USO DE VARIABLES ENTERAS BINARIAS EN PROGRAMACIÓN LINEAL

Una variable entera binaria es aquella que solamente puede adoptar los valores 0 ó 1. Este tipo de variable se emplea para resolver situaciones del tipo "inclusión" o "exclusión". Las aplicaciones que siguen ejemplifican el uso de estas variables:

1) Lote Mínimo

Condición: Si un determinado producto "A" se fabrica, deben producirse al menos m unidades y como máximo M unidades. Entonces entre las restricciones del problema encontraremos:

$Xa - M\,Ia \quad \leq 0$
$Xa - m\,Ia \quad \geq 0$

La variable Ia es entera binaria y solo puede adoptar los valores 0 ó 1. La variable M es un número cuyo valor es sustancialmente mayor al resto de los valores del modelo o una cota superior para el valor de Xa. El valor m es la cantidad mínima a fabricar de Xa cuando se produce alguna unidad de Xa.
Es decir que Xa puede ser: $Xa = 0$ ó $m \leq Xa \leq M$

Cuando $Ia = 0$ las restricciones se reducen a: $Xa \leq 0$ y $Xa \geq 0$ con lo que $Xa = 0$.
Cuando $Ia = 1$ las restricciones se reducen a $Xa \leq M$ y $Xa \geq m$.

El siguiente es un ejemplo en LINDO de cómo debe incorporarse a un modelo de PL la condición: $X2 = 0$ ó $4000 \leq x2 \leq 10000$.

Max 8 x1 + 5 x2
st
1 x1 + 4 x2 < 32000
4 x1 + 3 x2 < 37000
3 x1 - 2 x2 < 15000
2 x1 + 1 x2 > 4000
x2 - 10000 Ia <0
x2 - 4000 Ia > 0
end
INT Ia El comando INT define a la variable Ia como entera binaria.

2) Exclusión de Alternativas

Se exige que de entre dos o más productos solamente se fabrique uno de ellos. Entre las restricciones del problema encontraremos:

$Xa - M\,Ia \quad \leq 0$
$Xb - M\,Ib \quad \leq 0$

$Ia + Ib = 1$

Las variables Ia e Ib son enteras binarias y solo pueden adoptar los valores 0 ó 1. La variable M es un número cuyo valor es sustancialmente mayor al resto de los valores del modelo o una cota superior para los valores que puedan adoptar Xa y Xb. Como Ia + Ib = 1, Ia e Ib no pueden ser simultáneamente iguales a 1.

Si Ia = 1; entonces $Xa \leq M$ y $Xb = 0$
Si Ib = 1; entonces $Xb \leq M$ y $Xa = 0$

El siguiente es un ejemplo en LINDO de cómo debe incorporarse la condición de exclusión para dos productos.

Max 8 x1 + 5 x2
st
1 x1 + 4 x2 < 32000
4 x1 + 3 x2 < 37000
3 x1 - 2 x2 < 15000
2 x1 + 1 x2 > 4000
x1 - 100000 Ia <0
x2 - 100000 Ib <0
Ia+Ib=1
end
INT Ia
INT Ib

<u>3) Activación de Restricciones</u>

Puede ser de interés que una restricción exista en el modelo si se están produciendo unidades de determinado producto, y que la restricción esté ausente si no se están produciendo unidades de ese producto. Entre las restricciones del problema encontraremos:

$$Xa - M\, Ia \leq 0$$

$$\sum aj\, Xj + M\, Ia \leq M + b$$

Como en los casos anteriores, la ecuación $Xa - M\, Ia \leq 0$ (con Ia binaria y entera) hace que Ia sea igual a 1 solamente cuando Xa es distinto de cero.

Cuando Ia=1 la restricción se reduce a:

$$\sum aj\, Xj \leq b$$

Cuando Ia=0 la restricción queda como:

$$\sum aj\, Xj \leq M + b$$

Siendo M un número muy grande en comparación con el resto de los coeficientes del modelo, la restricción queda en la práctica inactiva.

El siguiente es un ejemplo en LINDO de cómo debe incorporarse la condición de Activación de Restricciones.

Max 8 x1 + 5 x2
st
1 x1 + 4 x2 < 32000
4 x1 + 3 x2 < 37000
3 x1 - 2 x2 + 100000 Ia < 115000
2 x1 + 1 x2 >4000
x2 - 100000 Ia <0
end
INT Ia

<u>4) Costos Fijos</u>

Es posible que existan costos fijos atribuibles a un determinado producto. Es decir, costos que existen si se produce alguna unidad de ese producto y que no existen en caso contrario.
Aquí también puede recurrirse al empleo de variables enteras binarias para modelar la situación.

El funcional deberá incluir una variable entera binaria multiplicando al coeficiente que representa los costos fijos:

$Z = a_1 x_1 + \ldots \mathbf{a_j x_j + CF\, I_j} + \ldots a_n X_n.$

Entre las restricciones encontraremos:

$x_j - M I_j \leq 0$

De esta forma si x_j es mayor que cero se activa I_j adoptando el valor 1 y el coeficiente CF aparecerá en el funcional.

En caso contrario si $x_j = 0$ la variable entera $I_j = 0$ y el coeficiente CF no aparece afectando al funcional.

Daniel Rigou
Notas de clase (septiembre 2005)

Adaptado de: Miranda Miguel, *Programación Lineal y su entorno.* EDUCA 2003.