75.12 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I - 95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMERICOS - 95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA

GUÍA DE PROBLEMAS

ECUACIONES NO LINEALES

Ejercicios Requeridos

1- Las siguientes ecuaciones tienen una raíz en el intervalo (0, 1,6). Determinarlas con un error menor que 0,02 por el método de bisección.

a) $x \cdot \cos(x) = \ln(x)$ b) $2 \cdot x - e^{-x} = 0$ c) $e^{-2 \cdot x} = 1 - x$

2- Sea $F(x) = \frac{x^2}{4} - sen(x)$. Se desea encontrar la primera raíz positiva de F(x).

a) Hallar un intervalo de partida para utilizar el método de bisección.
b) Estimar el número de aproximaciones necesarias para hallar la raíz con una tolerancia para el error absoluto de 0,02. Calcular la raíz.
c) Si la tolerancia de 0,02 es sobre el error relativo, cuántas aproximaciones se requieren?
d) Sabiendo que la raíz buscada a 5 decimales correctos es α=1,93375 obtener conclusiones sobre la performance del método.
e) Estimar el orden de convergencia en forma experimental.

3- Utilizar el método de Regula-Falsi para hallar la raíz del ejercicio 2. Realice varias aproximaciones, con el objeto de poder estimar experimentalmente el orden de convergencia del método. Compare sus resultados con los del ej. 2.

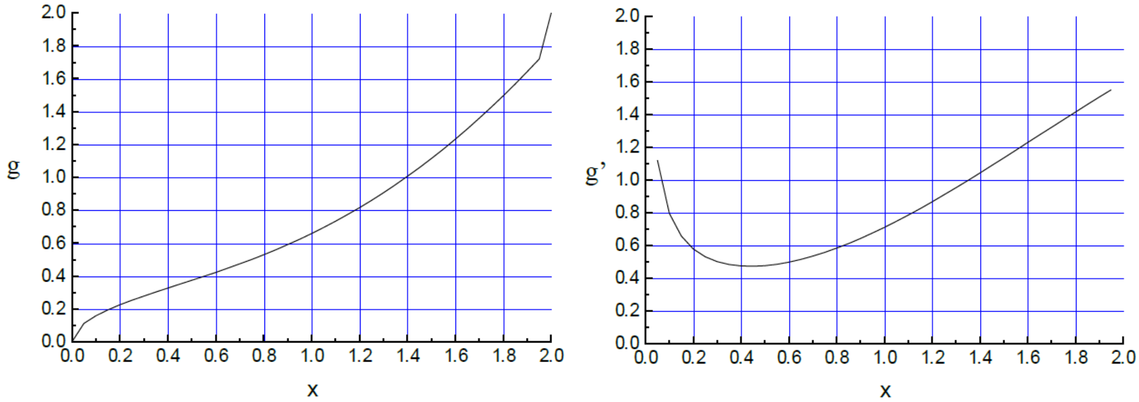
4- Programar en pseudolenguaje un algoritmo para hallar una raíz de una función. Comenzar con el método de bisección hasta alcanzar cierta tolerancia y luego continuar automáticamente con el método de la secante, hasta la precisión requerida.

5- El método de Regula-Falsi para obtener la raíz de una ecuación es análogo al método de la secante, salvo que, en todo momento, se trabaja con los 2 últimos valores entre los cuales está comprendida la raíz. Programarlo.

6- La función $F(x) = sen(x) - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ tiene 2 ceros en I=[0,2]. Uno es x=0; se desea hallar el otro.

Para ello se utilizará un método de punto fijo basado en la función de iteración g(x) = x – F(x) . Las figuras muestran g y g’ en I.

a) Hallar, mediante justificación teórica, un intervalo que contenga al cero buscado como único cero de F(x). Mostrar que en dicho intervalo el método propuesto converge.
b) Hallar el cero con una tolerancia del 1% para el error relativo entre 2 pasos consecutivos.
c) Hallar el orden de convergencia del método y la constante asintótica del error.



7- Se desea hallar la primera raíz positiva de la ecuación x=cos(x) con el método de Newton-Raphson.

a) Plantee el método para el problema de punto fijo planteado.
b) Estudie las propiedades de convergencia del método propuesto. Encuentre explícitamente un intervalo de convergencia.
c) Encuentre el cero buscado con una tolerancia para el error relativo del 10^{-10}.
d) Estime en forma experimental el orden de convergencia del método.

