo que se contrata hasta una fecha t determinada y existe la obligación de devolverlo en esa fecha. La verificación del nodo 6 significará que el equipo quedó libre y ya puede ser devuelto.

Por lo tanto, se pueden dar aquí también tres casos:

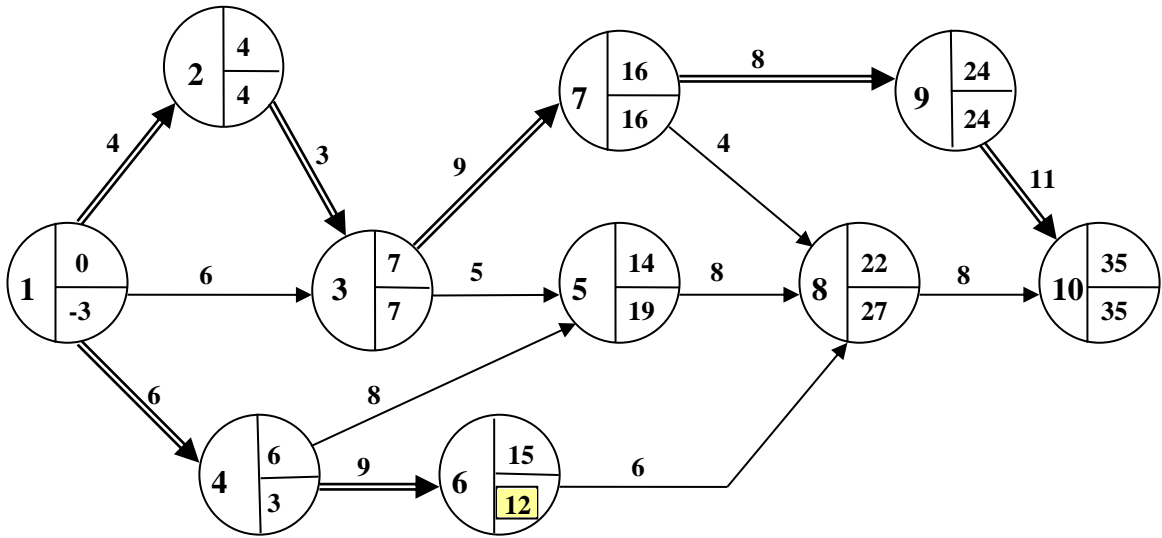
- a) que la Fecha Tardía impuesta sea mayor que la Fecha Tardía de cálculo. Supongamos que esta imposición fuera la semana 24. Esto no modificaría en absoluto el plan, ya que la fecha de cálculo inicial es más restrictiva que la imposición. Es decir, el equipo se usará hasta la semana 21 como muy tarde y luego se devolverá satisfaciendo la obligación de su devolución antes de la semana 24.



- b) que la Fecha Tardía impuesta se menor que la Fecha Tardía de cálculo, pero mayor que la Fecha Temprana del nodo. En este caso se deberán recalcular las fechas tardías desde el nodo en donde se hace la imposición hacia el nodo origen hasta que la modificación de margen queda absorbida por alguna otra rama. No cambiará la criticidad del proyecto ni la fecha de comienzo del mismo. Supongamos que la fecha de devolución obligada del equipo sea la semana 17. Se reemplaza la Fecha Tardía del nodo 6 por el valor 17, como se observa en la figura. Posteriormente, se recalculan los nodos "aguas arriba" de 6 (en este caso sólo se va a modificar el nodo 4).



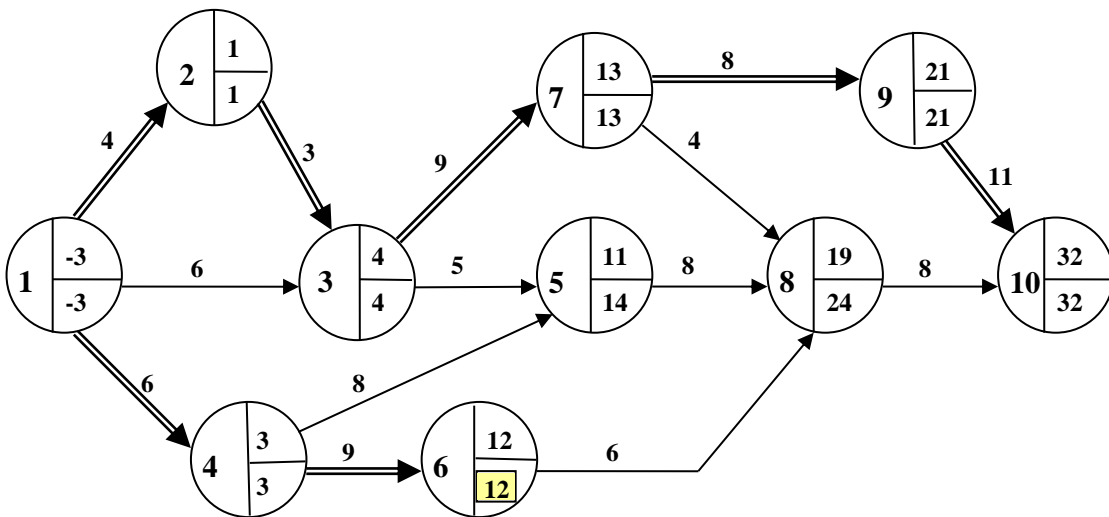
- c) Que la FT impuesta sea menor que la FT de cálculo y, a su vez, menor que la fecha temprana del nodo. Supongamos que el equipo se deba devolver como muy tarde en la semana 12. Se recalculan las Fechas Tardías de los nodos precedentes hasta el nodo inicial.



Observamos que existe un margen negativo de tres semanas en el nodo en donde se planteó la restricción y en todos sus predecesores (incluido el nodo inicial). El margen de -3 semanas del nodo 1, significa que el proyecto debería comenzar tres semanas antes de lo previsto, a fin de satisfacer la restricción impuesta, lo que modificaría por ende la fecha de finalización del proyecto.

Además, se origina una rama crítica adicional que va desde el nodo origen hasta el nodo en donde se ha generado la imposición. Esta rama es crítica en el sentido de que si se atrasa alguna de las actividades que la componen no se llega a cumplir con la restricción impuesta.

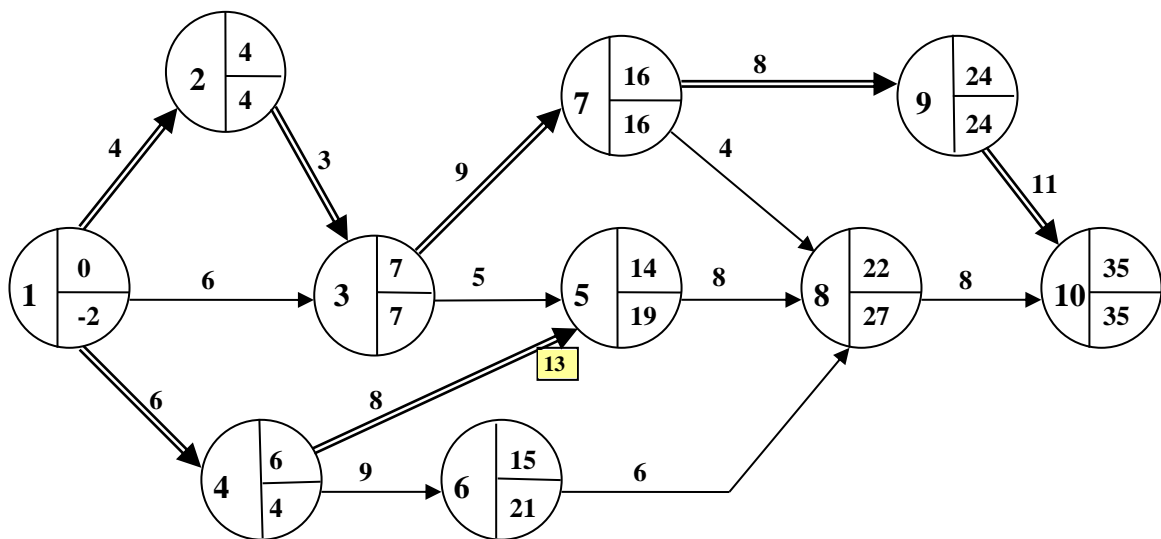
Recalculando el proyecto, comenzándolo tres semanas antes, tendremos:



Las imposiciones se pueden hacer también sobre una Última Fecha de Finalización de una actividad  $i-j$  (en lugar de hacerlo sobre la Fecha Tardía de  $j$ ). El análisis es exactamente igual al visto, con la única diferencia de que se deben calcular las Fechas Tardías precedentes a la actividad  $i-j$  (en lugar del nodo  $j$ ).

