Introducción al Problema Dual de Programación Lineal

	Forma Canónica	Forma Estándar
Función objetivo	$Z = 5.x_1 + 2.x_2 \ (MAX)$	$Z = 5.x_1 + 2.x_2 \ (MAX)$
Condiciones de vínculo R1	$0.x_1 + 1.x_2 \leq 3$	$0.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 = 3$
R2	$4.x_1 + 6.x_2 \leq 24$	$4.x_1 + 6.x_2 + 1.x_4 = 24$
R3	$4.x_1 - 3.x_2 \leq 12$	$4.x_1 - 3.x_2 + 1.x_5 = 12$
Condiciones de no negatividad	$x_1;\ x_2 \geq 0$ y continuas	$x_1;\ x_{2;}\ x_3;\ x_4;\ x_5 \geq 0$ y continuas

PRODUCTOS ← | → RECURSOS

Tabla inicial

			5	2			
Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
0	X3	3	0	1	1	0	0
0	X4	24	4	6	0	1	0
0	X5	12	4	-3	0	0	1
Z=	0		-5	-2	0	0	0

Tabla óptima

Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
5	X1	4,00	1	0	0	0,083	0,167
2	X2	1,33	0	1	0	0,111	-0,111
0	X3	1,67	0	0	1	-0,111	0,111
Z=	22,667		0	0	0	0,639	0,611

Tabla inicial			5	2			
Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
0	X3	3	0	1	1	0	0
0	X4	24	4	6	0	1	0
0	X5	12	4	-3	0	0	1
Z=	0		-5	-2	0	0	0

Tabla óptima

Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
5	X1	4,00	1	0	0	0,083	0,167
2	X2	1,33	0	1	0	0,111	-0,111
0	X3	1,67	0	0	1	-0,111	0,111
Z=	22,667		0	0	0	0,639	0,611

vectores básicos

$$[A]=\begin{array}{ccc} A1 & A2 & A3 \\ \end{array}$$

$$[A]=\left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right|$$

$$[A]^{-1}=\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0,083 & 0,167 \\ 0 & 0,111 & -0,111 \\ 1 & -0,111 & 0,111 \end{array}\right|$$

$$\vec{X} = [A]^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,00 \\ 1,33 \\ 1,67 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_1^*} = [A]^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_4^*} = [A]^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,083 \\ 0,111 \\ -0,111 \end{bmatrix}$$

Valor Marginal de un recurso

$$\vec{X} = [A]^{-1}\vec{B}$$

$$\Delta\vec{X} = [A]^{-1}\Delta\vec{B}$$

Para una variación unitaria de R2

$$\Delta\vec{X} = [A]^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}083\\0{,}111\\-0{,}111\end{bmatrix}$$

$$\Delta Z = 5 \,.\, 0{,}0833 + 2 \,.\, 0{,}111 \;-\; 0 \,.\, 0{,}111 = 0{,}639$$

$$y_2 = \frac{\partial Z}{\partial b_2} = 0{,}639$$

PRODUCTOS ← | → RECURSOS

Tabla inicial			5	2			
Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
0	X3	3	0	1	1	0	0
0	X4	24	4	6	0	1	0
0	X5	12	4	-3	0	0	1
Z=	0		-5	-2	0	0	0

Tabla óptima

Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
5	X1	4,00	1	0	0	0,083	0,167
2	X2	1,33	0	1	0	0,111	-0,111
0	X3	1,67	0	0	1	-0,111	0,111
Z=	22,667		0	0	0	0,639	0,611

$$y_1 = \frac{\partial Z}{\partial b_1} \qquad y_2 = \frac{\partial Z}{\partial b_2} \qquad y_3 = \frac{\partial Z}{\partial b_3}$$

Nuevo Producto

$$\overrightarrow{A_6^*} = [A]^{-1}\overrightarrow{A_6}$$

Al retirar del sistema los recursos necesarios para hacer una unidad de A6, las variables básicas cambian en:

$$\Delta\vec{X} = [A]^{-1}\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}25\\-0{,}00\\-1{,}00\end{bmatrix}$$

Tabla inicial

			5	2				1
Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
0	X3	3	0	1	1	0	0	1
0	X4	24	4	6	0	1	0	1
0	X5	12	4	-3	0	0	1	1
Z=	0		-5	-2	0	0	0	-1

Tabla óptima

Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
5	X1	4,00	1	0	0	0,083	0,167	0,250
2	X2	1,33	0	1	0	0,111	-0,111	0,000
0	X3	1,67	0	0	1	-0,111	0,111	1,000
Z=	22,667		0	0	0	0,639	0,611	0,250

El Costo Marginal del producto A6 es:

$$C_m = \Delta Z = 5\,.(-0{,}25) + 2\,.(-0{,}00) + 0.(-1{,}00) = 1{,}25 = Z_6 = Z_j$$

