FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

75.12 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I - 95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMERICOS - 95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA

GUIA DE PROBLEMAS

ERRORES

Ejercicios Requeridos

1. Calcular las siguientes expresiones, incluyendo sus cotas de error absoluto, donde $x = 2{,}00$, $y = 3{,}00$ y $z = 4{,}00$ (estos valores están correctamente redondeados):

a) $3\,x + y - z$ b) $x\,y\,/\,z$ c) x sen $(y\,/\,40)$

2. Calcular la siguiente expresión, incluyendo su cota de error absoluto:

$$w = x\,y^2\,/\,z$$

donde $x = 2{,}0 \pm 0{,}1$, $y = 3{,}0 \pm 0{,}2$ y $z = 1{,}0 \pm 0{,}1$. Indicar qué variable tiene mayor incidencia en el error en w.

3. ¿Con cuántos decimales significativos hay que tomar a π y e en las siguientes expresiones para que el resultado tenga tres decimales significativos?:

a) $1{,}3134\,\pi$ b) $0{,}3761\,e$ c) $\pi\,e$

4. Se tienen las siguientes expresiones algebraicamente equivalentes:

i) $f = (2^{½} - 1)^6$
ii) $f = 1/(2^{½} + 1)^6$
iii) $f = (3 - 2*2^{½})^3$
iv) $f = 1/(3 + 2*2^{½})^3$
v) $f = (99 - 70*2^{½})$
vi) $f = 1/(99 + 70*2^{½})$

a) Demostrar que, efectivamente, son algebraicamente equivalentes.

b) Utilizando el valor aproximado 1,4 para la raíz cuadrada de 2, indicar qué alternativa proporciona el mejor resultado.

5. Se tiene la expresión $y = \ln [x - (x^2 - 1)^{½}]$

a) Calcular y para $x = 30$, incluyendo su error absoluto. Suponer que la raíz cuadrada se conoce con 6 decimales correctos y que el error en x es despreciable.

b) Obtener una expresión matemáticamente equivalente a la anterior, pero mejor condicionada desde el punto de vista numérico, y re-calcular el resultado con el nuevo error.

6. Se realizan observaciones de un satélite para determinar su velocidad. En la primera observación la distancia al satélite es $L = 30.000 \pm 10$ km. Luego de 5 segundos (medido con 4 dígitos de precisión) la distancia radial ha aumentado en $\rho = 125 \pm 0{,}5$ km y el cambio en la orientación ha sido $\varnothing = 0{,}00750 \pm 0{,}00002$ radianes. Calcular la velocidad del satélite, incluyendo su error, suponiendo que el mismo se mueve en línea recta y a velocidad constante durante ese intervalo de tiempo.

7. En una computadora, una celda de memoria tiene 2 posiciones binarias para almacenar los signos de la mantisa y del exponente, 11 posiciones decimales para la mantisa y 3 posiciones decimales para el exponente. Por ejemplo, el número π se almacena de la siguiente forma: +31415926536+001. Indicar cómo se almacenan los números:

a) 2,7182818285 b) -1073741824 c) 0,577216 d) -123E-45

Indicar cuál es la cota de error relativo que tiene un número almacenado según esta representación.

8. Determinar las cotas para los errores relativos de v y w (que son dos expresiones algebraicamente equivalentes) en los siguientes casos, utilizando la gráfica de proceso:

a) $v = a+a$, $w = 2a$ b) $v = a+a+a$, $w = 3a$

Suponer que a es positivo y que los números *2* y *3* tienen una representación exacta en la computadora. Comparar los resultados de las dos expresiones y extraer conclusiones. Calcular dichos errores para $a = 0{,}6992$ (correctamente redondeado), redondeando a 4 dígitos luego de cada operación aritmética.

9. Considerar las expresiones $v = (a-b) / c$ y $w = (a/c) - (b/c)$. Suponer que a, b y c son positivos, sin errores de entrada y que a es aproximadamente igual a b.

a) Demostrar que el error relativo por redondeo en w puede ser mucho mayor que el mismo error en v.

b) Calcular dichos errores para a = 0,41, b = 0,36 y c = 0,70, utilizando aritmética de punto flotante con 2 dígitos de precisión.

10. Mostrar en los siguientes cálculos que, trabajando en punto flotante con una precisión de 5 dígitos, no valen las leyes asociativa y distributiva. Usar redondeo simétrico.

$$0{,}98765 + 0{,}012424 - 0{,}0065432 \quad , \quad (4{,}2832 - 4{,}2821) * 5{,}7632$$

11. Evaluar el polinomio $P(x) = x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 0{,}149$ en $x = 4{,}71$ utilizando aritmética de punto flotante de 3 dígitos con redondeo truncado. Evaluarlo luego usando la expresión alternativa $P(x) = ((x - 6)\,x + 3)\,x - 0{,}149$ (denominada Esquema de Horner). Comparar con el resultado exacto y sacar conclusiones. Repetir el ejercicio con redondeo simétrico.