Si, como en el caso del nodo 6, concurre una sola actividad, es lo mismo establecer la imposición sobre la Fecha Tardía del nodo o sobre la Última Fecha de Finalización de la actividad que a él concurre (ya que en ese caso  $FT_j = UFF_{ij}$ ).

Pero podría ocurrir que a un nodo concurren varias actividades. Supongamos que al ejemplo inicial se impone una limitación de Última Fecha de Finalización de 13 a la actividad 3-8. Al recalcular hacia atrás se modificarán las Fechas Tardías de los nodos 4 y 1 (pero no del 3), quedando el proyecto de la siguiente forma:



Es decir, se debería adelantar el proyecto 2 semanas.

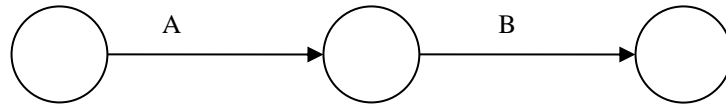
Si, en cambio, se hubiera impuesto la Última Fecha de Finalización de 13 a la actividad 3-5, la red quedaría como está, ya que no se modificaría la Fecha Tardía del nodo 3.

## TIPO DE RELACIONES ENTRE ACTIVIDADES

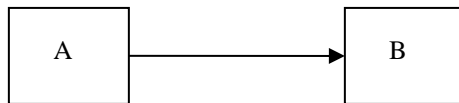
Hasta aquí hemos visto el tipo de relación más común que existe entre las actividades en los proyectos, que es la relación Fin-Comienzo (F-C). Sin embargo, existen otras formas de vinculación entre tareas que son las denominadas Fin-Fin (F-F), Comienzo-Fin (C-F) y Comienzo-Comienzo (C-C)

### Relación Fin-Comienzo

La relación F-C es del tipo "*B puede comenzar una vez finalizada A*". En la forma gráfica de Flecha-Actividad esta relación se presenta como sigue:



En el método de potenciales (Nodo-Actividad) su graficación es:



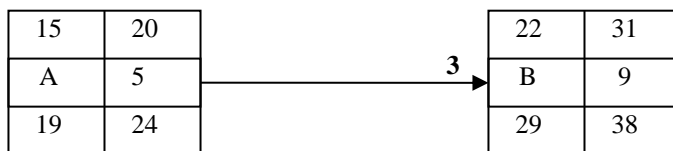
Si bien, para la relación F-C, la forma de graficación es indiferente, para el resto de las relaciones la única manera razonablemente posible de graficación es a través del método de potenciales, de manera que utilizaremos esta forma para la explicación del tema.

Supongamos que la duración de las actividades A y B son respectivamente 5 y 9 unidades de tiempo (tomemos por ejemplo semanas), y que se han calculado las primeras fechas de comienzo y finalización de ellas, siendo las indicadas en el gráfico Nodo-Actividad siguiente:



Es obvio que en este ejemplo concurren otras tareas a B y que de B emergen también otras tareas. Al construir la red se debe verificar que se cumpla que  $PFC_B \geq PFF_A$  y que  $UFF_A \leq UFC_B$ .

Podría ocurrir también que se imponga una restricción de tiempos entre la vinculación de estas actividades. Por ejemplo la actividad B puede comenzar después de "d" semanas de finalizada A. Suponiendo  $d = 3$ , tendremos:



Para verificar si la imposición es limitante, se deben cumplir ambas, que  $PFC_B \geq PFF_A + d$  y que  $UFF_A \leq UFC_B - d$ .

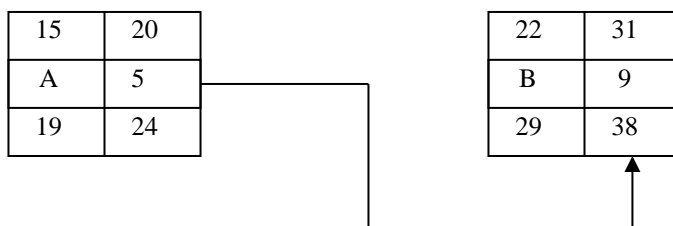
Recorriendo la relación hacia la derecha, observamos que la Primera Fecha de Comienzo de B no cumple la restricción (ya que  $22 < 20 + 3$ ). En consecuencia, se modifica la  $PFC_B$  y, por lo tanto, la  $PPF_B$ :



Recorriendo la relación hacia atrás, observamos que la Última Fecha de Finalización de A cumple la restricción (ya que  $24 < 29 - 3$ ).

### Relación Fin-Fin

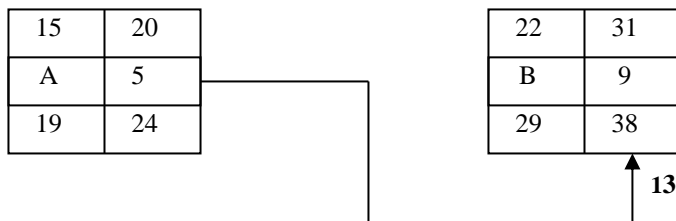
La relación F-F es del tipo "*B tiene que finalizar una vez finalizada A*". La representación gráfica de esta relación es la siguiente:



Al construir la red se debe verificar que  $PPF_B \geq PPF_A$  y que  $UFF_A \leq UFF_B$ .

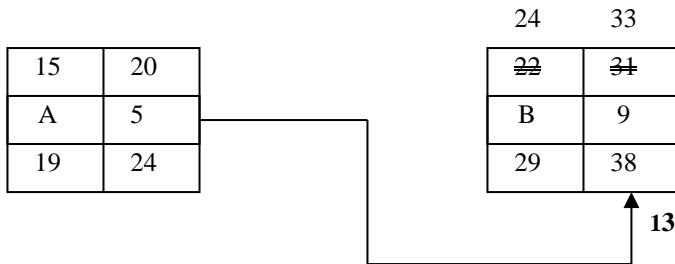
Podría ocurrir también que se imponga una restricción de tiempos entre la vinculación de estas actividades. Por ejemplo la actividad B debe comenzar "d" semanas después de haber finalizado A.

Se debe cumplir que  $PPF_B \geq PPF_A + d$  y que  $UFF_A \leq UFF_B - d$ . Supongamos que en el ejemplo, B debe terminar 13 semanas luego de haber terminado A.



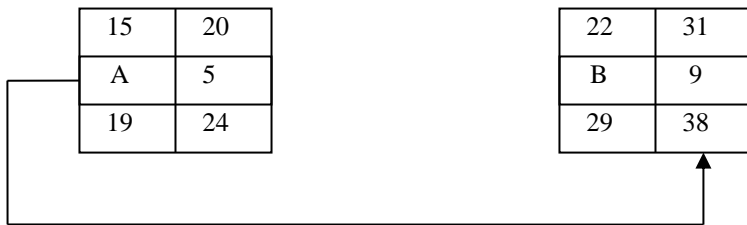
Recorriendo la relación hacia la derecha, observamos que la Primera Fecha de Finalización de B no cumple la restricción (ya que  $31 < 20 + 13$ ). En consecuencia, habrá que modificar la  $PFF_B$  de 31 a 33 y, por lo tanto, la  $PFC_B$  de 22 a 24.

Recorriendo la relación hacia atrás, observamos que la Última Fecha de Finalización de A cumple la restricción (ya que  $24 < 38 - 13$ ).