El Ingreso Marginal es el coeficiente del producto A6 en el funcional: $\boldsymbol{I_m = c_6 = c_j}$ **= 1**

El Costo de Oportunidad de un producto es Costo Marginal – Ingreso Marginal: $\boldsymbol{(Z_j - c_j) = 1,25 - 1 = 0,25}$

El costo marginal del producto A6 Puede calcularse también a partir del valor marginal de los recursos necesarios para producir una unidad de A6.

$$C_m = 1.\,y_1 + 1.\,y_2 + 1.\,y_3$$

$$C_m = 1\,.\,0 + 1\,.\,0{,}639 + 1.\,0{,}611$$

$$C_m = 1{,}250$$

$$I_m = 1$$

Tabla inicial

			5	2				1
Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
0	X3	3	0	1	1	0	0	1
0	X4	24	4	6	0	1	0	1
0	X5	12	4	-3	0	0	1	1
Z=	0		-5	-2	0	0	0	-1

Tabla óptima

Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
5	X1	4,00	1	0	0	0,083	0,167	0,250
2	X2	1,33	0	1	0	0,111	-0,111	0,000
0	X3	1,67	0	0	1	-0,111	0,111	1,000
Z=	22,667		0	0	0	0,639	0,611	0,250

El costo marginal del producto A1 Puede calcularse también a partir del valor marginal de los recursos necesarios para producir una unidad de A1.

$$C_m = 0.\,y_1 + 4.\,y_2 + 4.\,y_3$$

$$C_m = 0\,.\,0 + 4\,.\,0{,}639 + 4.\,0{,}611$$

$$C_m = 5$$

$$I_m = 5$$

Tabla inicial			5	2				1
Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
0	X3	3	0	1	1	0	0	1
0	X4	24	4	6	0	1	0	1
0	X5	12	4	-3	0	0	1	1
Z=	0		-5	-2	0	0	0	-1

Tabla óptima								
Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
5	X1	4,00	1	0	0	0,083	0,167	0,250
2	X2	1,33	0	1	0	0,111	-0,111	0,000
0	X3	1,67	0	0	1	-0,111	0,111	1,000
Z=	22,667		0	0	0	0,639	0,611	0,250

El costo marginal del producto A2 Puede calcularse también a partir del valor marginal de los recursos necesarios para producir una unidad de A2.

$$C_m = 1.y_1 + 6.y_2 - 3.y_3$$

$$C_m = 1 . 0 + 6 . 0{,}639 - 3. 0{,}611$$

$$C_m = 2$$

$$I_m = 2$$

Tabla inicial

			5	2				1
Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
0	X3	3	0	1	1	0	0	1
0	X4	24	4	6	0	1	0	1
0	X5	12	4	-3	0	0	1	1
Z=	0		-5	-2	0	0	0	-1

Tabla óptima

Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
5	X1	4,00	1	0	0	0,083	0,167	0,250
2	X2	1,33	0	1	0	0,111	-0,111	0,000
0	X3	1,67	0	0	1	-0,111	0,111	1,000
Z=	22,667		0	0	0	0,639	0,611	0,250

Condición de óptimo:

1) **Costo Marginal > Ingreso Marginal para aquellos productos que no se producen**
2) **Costo Marginal = Ingreso Marginal para aquellos productos que sí se producen**

Si existe algún producto para el que Costo Marginal < Ingreso Marginal, la situación no es óptima y el funcional puede mejorarse alocando recursos a ese producto hasta igualar Costo Marginal con Ingreso Marginal.

Condición de óptimo: $\boldsymbol{C_m \geq I_m}$ **para cada uno de los productos.**

$$Z = 5.x_1 + 2.x_2 \ \ (MAX)$$

$$0.x_1 + 1.x_2 \leq 3$$

$$4.x_1 + 6.x_2 \leq 24$$

$$4.x_1 - 3.x_2 \leq 12$$

$$x_1;\ x_2 \geq 0$$

$\boldsymbol{C_m \geq I_m}$ **para cada uno de los productos**

Para el producto 1 → $0.y_1 + 4.y_2 + 4.y_3 \geq 5$

Para el producto 2 → $1.y_1 + 6.y_2 - 3.y_3 \geq 2$

Condición de óptimo:

El valor total de los recursos es:

$$W = 3.y_1 + 24.y_2 + 12.y_3$$

En la situación de óptimo, el valor total de los recursos debe ser igual al valor total de los productos fabricados con esos recursos:

$$Z = 5.x_1 + 2.x_2 = W = 3.y_1 + 24.y_2 + 12.y_3$$

Si por un momento pensamos que no se dispone de los recursos para fabricar los productos 1 y 2; y que esos recursos deben ser adquiridos, el total a pagar por los recursos debe ser el mínimo posible:

$$W = 3.y_1 + 24.y_2 + 12.y_3 \qquad (MIN)$$

Problema Directo (Primal)	Problema Dual
$Z = 5.x_1 + 2.x_2 \ (MAX)$	$W = 3.y_1 + 24.y_2 + 12.y_3 \quad (MIN)$
$0.x_1 + 1.x_2 \leq 3$	$0.y_1 + 4.y_2 + 4.y_3 \geq 5$
$4.x_1 + 6.x_2 \leq 24$	$1.y_1 + 6.y_2 - 3.y_3 \geq 2$
$4.x_1 - 3.x_2 \leq 12$	
$x_1;\ x_2 \geq 0$	$y_1;\ y_2;\ y_3 \geq 0$