8- Estudiar la convergencia del método de Newton-Raphson aplicado a la ecuación $x^2 - 1 = 0$. Elegir $x_0=2$ como valor inicial y calcular aproximaciones de la raíz con precisión sucesivamente creciente.

9- La raíz real r de la ecuación $x^3 = x + 4$ puede ser escrita en la forma:

$$r = \left(2 + \frac{1}{9}.321^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2 + \frac{1}{9}.321^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

a) Calcular r con 4 decimales significativos, utilizando la expresión.
b) Recalcular r con la misma precisión por el método de Newton con $x_0=2$.
c) Comparar los resultados anteriores y obtener conclusiones.

10- Determinar la raíz no nula de la ecuación $x = 1 - e^{-2x}$, con el método de Newton-Raphson con 4 decimales significativos.

11- Determinar una raíz de la ecuación x.ln(x)-1=0, con el método de Newton Raphson con 5 decimales significativos.

12- Aplicar el método de Newton-Raphson para determinar una raíz compleja de la ecuación $x^2 + 1 = 0$; comenzar las iteraciones con $x_0=1+i$.

13- Obtener una fórmula iterativa de Newton-Raphson para hallar la raíz cúbica de un número positivo c.

14- Obtener una fórmula iterativa de Newton-Raphson para hallar el arcsen(a), siendo dato el valor de a. Determinar arcsen(0,5) con 3 dígitos significativos.

15- Sea la ecuación $F(x)= x^3 - 9\cdot x^2 + 24\cdot x - 20 = 0$.

a) Aplicar el método de Newton-Raphson con x_0=1,5. Detener el proceso cuando se obtengan 2 decimales significativos.
b) Aplicar el método de Newton-Raphson para el caso de raíces múltiples y las mismas condiciones del punto.

16- Hallar la raíz de la función $F(x)= 1.5 - \ln(1+ x^2)$, utilizando el método de Newton-Raphson. Utilizar aritmética de punto flotante con 5 dígitos de precisión para las operaciones y redondear el logaritmo a 4 dígitos significativos. Estimar el error de redondeo, determinando cuál es la fuente que más contribuye a este error. Tener en cuenta que este error proviene básicamente de la evaluación de f(x).

17- Hallar todos los ceros del polinomio $p(x) = x^3 - 9\cdot x^2 + 12$, con una precisión igual a 4 dígitos, utilizando el método de Newton-Raphson. Verificar que todos los dígitos obtenidos son significativos, en el sentido de que el error de truncamiento solo puede afectar más allá del cuarto dígito.

18- Mostrar que la aplicación del método de Newton-Raphson para hallar la raíz de la función $F(x) = e^x - x - 1$ produce convergencia lineal. Partir x_0=1. Indicar cuál es el comportamiento esperado a priori, a qué se puede deber el comportamiento observado y cómo lo corregiría.

19- Suponer que se quiere evaluar el logaritmo natural de un número a, pero la máquina de que se dispone no lo provee, aunque sí tiene implementada la función exponencial. Proponer un método para calcular ln(a) y evaluarlo utilizando aritmética de punto flotante con 4 dígitos de precisión, para a=1,2.

20- Hallar la raíz negativa de la función $F(x) = x^2 - x - 2$, utilizando el método de Newton-Raphson y aritmética de punto flotante con 4 dígitos de precisión. Estimar el error de redondeo que se comete en cada iteración. Expresar la solución final junto con su error.

21- Se desea hallar la raíz de la función $F(x) = \sin(x)$ que se encuentra en el intervalo $3 < x < 3{,}3$ con una precisión de 6 dígitos significativos.

a) Utilizar el método de Newton-Raphson partiendo de x_0=3. Suponer que F(x) y F´(x) solo se conocen con una precisión de 4 decimales significativos.Demostrar a partir de la gráfica de proceso, cómo el error de redondeo en los valores de F(x) y
F'(x) impide obtener la precisión requerida. Comparar el error en la raíz estimado de este modo, con el error "exacto" obtenido comparando el resultado con el valor de la raíz exacta.