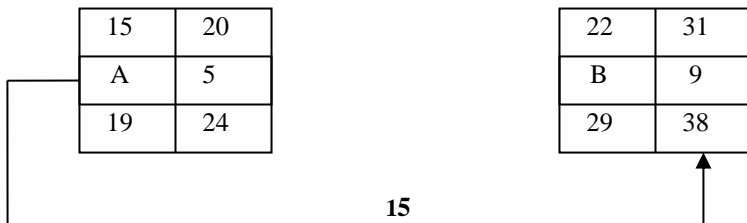


Relación Comienzo-Fin

La relación C-F es del tipo "B tiene que finalizar una vez comenzada A". La representación gráfica de esta relación es la siguiente:



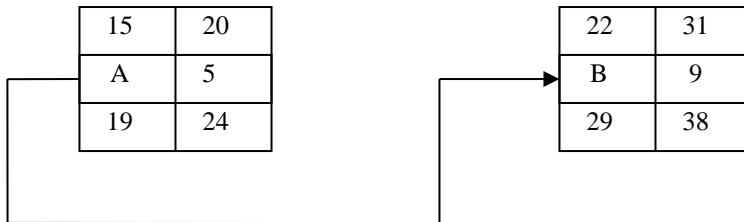
Al construir la red se debe verificar que  $PFF_B \geq PFC_A$  y que  $UFF_A \leq UFF_B$ . Puede ocurrir también que se imponga una restricción de tiempos entre la vinculación de estas actividades. Por ejemplo la actividad B debe finalizar "d" semanas después de comenzada A. Se debe cumplir que  $PFF_B \geq PFC_A + d$  y que  $UFF_A \leq UFF_B - d$ . Supongamos que en el ejemplo, B deba terminar por lo menos 15 semanas luego de haber terminado A.



Recorriendo la relación hacia la derecha, observamos que la Primera Fecha de Finalización de B cumple la restricción y, recorriéndola hacia la izquierda, que la Última Fecha de Comienzo también se satisface. Por lo tanto, no se debe realizar ningún cambio.

### Relación Comienzo-Comienzo

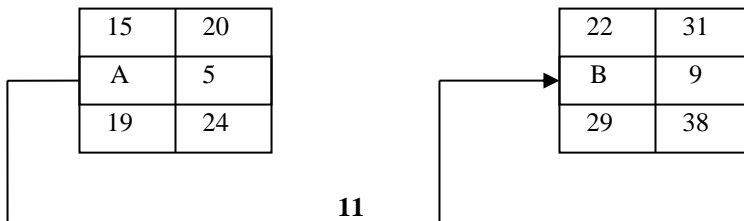
La relación C-C es del tipo "*B debe comenzar una vez comenzada A*". La representación gráfica de esta relación es la siguiente:



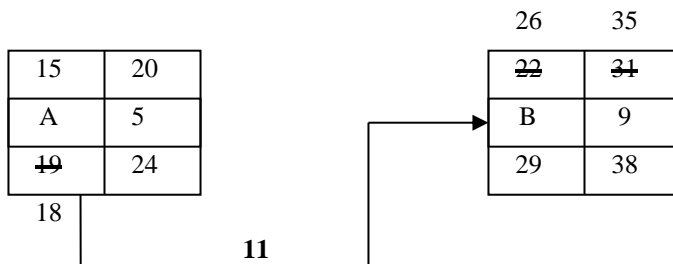
Al construir la red se debe verificar que  $PFC_B \geq PFC_A$  y que  $UFC_A \leq UFC_B$ .

Puede ocurrir también que se imponga una restricción de tiempos entre la vinculación de estas actividades. Por ejemplo la actividad B puede comenzar recién después de "d" semanas de comenzada A.

Se debe cumplir que  $PFC_B \geq PFC_A + d$  y que  $UFC_A \leq UFC_B - d$ . Supongamos que en el ejemplo, B deba comenzar por lo menos 11 semanas luego de haber comenzado A.



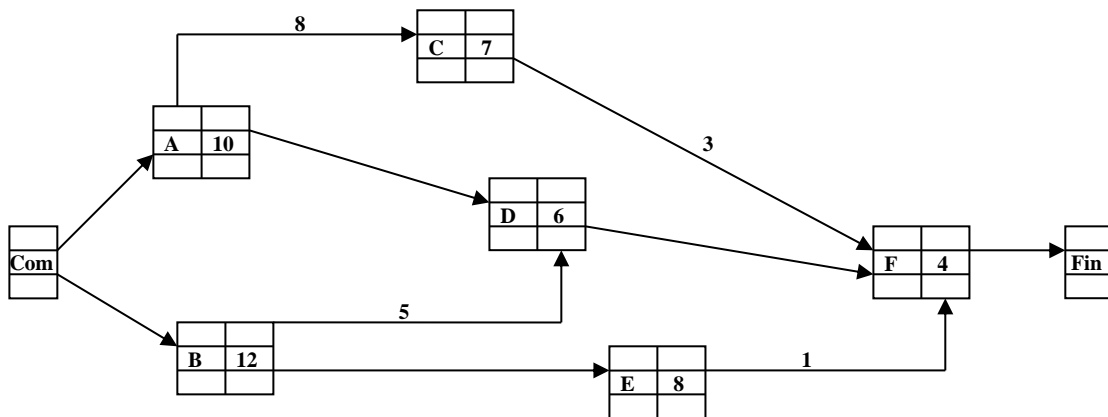
En este caso, habría que hacer las siguientes modificaciones:



Tomemos el siguiente proyecto en donde se han establecido relaciones de varios tipos entre las actividades del mismo, a fin de ejemplificar la construcción de la red y el cálculo de las primeras y últimas fechas de comienzo y de finalización de las tareas.

ACTIVIDAD	DURACIÓN	PRECEDE A		
		TIPO	ACTIVIDAD	TIEMPO
A	10	C-C	C	8
		F-C	D	-
B	12	F-F	D	5
		F-C	E	-
C	7	F-C	F	3
D	6	F-C	F	-
E	8	F-F	F	1
F	4	-	-	-

La red correspondiente es:



Se comienza en el nodo ficticio Com con el valor 0 como Primera Fecha de Comienzo. Las actividades A y B tendrán como PFF ese valor. La PFF de A es  $0 + 10 = 10$ , mientras que la PFF de B es  $0 + 12 = 12$ .

La relación de A con C es de C-C, y tiene una duración de 8. Esto significa que C puede comenzar 8 semanas después de que A ha comenzado. En consecuencia la PFC de C es  $0 + 8 = 8$ . La PFFC es  $8 + 7 = 15$ .

La actividad A sustenta con D una relación F-C. En consecuencia la  $PFC_D$  sería, en principio, 10. En tanto, la relación de B con D es F-F y con una duración de 5. La  $PFF_D$  será la mayor entre  $10 + 6 = 16$  y  $12 + 5 = 17$ . Esto significa que D la  $PFF_D$  es 17; también se deberá modificar como consecuencia de esto la  $PFC_D$  a  $17 - 6 = 11$ .

Por su parte, la  $PFC_E = 12$  y la  $PFF_E = 12 + 8 = 20$ .

Pasando ahora a F, tendremos que la  $PFC_F$  sería la mayor entre  $15 + 3 = 18$  y 17, es decir 18. La  $PFF_F$ , a su vez, es la mayor entre  $18 + 4 = 22$  y  $20 + 1$ , es decir 22, lo que no obligaría a cambiar la  $PFC_F$ .

Finalmente la  $PFC = UFF$  del nodo Fin es 22.

Recalculando, ahora, el proyecto hacia atrás tendremos que la  $UFF_F = 22$ . La  $UFC_F$  es  $22 - 4 = 18$ . Mientras que la  $UFF_E = 22 - 1 = 21$ .

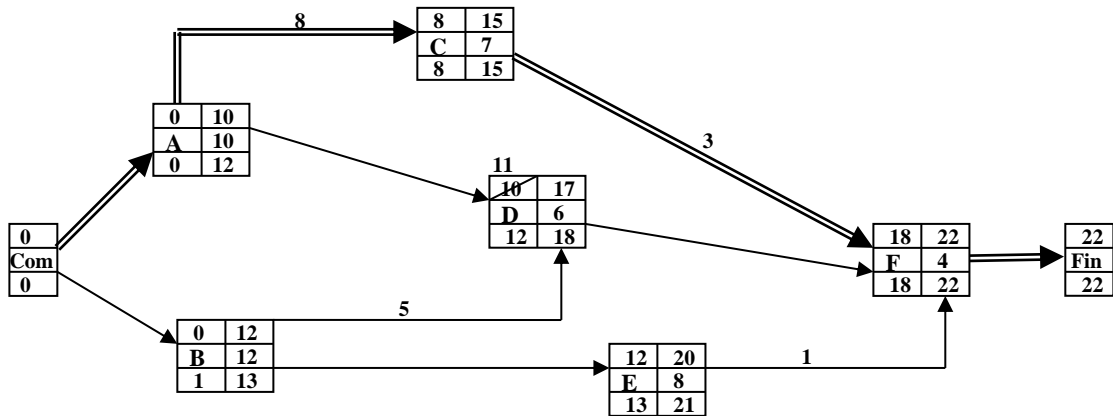
En el nodo C tendremos que  $UFF_C = 18 - 3 = 15$  y que  $UFC_C = 15 - 7 = 8$ .