12. Sumar los siguientes números de menor a mayor y luego de mayor a menor utilizando aritmética de punto flotante con 4 dígitos de precisión. Comparar con el resultado exacto y obtener conclusiones.

0,2897	0,4976	0,2488*10	0,7259*10	$0{,}1638*10^2$
$0{,}6249*10^2$	$0{,}2162*10^3$	$0{,}5233*10^3$	$0{,}1403*10^4$	$0{,}5291*10^4$

13. Calcular $v^2 - w^2$ usando aritmética de punto flotante de 4 dígitos de precisión, con v = 43,21 y w = 43,11. Utilizar los siguientes algoritmos, indicar cuál es más conveniente y justificar.:

a) $(v * v) - (w * w)$ b) $(v + w) * (v - w)$

14. Investigar la estabilidad numérica en el cálculo de:

$$x = 1/(1+2*a) - (1-a)/(1+a) \quad , \quad \text{siendo } |a| << 1$$

La secuencia de operaciones es:

$\varepsilon_1 = a$, $\varepsilon_2 = 1+2*\varepsilon_1$, $\varepsilon_3 = 1/\varepsilon_2$, $\varepsilon_4 = 1-\varepsilon_1$, $\varepsilon_5 = 1+\varepsilon_1$, $\varepsilon_6 = \varepsilon_4/\varepsilon_5$, $\varepsilon_7 = \varepsilon_3-\varepsilon_6$, $x = \varepsilon_7$

Cambiar la secuencia de operaciones de modo que resulte un algoritmo más estable que el anterior.

15. Indicar cuál de los siguientes algoritmos es más estable numéricamente para calcular la menor raíz de la ecuación $x^2 - 2x + a = 0$, con $0 < a << 1$.

a)	$\varepsilon_1 = 1 - a$	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1^{1/2}$	$x = \varepsilon_3 = 1 - \varepsilon_2$	
b)	$\varepsilon_1 = 1 - a$	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1^{1/2}$	$\varepsilon_3 = 1 + \varepsilon_2$	$x = \varepsilon_4 = a/\varepsilon_3$

16. Se desea evaluar la derivada de la función $f(x)$ en el punto x_1, pero sólo se dispone de valores de f sobre un conjunto discreto de puntos. Se utiliza la siguiente estimación:

$$D = [f(x_2) - f(x_1)] / [x_2 - x_1]$$

a) Suponiendo que x_2-x_1 es pequeño, obtener una estimación del error de truncamiento cometido. Para ello, desarrollar $f(x_2)$ en serie de Taylor alrededor de x_1.

b) Suponiendo que los valores de $f(x_2)$ y $f(x_1)$ se redondean de tal forma que sus errores relativos son r_2 y r_1 , respectivamente, obtener una estimación del error en D por el redondeo durante las operaciones. Para ello utilizar la gráfica de proceso, sin considerar errores en x_1 y x_2.

c) Estimar el error en D debido a errores de entrada $\delta x2$ y $\delta x1$ en x2 y x1, respectivamente. Para ello utilizar

17. La fórmula $f_0 = [4\,(f_{-1} + f_1) - (f_{-2} + f_2)] / 6$ permite interpolar el valor de la función f en $x = 0$ conociendo sus valores en $x_{-2} = -2$, $x_{-1} = -1$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

a) Estimar, mediante la gráfica de proceso, los errores en f_0 debido al redondeo de los valores de la tabla de *f* y al redondeo durante los cálculos.

b) Suponiendo que la función *f* es par y que f_1 y f_2 son del mismo orden, y utilizando el resultado del punto a, obtener una condición que garantice que el error debido al redondeo en los cálculos sea despreciable.

18. Se desea evaluar $z = \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$, donde $\alpha_1 = 1{,}345 \pm 0{,}0005$ y $\alpha_2 = 1{,}352 \pm 0{,}0005$, ambos medidos en radianes. Los cálculos se efectúan con 7 dígitos de precisión. El valor del coseno se obtiene de una tabla con 5 decimales significativos. Se pide:

a) Calcular z y efectuar una estimación de la cota de error mediante la gráfica de proceso. Identificar la principal fuente de error.

b) Repetir el cálculo anterior utilizando el algoritmo alternativo.

$$z = \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_1$$

Explicar cuál de los dos algoritmos es mejor y justificar.