Problema Directo (Primal)

Variables fuertes (Primal) ← | → Variables Slack (Primal)

Tabla inicial			5	2			
Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
0	X3	3	0	1	1	0	0
0	X4	24	4	6	0	1	0
0	X5	12	4	-3	0	0	1
Z=	0		-5	-2	0	0	0

Tabla óptima							
Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
5	X1	4,00	1	0	0	0,083	0,167
2	X2	1,33	0	1	0	0,111	-0,111
0	X3	1,67	0	0	1	-0,111	0,111
Z=	22,667		0	0	0	0,639	0,611
			↑ y_4	↑ y_5	↑ y_1	↑ y_2	↑ y_3

Variables Slack (Dual) | Variables Fuertes (Dual)

Problema Dual

Variables fuertes (Dual) ← | → Variables Slack (Dual)

Tabla inicial			3	24	12		
C'k	**Yk**	**B**	**A'1**	**A'2**	**A'3**	**A'4**	**A'5**
0	Y4	5	0	4	4	-1	0
0	Y5	2	1	6	-3	0	-1
W=	0		-3	-24	-12	0	0

Tabla óptima							
C'k	**Yk**	**B**	**A'1**	**A'2**	**A'3**	**A'4**	**A'5**
24	Y2	0,639	0,111	1	0	-0,083	-0,111
12	Y3	0,611	-0,111	0	1	-0,167	0,111
W=	22,667		-1,667	0	0	-4,000	-1,333
			↑ $-x_3$	↑ $-x_4$	↑ $-x_5$	↑ $-x_1$	↑ $-x_2$

Variables Fuertes (Primal) | Variables Slack (Primal)

Relaciones Primal / Dual:

Primal	Dual
Solución óptima finita	Solución óptima finita
Solución óptima alternativa	Solución óptima degenerada
Solución óptima degenerada	Solución óptima alternativa
Solución incompatible	Poliedro abierto
Poliedro abierto	Solución incompatible

1	*Primal feasible* Maximize $z = 2x_1 + x_2$, subject to: $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 - x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.	*Dual feasible* Minimize $v = 4y_1 + 2y_2$, subject to: $y_1 + y_2 \geq 2$, $y_1 - y_2 \geq 1$, $y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$.
2	*Primal feasible and unbounded* Maximize $z = 2x_1 + x_2$, subject to: $x_1 - x_2 \leq 4$, $x_1 - x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.	*Dual infeasible* Minimize $v = 4y_1 + 2y_2$, subject to: $y_1 + y_2 \geq 2$, $-y_1 - y_2 \geq 1$, $y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$.
3	*Primal infeasible* Maximize $z = 2x_1 + x_2$, subject to: $-x_1 - x_2 \leq -4$, $x_1 + x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.	*Dual feasible and unbounded* Minimize $v = -4y_1 + 2y_2$, subject to: $-y_1 + y_2 \geq 2$, $-y_1 + y_2 \geq 1$, $y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$.
4	*Primal infeasible* Maximize $z = 2x_1 + x_2$, subject to: $-x_1 + x_2 \leq -4$, $x_1 - x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.	*Dual infeasible* Minimize $v = -4y_1 + 2y_2$, subject to: $-y_1 + y_2 \geq 2$, $y_1 - y_2 \geq 1$, $y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$.

CASO	FORMA	DIRECTO	DUAL	TIPO
1	CANÓNICA	MAX: $C X$ Sujeto a $A X \leq B$ con $X \geq 0$	MIN: $B Y$ Sujeto a $A^T Y \geq C$ con $Y \geq 0$	SIMÉTRICO
2	CANÓNICA	MIN: $C X$ Sujeto a $A X \geq B$ con $X \geq 0$	MAX: $B Y$ Sujeto a $A^T Y \leq C$ con $Y \geq 0$	SIMÉTRICO
3	ESTÁNDAR	MAX: $C X$ Sujeto a $A X = B$ con $X \geq 0$	MIN: $B Y$ Sujeto a $A^T Y \geq C$	ASIMÉTRICO
4	ESTÁNDAR	MIN: $C X$ Sujeto a $A X = B$ con $X \geq 0$	MAX: $B Y$ Sujeto a $A^T Y \leq C$	ASIMÉTRICO