En el nodo D, tendremos que  $UFF_D = 18$  y que  $UFC_D = 18 - 6 = 12$ .

En el nodo B, tendremos que  $UFF_B$  es la menor entre  $18 - 5 = 13$  y 13, es decir 13, y que la  $UFC_B = 13 - 12 = 1$ .

En el nodo A, la  $UFF_A = 12$  y la  $UFC_A$  es la menor entre  $12 - 10 = 2$ , por un lado, y  $8 - 8 = 0$  por el otro; es decir, 0.

Finalmente el Nodo origen tendrá UFC = 0.



La criticidad de este proyecto está dada por A-C-F. El camino crítico está constituido por las actividades C y F y por la relación de precedencia entre A y C. Las actividades críticas son C y F (las de menor margen), pero A está obligada a comenzar en el instante 0 para que C pueda comenzar en su Primera Fecha de Comienzo 8.

## VI. PROGRAMACIÓN DE ACTIVIDADES

Una vez establecido el plan del proyecto, se debe efectuar la programación de las actividades; es decir, determinar la fecha de inicio de las tareas y el tipo y cantidad de recursos necesarios para llevarlas a cabo. En consecuencia, se establece un programa de necesidades de recursos.

Para ello se utilizan los denominados "diagramas calendario", que constituyen la representación gráfica de la red en una forma similar a la de un diagrama de Gantt. Esta es la gran ventaja del método de graficación "Flecha-Actividad" sobre el de los potenciales, puesto que permite visualizar las actividades del proyecto sobre un gráfico con escala de tiempo. Esto, a su vez, nos permitirá graficar no sólo las necesidades de los diferentes recursos (mano de obra, máquina, maquinaria, materiales, etc.) en forma gráfica (típicamente en histogramas), sino también el programa de ingresos y egresos de disponibilidades financieras (flujo de caja) del proyecto. Tener evidenciada gráficamente la ubicación de las tareas en el tiempo permite observar también los límites para estudiar el posible desplazamiento de algunas tareas cuando existan limitaciones de recursos en determinados períodos de tiempo.

Los diagramas calendarios pueden representarse en Fecha Temprana (Ft) o en Fecha Tardía (FT).

En el primer caso, todos los eventos del proyecto se evidencian en su Fecha Temprana. En general, esta forma de programación se efectúa cuando se pretende adelantar lo más posible la ejecución de las tareas; por ello es común que, además, las tareas se programen para que comiencen en su Primera Fecha de Comienzo.

En los diagramas a Fecha Tardía ocurre todo lo contrario. Los sucesos se evidencian en su Fecha Tardía y, en general las actividades se programan para que comiencen en su Última Fecha de Comienzo, ya que generalmente el objetivo es atrasar lo más posible la ejecución de las actividades.

Tomemos el ejemplo del próximo gráfico para describir el método.

Las actividades se grafican con flechas dispuestas horizontalmente sobre un gráfico con escala de tiempo, en donde su longitud representa el 100% de realización. Los márgenes se grafican con líneas punteadas. Las actividades críticas están dispuestas siempre sobre una horizontal desde el nodo origen hasta el nodo fin.

El diagrama calendario a Fecha Temprana, y con las actividades programadas en su PFC, correspondiente al ejemplo, se puede observar en la Figura 20.

Los márgenes de las actividades, así determinados, son los márgenes "libres", que se han definido anteriormente. Es decir, representan el tiempo disponible para programar a las actividades en el supuesto que ellas y todas las predecesoras se han ejecutado lo antes posible. En el diagrama calendario a Fecha Tardía, en cambio, como se dijo anteriormente, los nodos van dispuestos en su Fecha Tardía (FT). En la Figura 21 se ha evidenciado la red en FT con las actividades programadas en su UFC. Los márgenes de las actividades así definidos, que llamaremos Márgenes Finales, están definidos por la siguiente expresión:

$$MF_{i-j} = UFC_{i-j} - FT_i$$

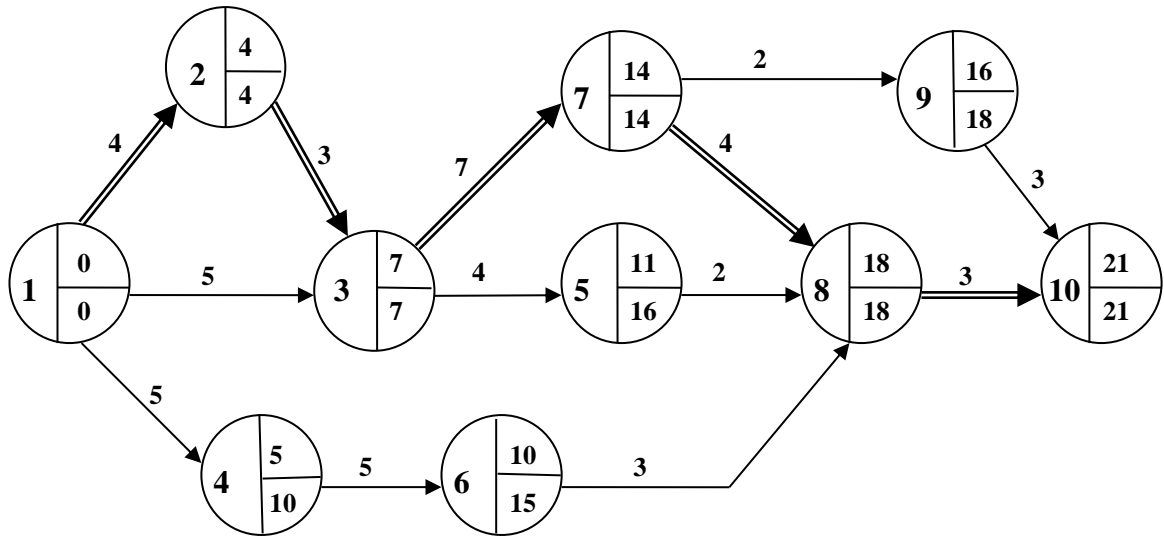
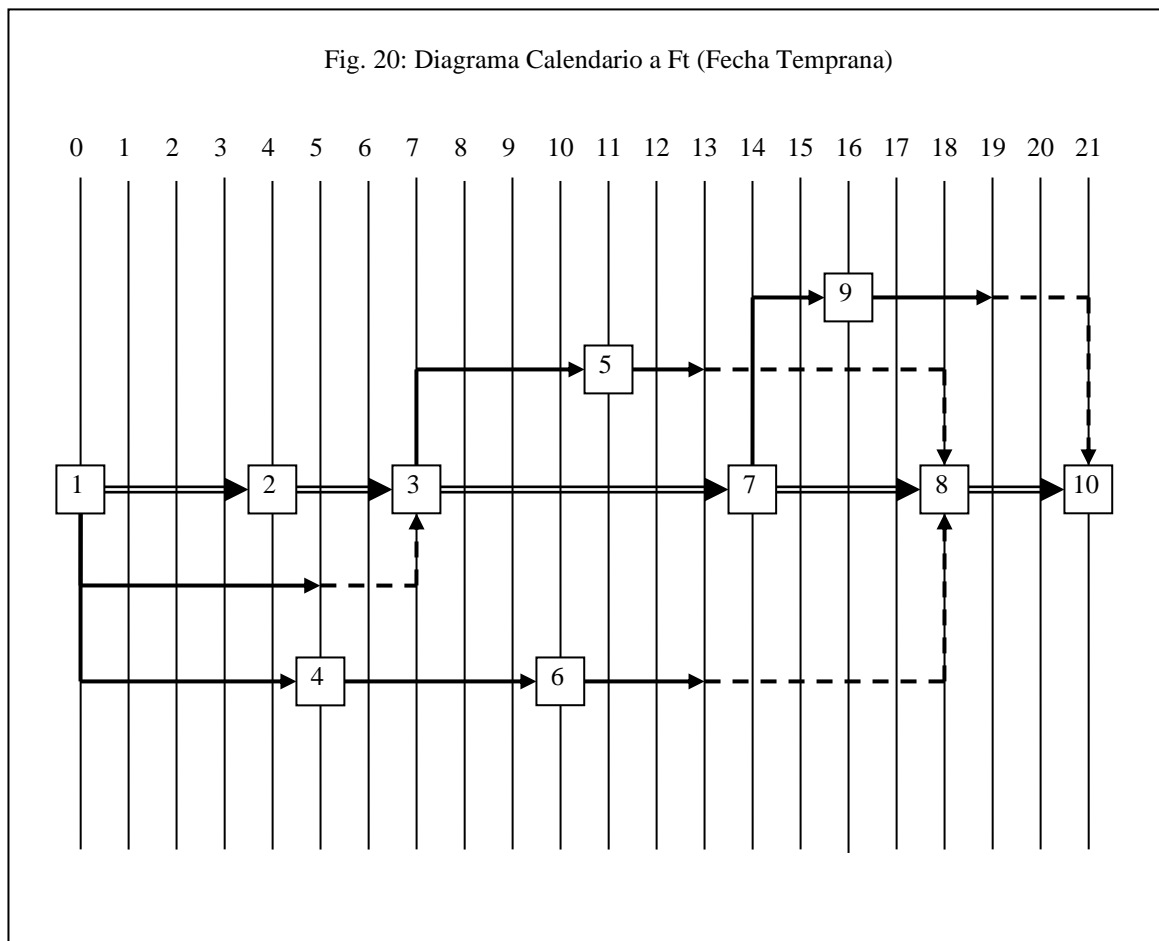