19. Se dispone de un algoritmo que arroja un valor de y= 0,0278, cuando se le ingresa un dato de entrada x=0,15. Si se recalcula utilizando un valor perturbado de x=0,20, se obtiene el resultado y=0,0254.

a) Calcular el CP del problema. ¿El problema está bien condicionado? Si lo está, ¿eso qué implica?

b) Calcular el factor de amplificación de error absoluto de entrada.

c) Si la cota de error de entrada para x=0,15 es ± 0,01, estimar el error en “y”, y expresar el resultado correctamente.

d) Si se duplica la precisión y se recalcula usando el valor de x=0,15, se obtiene y=0,0278264. Calcular el factor global de amplificación de errores de redondeo, y responder si el algoritmo está bien condicionado.

20. Se cuenta con tres algoritmos algebraicamente equivalentes (f_1, f_2, f_3) para $x = \sqrt{2}$, a los que se les ingresó como dato de entrada un valor de x=1,4 y luego un valor perturbado x=1,41.

x	**f1**	**f2**	**f3**

1,40	0,00800	0,00523	0,00410
1,41	0,00583	0,00510	0,00475

Considerando solo la propagación de errores de entrada, ¿cuál de los tres algoritmos resulta más conveniente? Compare con las tres primeras expresiones del ejercicio 4, respectivamente.

21. Se cuenta con un algoritmo para aproximar valores de la función sen(x). El dato de entrada es x=0,7853 y el resultado que se obtiene y=0,7070. Si se aplican dos perturbaciones de +1% y -1% al dato de entrada, se obtienen y=0,7075 e y=0,7064 respectivamente.

a) Calcular el Cp. ¿Es estable el problema?

b) Si se aumenta la precisión a 8 dígitos utilizando redondeo truncado, para el dato de entrada x=0,7853 se obtiene y=0,70703736. Calcular el factor global de amplificación de errores de redondeo y el número de condición del algoritmo. ¿Es estable el algoritmo?

c) ¿De qué otra forma podría comprobar experimentalmente la estabilidad del problema?

Ejercicios Adicionales

A.1) Se dispone de un algoritmo para computar la siguiente integral:

$$I(a,b) = \int_0^1 e^{\frac{-b.x}{(a+x^2)}}\,dx$$

Utilizando dicho algoritmo se obtuvo la siguiente tabla de resultados:

a	b	I
0,39	0,34	1,425032
0,40	0,32	1,408845
0,40	0,34	1,398464
0,40	0,36	1,388198
0,41	0,34	1,372950

Ahora bien, se midieron las cantidades físicas z e y, obteniéndose:

$z = 0{,}400 \pm 0{,}003$ $\qquad\qquad$ $y = 0{,}340 \pm 0{,}005$

Estimar el error en *I(z,y)* y expresar el resultado final.

A.2) Dado el siguiente algoritmo, se requiere conocer el error absoluto del resultado debido a la propagación de los errores de entrada

$$f(x, y, z) = (x^3 + 2y)/z$$

a) Determinar la expresión del error en *f* debido a los errores de entrada de x, y, z.

b) Calcular el error absoluto en *f* siendo x: 0,387; y: 4,21; z: 0,0917, y sabiendo que los valores están correctamente redondeados.

c) Calcular el número de condición del problema y explicar los resultados obtenidos.

A.3) Luego de ser abordado su carguero espacial por partidarios de la Primera Orden, Han Solo escapa en el Halcón Milenario a velocidad constante. La Primera Orden detecta la nave en fuga cuando se encuentra a $1\ 10^7$ km de distancia del carguero. En esa situación el reloj del Halcón Milenario indica 25 segundos desde el despegue. La transformación de coordenadas siguiente indica la relación entre variables medidas en ambas naves espaciales:

$$x = \gamma(x' + ut') \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad c = 3.10^8 m/s \qquad (1)$$

Notación: *u*=velocidad, *x*=distancia, *t*=tiempo. Variables primadas para mediciones en el Halcón Milenario y variables sin primar para mediciones en el carguero abordado

En la galaxia donde usted resuelve este problema, se conoce la fórmula para hallar las raíces de una ecuación cuadrática. Se la aplicará para encontrar la velocidad en la ecuación (1).

a) Construya un algoritmo para ello, indicando claramente los pasos seguidos.

b) Determine el factor global de amplificación de errores de redondeo de su algoritmo.

c) Indique que precisión debería usar en su calculadora si se desea hallar la velocidad *u* con un error del 1%.

d) Calcule la velocidad y escriba correctamente el resultado.

<u>Ayuda:</u> El Halcón Milenario ha ganado la carrera Kessel, pero se considera aquí que viaja a velocidad sub-luz $c/2<u<c$.