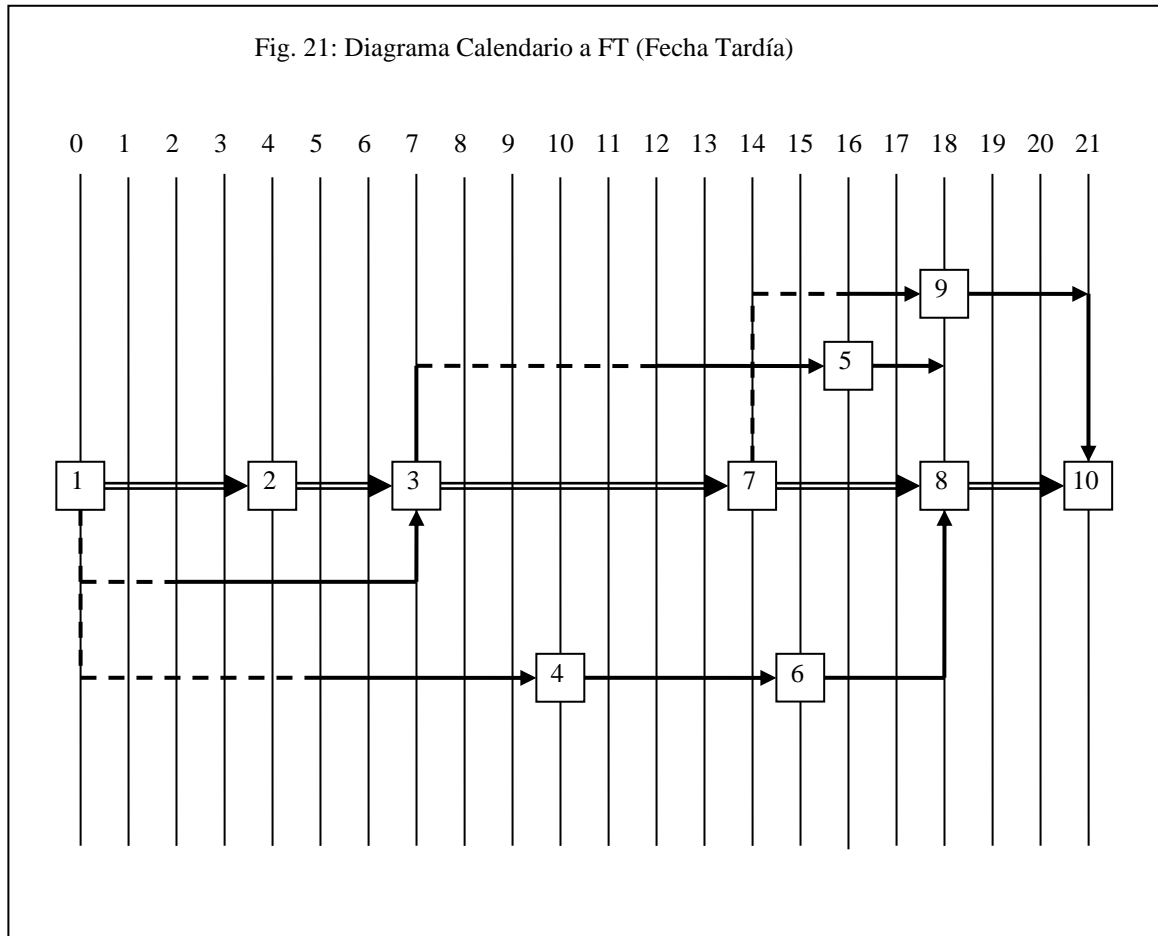
Fig. 20: Diagrama Calendario a Ft (Fecha Temprana)



Es decir:

$$MF_{i-j} = FT_j - FT_i - d_{i-j}$$

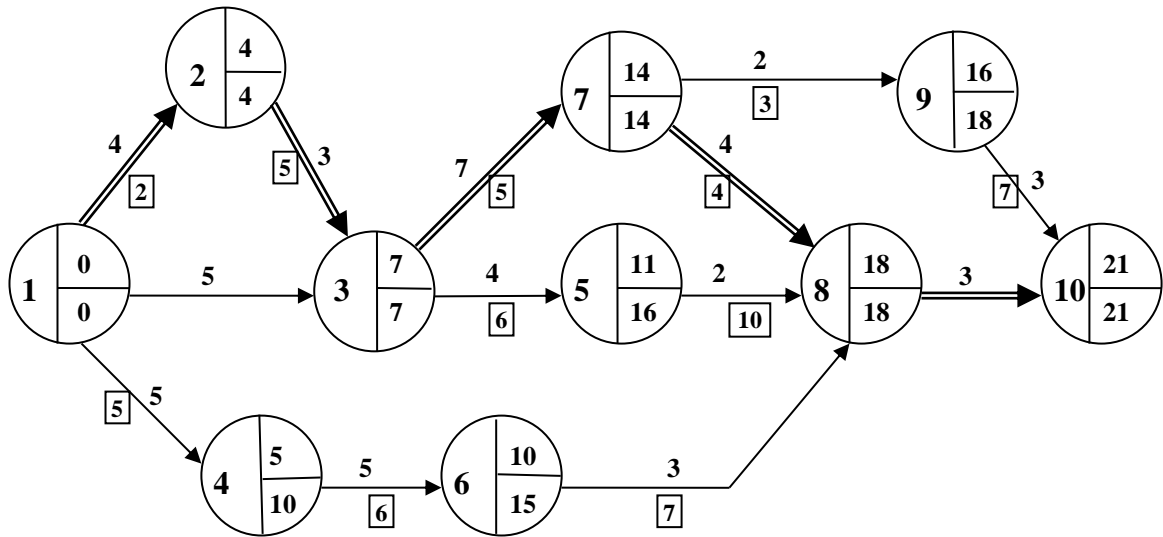
Este margen representa el tiempo que se tendrá disponible para la actividad en el caso de que la actividad se programe en su Última Fecha de Comienzo ( $FT_j - d_{i-j}$ ). Es decir, si se toma todo el Margen Final, se obliga a que la actividad termine en su Última Fecha de Finalización (se haría crítico el nodo al que concurre), y no se modificaría en absoluto la Fecha Temprana o tardía del nodo del que sale la tarea.



Programación de recursos:

Supongamos que se quiere programar el requerimiento de un recurso determinado (por ejemplo, la utilización de un tipo de máquina) para el proyecto, habida cuenta de que varias de las actividades a ejecutarse hacen uso de dicho recurso. Asumiremos también que se dispone semanalmente de una cantidad máxima de 21 hs. de máquina disponible.

Tomando el mismo ejemplo de proyecto anterior, consideremos que las actividades requieren utilizar la máquina en las cantidades semanales indicadas debajo de cada flecha.

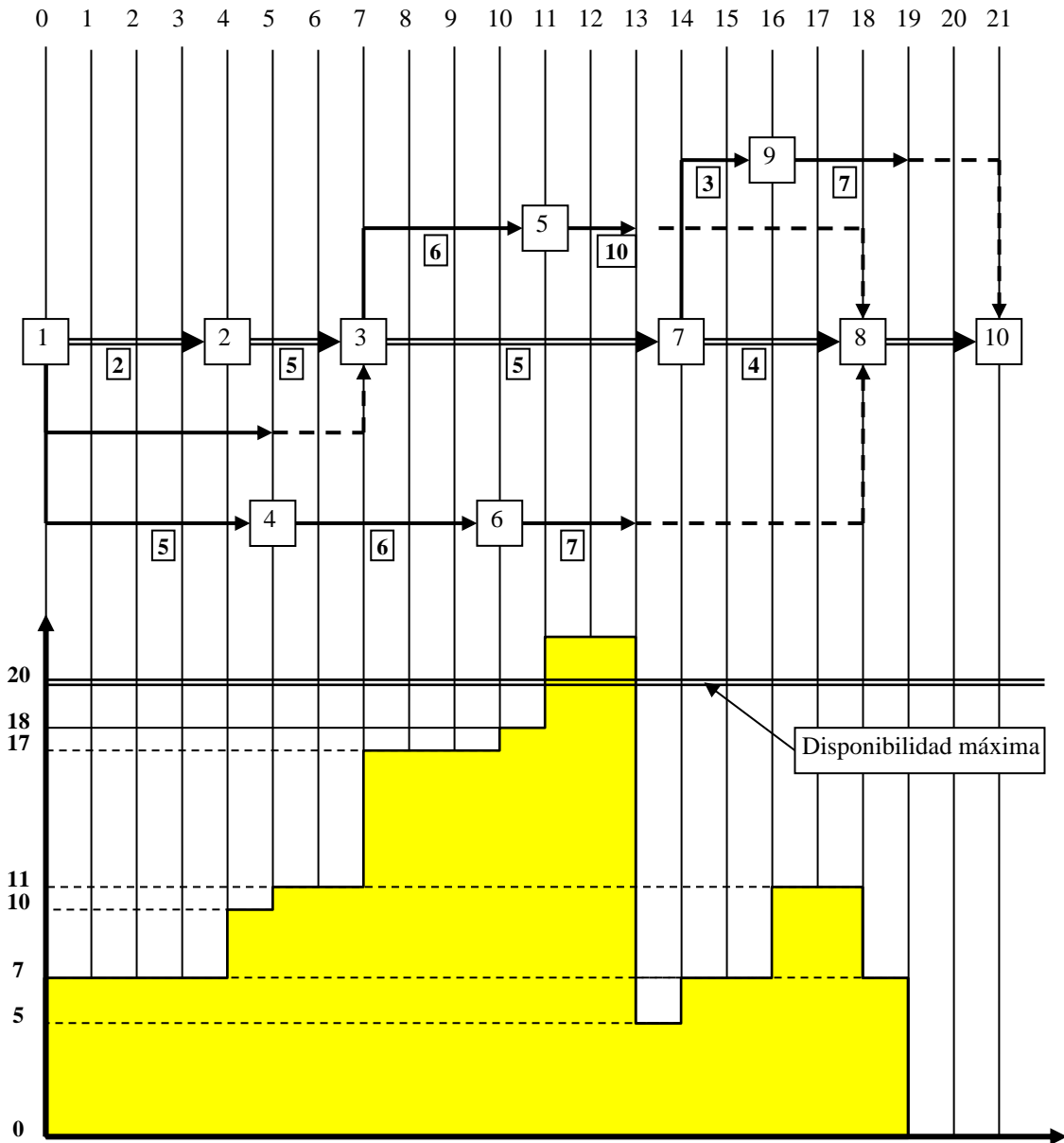


En primer lugar se dibuja el diagrama calendario. Para este ejemplo, trabajaremos con el diagrama calendario a Fecha Temprana (Ft), asumiendo que -con un criterio conservador- se pretende utilizar el recurso lo antes disponible. Luego, se calcula para cada semana el requerimiento semanal de máquina. De esta forma, tendremos:

Semana 0-1:	$2 + 5 = 7$
Semana 1-2:	$2 + 5 = 7$
Semana 2-3:	$2 + 5 = 7$
Semana 3-4:	$2 + 5 = 7$
Semana 4-5:	$5 + 5 = 10$
Semana 5-6:	$5 + 6 = 11$
Semana 6-7:	$5 + 6 = 11$
Semana 7-8:	$6 + 5 + 6 = 17$
Semana 8-9:	$6 + 5 + 6 = 17$
Semana 9-10:	$6 + 5 + 6 = 17$
Semana 10-11:	$6 + 5 + 7 = 18$
Semana 11-12:	$10 + 5 + 7 = 22$
Semana 12-13:	$10 + 5 + 7 = 22$
Semana 13-14:	5
Semana 14-15:	$3 + 4 = 7$
Semana 15-16:	$3 + 4 = 7$
Semana 16-17:	$7 + 4 = 11$
Semana 17-18:	$7 + 4 = 11$
Semana 18-19:	7
Semana 19-20:	0
Semana 10-21:	0

En la Fig. 16 se muestra el histograma correspondiente al recurso. Durante las semanas 12-13 y 13-14, el requerimiento del recurso excede a la disponibilidad. Por lo tanto, deberá procederse a “nivelar” el recurso.

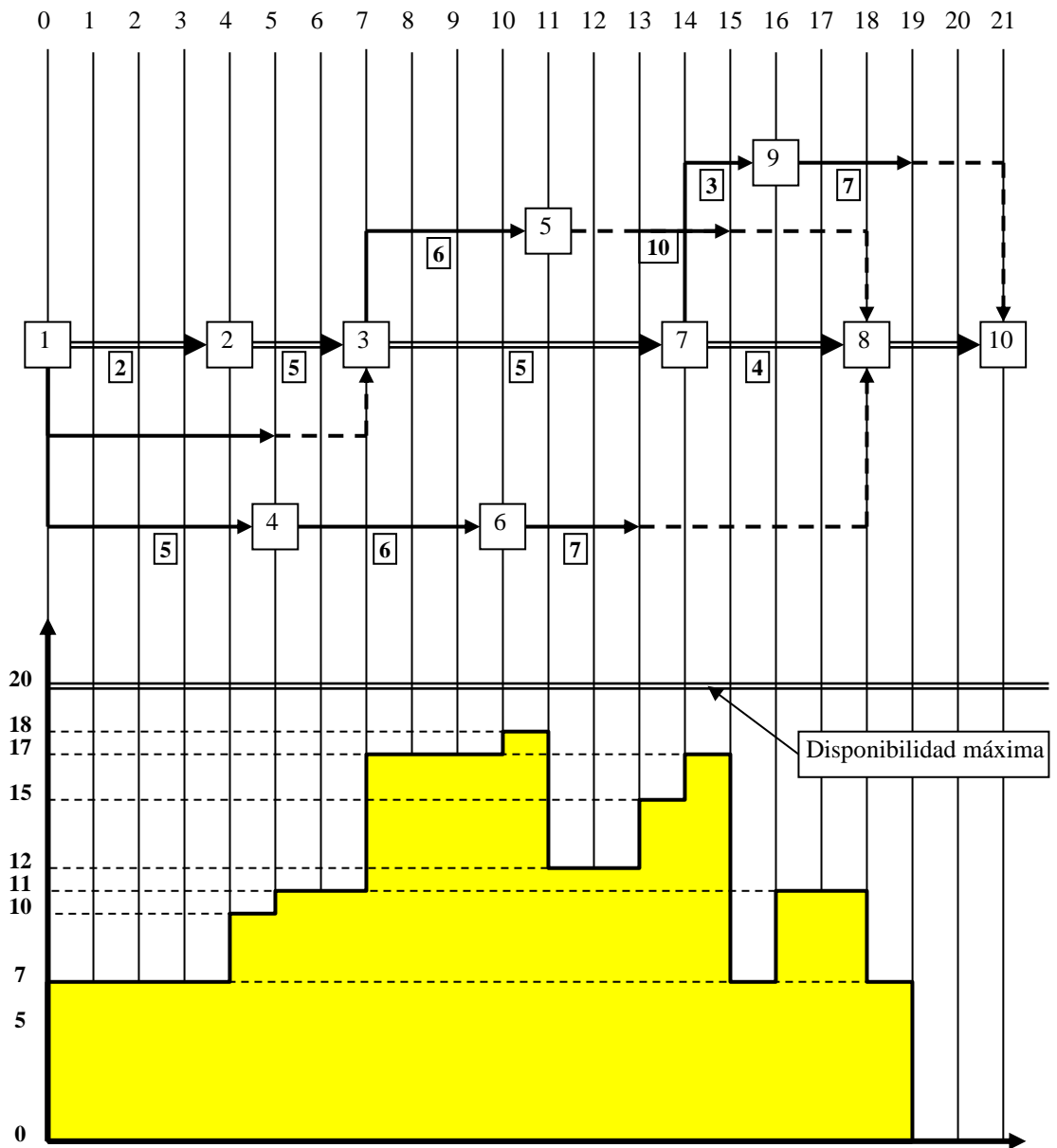
Fig. 16: Histograma de un recurso



La nivelación de un recurso consiste en desplazar algunas tareas en el tiempo, de manera tal que la disponibilidad del recurso no sea excedida. Se puede observar gráficamente que programando la actividad 5-8 para que comience en el instante 13, el problema queda resuelto, tal como se observa en la Figura 22. Otra alternativa podría haber sido desplazando la actividad 6-7 para que comience en el instante 13.

Si bien en este caso la solución es sencilla, el tema de la nivelación resulta complejo. Existen varios algoritmos para resolver el tema de la nivelación (entre ellos el algoritmo de Brooks y el algoritmo MAP) que trabajan con el principio de seleccionar, para desplazar, a aquellas actividades que tengan mayor Margen Total.

Fig. 22: Histograma de un recurso



De igual manera se podrán graficar los histogramas correspondientes a todos los recursos del proyecto, lo que nos permitirá programar adecuadamente, y en consecuencia tener disponibles en la oportunidad requerida, los recursos necesarios para llevar a cabo las actividades que forman parte del proyecto.

Cuando hay varios proyectos, la nivelación de recursos es bastante compleja, ya que al nivelar uno de ellos se puede desnivelar otros. En muchos casos, existe incompatibilidad de limitación de recursos, por lo que la única solución consiste en prolongar la duración del proyecto. Los sistemas de computación de programación por camino crítico disponen de

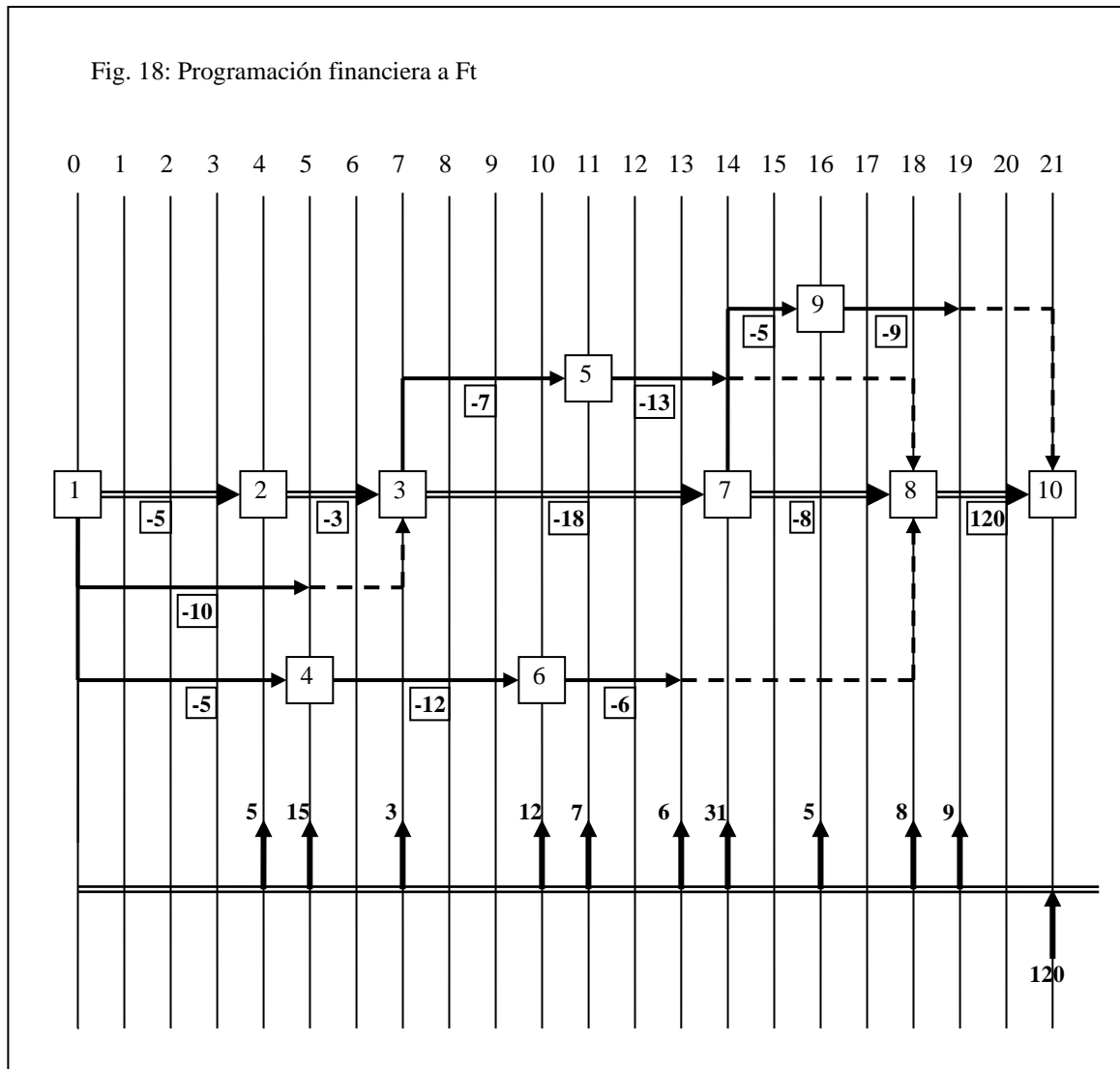
herramientas avanzadas para encontrar una buena solución al problema cuando existen varios recursos que se deben nivelar.

Programación financiera

Una vez establecida la programación de las actividades, se puede determinar el flujo de caja ("cash flow") del proyecto.

Tomaremos como ejemplo el proyecto anterior, en donde se indicarán ahora las erogaciones e ingresos de las actividades debajo de cada flecha, en miles de pesos, los que asumiremos se producen al finalizar las actividades.

En primer lugar se considerará la programación a Fecha Temprana. Debajo del gráfico se indica con flechas salientes los egresos de caja al finalizar cada semana, y con flechas entrantes los ingresos.



Haremos a continuación un análisis financiero del proyecto. Calcularemos en primer lugar el Valor Actual Neto (VAN), que surge de descontar, a una tasa de interés  $i$ , el flujo neto de cada período "n" al momento presente (en este caso el instante 0). Asumamos una tasa de interés de 1% mensual. Tendremos que para el proyecto a Fecha Temprana, el VAN es el siguiente:

$$\begin{aligned} VAN = & -\frac{5}{(1+0,01)^4} - \frac{15}{(1+0,01)^5} - \frac{3}{(1+0,01)^7} - \frac{12}{(1+0,01)^{10}} - \frac{7}{(1+0,01)^{11}} - \frac{6}{(1+0,01)^{13}} - \frac{31}{(1+0,01)^{14}} \\ & - \frac{5}{(1+0,01)^{16}} - \frac{8}{(1+0,01)^{18}} - \frac{9}{(1+0,01)^{19}} + \frac{120}{(1+0,01)^{21}} = 11,80 \end{aligned}$$

La Tasa Interna de Retorno (TIR) de un proyecto es la tasa de interés que iguala la sumatoria de los ingresos, descontados al momento actual, con la sumatoria de los egresos, descontados al momento actual. La TIR constituye la máxima tasa de interés que se podría pagar para financiar el proyecto. Para el ejemplo, programando a Fecha Temprana y Primera Fecha de Comienzo, tendremos:

$$\frac{5}{(1+i)^4} + \frac{15}{(1+i)^5} + \frac{3}{(1+i)^7} + \frac{12}{(1+i)^{10}} + \frac{7}{(1+i)^{11}} + \frac{6}{(1+i)^{13}} + \frac{31}{(1+i)^{14}} + \frac{5}{(1+i)^{16}} + \frac{8}{(1+i)^{18}} + \frac{9}{(1+i)^{19}} = \frac{120}{(1+i)^{21}}$$

Despejando, tendremos que  $i = 0,0327$ . Es decir, la TIR de este proyecto a Fecha Temprana es igual a 3,27%.

Si programáramos el proyecto a Fecha Tardía y Última Fecha de Finalización de las actividades, tendríamos:

$$\begin{aligned} VAN = & -\frac{5}{(1+0,01)^4} - \frac{13}{(1+0,01)^7} - \frac{5}{(1+0,01)^{10}} - \frac{18}{(1+0,01)^{14}} - \frac{12}{(1+0,01)^{15}} - \frac{7}{(1+0,01)^{16}} - \frac{32}{(1+0,01)^{18}} \\ & - \frac{9}{(1+0,01)^{21}} + \frac{120}{(1+0,01)^{21}} = 14,37 \end{aligned}$$

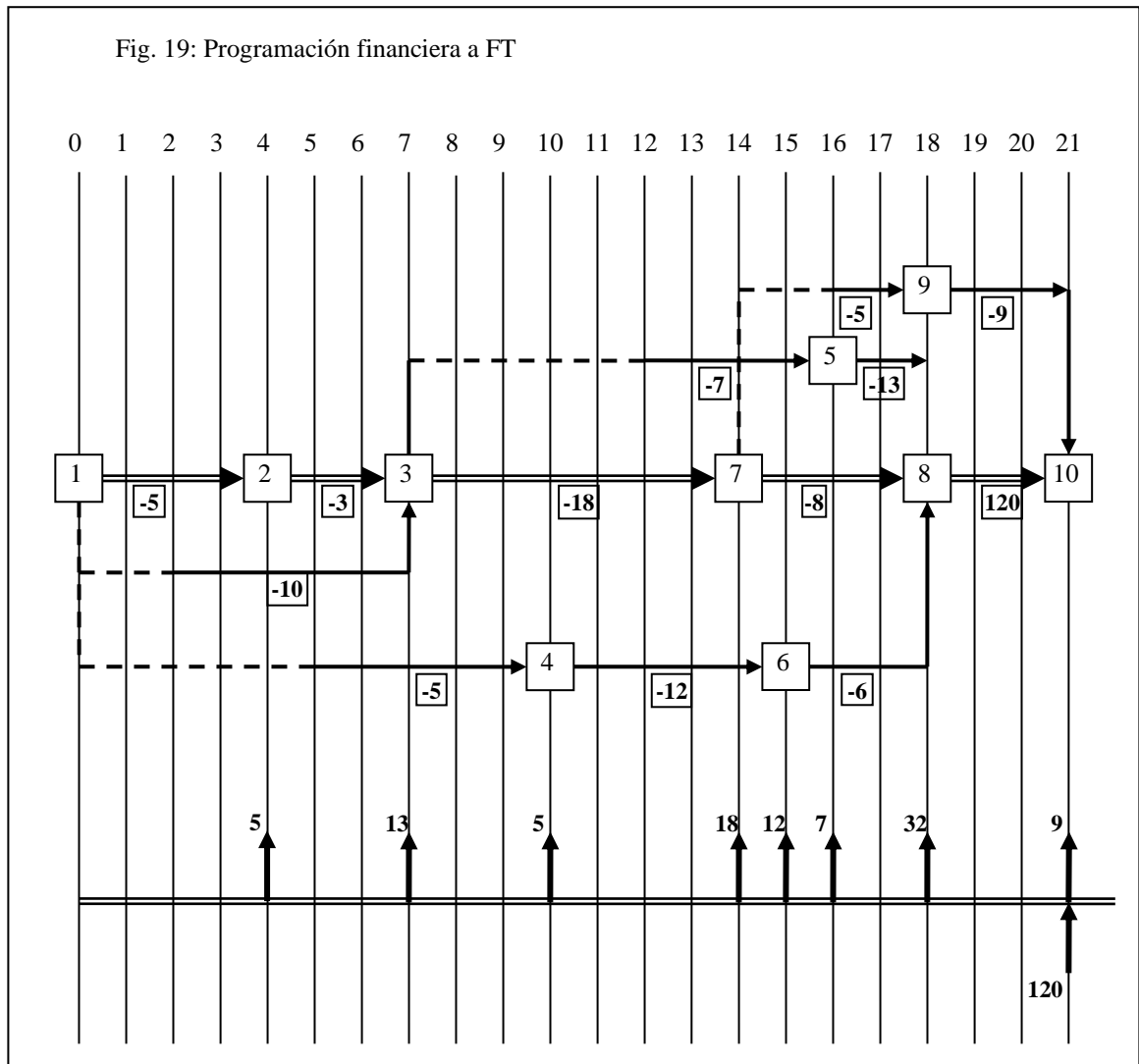
y la TIR:

$$\frac{5}{(1+i)^4} + \frac{13}{(1+i)^7} + \frac{5}{(1+i)^{10}} + \frac{18}{(1+i)^{14}} + \frac{12}{(1+i)^{15}} + \frac{7}{(1+i)^{16}} + \frac{32}{(1+i)^{18}} + \frac{9}{(1+i)^{21}} = \frac{120}{(1+i)^{21}}$$

Despejando,  $i = 0,0587$  (5,87%).

En este ejemplo es obvio que desde el punto de vista financiero conviene programar las actividades lo más tarde posible (FT), ya que el único ingreso se obtiene al finalizar el proyecto. En otros casos, sin embargo, puede ocurrir que no sea así, ya que hay proyectos en donde se va certificando la obra a lo largo del tiempo. En consecuencia, habrá que analizar en cada caso particular la conveniencia de la forma de programación en términos financieros.

Otro punto a considerar es el riesgo. En la medida que se programa a Fecha Tardía y Última Fecha de Finalización, el proyecto se va haciendo crítico sobre múltiples ramas hacia el final. En esos casos habrá que evaluar una ventaja financiera (en caso de que exista) contra el riesgo de no finalizar el proyecto a término.



### SISTEMAS DE ADMINISTRACIÓN DE PROYECTOS

Existen en el mercado innumerables sistemas para administrar los proyectos. Los paquetes de software comerciales tienden a diluir la distinción que hemos comentado entre PERT y CPM incluyendo opciones inherentes a ambas técnicas. Por ejemplo, algunos de ellos permiten ingresar y visualizar los datos de relaciones entre actividades tanto en la forma Flecha-Actividad como en la Nodo-Actividad, otros incluyen la posibilidad de agregar aleatoriedad a las duraciones de las tareas o de considerarlas determinísticas, etc.

Al seleccionar un software, habrá que considerar la capacidad para efectuar análisis de costos, reducción de actividades y nivelación de recursos, como así también de permitir la inclusión de relaciones diferentes a la F-C convencional.

Podemos mencionar solamente a título de ejemplo a los sistemas PERMASTER (al que se puede acceder a través del sitio de internet "permaster.com"), PRIMAVERA ("primavera.com"), WINQSB (es un sistema de Investigación Operativa, que incluye un módulo de PERT/CPM), PROJECT (de Microsoft), PROJAX (de IBM), etc.