22- Se desea hallar la raíz positiva con 6 dígitos de precisión de la siguiente función:

$F(x) = x^3 - 1{,}9\cdot x^2 - 1{,}05\cdot x + 2{,}745$

a) Utilizar el método de Newton Raphson. Partir de x_0=1 y no superar las 10 iteraciones. Verificar que la convergencia es lineal. Explicar la causa de esta observación.
b) Proponer y utilizar una modificación del método para alcanzar la convergencia cuadrática.

23- Se desea hallar la raíz de la función:

$F(x) = x^4 - 14{,}564 \cdot x + 16{,}804$

a) Utilizar el método de Newton Raphson, con 6 dígitos de precisión. Obtener convergencia a 3 dígitos. Tomar $x_0=1{,}4$.

b) Mostrar que la velocidad de convergencia no es cuadrática. Determinar dicho orden y dar una explicación sobre la causa de la pérdida de velocidad de convergencia.

c) Mostrar que los cálculos con la fórmula iterativa:

$$x^{k+1} = x^k - q.\frac{F(x^k)}{F'(x^k)}$$

tomando q=1,9, convergen más rápidamente.

d) Dar una interpretación al parámetro q.

24- El método de la secante para resolver el problema de punto fijo F(x)=0 consiste en utilizar la aproximación

$$F'(x_k) \approx \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

en la fórmula correspondiente del método de Newton-Raphson.

a) Aplique el método de la secante para hallar la raíz no nula de

$$F(x) = \frac{x^2}{4} - sen(x)$$

con una tolerancia del 0,1%.

b) Encuentre experimentalmente el orden de convergencia del método y compárelo con el de Newton-Raphson.

25- Determinar las raíces de las siguientes ecuaciones con el método de la secante con 5 decimales significativos:

a) $2 \cdot x = e^{-x}$

b) $\tan(x) + \cos(h \cdot x) = 0$

Ejercicios Adicionales

A.1) Cuál de los siguientes algoritmos converge al valor indicado α? Si lo hace, determinar el orden de convergencia experimentalmente.

$$x_{k+1} = -16 + 6x_k + \frac{12}{x_k} \qquad \alpha = 2$$

$$x_{k+1} = \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{{x_k}^2} \qquad \alpha = 3^{1/3}$$

$$x_{k+1} = \frac{12}{1 + x_k} \qquad \alpha = 3$$

A.2) Dada la siguiente ENL, se desea resolverla por el método de Newton Raphson

$$2x^3 + \frac{2}{x} - 298 = 0$$

a) Calcule la raíz utilizando un valor de arranque x=4 e itere hasta lograr un error relativo menor a 1%.

b) Estime experimentalmente el orden de convergencia del método. Exprese el resultado y su error correctamente

A.3) Luego de ser abordado su carguero espacial por partidarios de la Primera Orden, Han Solo escapa en el Halcón Milenario a velocidad constante. La Primera Orden detecta la nave en fuga cuando se encuentra a $1\ 10^7$ km de distancia del carguero. En esa situación el reloj del Halcón Milenario indica 25 segundos desde el despegue. La transformación de coordenadas siguiente indica la relación entre variables medidas en ambas naves espaciales:

$$x = \gamma(x' + ut') \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad c = 3.10^8\ m/s \qquad (1)$$

En esa galaxia (muy, muy lejana) no se conoce la fórmula para hallar las raíces de una ecuación cuadrática, por lo que se aplicará el método de NR. Determine la velocidad del Halcón Milenario con una precisión de al menos 1%. Escriba correctamente el resultado.

Notación: u=velocidad, x=distancia, t=tiempo. Variables primadas para mediciones en el Halcón Milenario y variables sin primar para mediciones en el carguero abordado.
Ayuda: El Halcón Milenario ha ganado la carrera Kessel, pero se considera aquí que viaja a velocidad sub-luz $c/2<u<c$.

A.4) Ruleta magnética (no la ponga en práctica en Las Vegas…): Una espira conductora sumergida en un campo magnético gira hasta que se satisface la relación:

$$\theta - \frac{1}{2}\ sen(2\theta) = \frac{\pi}{2}$$

donde θ está medido en radianes. Se desea determinar el valor de θ empleando el método de Newton-Raphson.

a) Obtener un intervalo en el cual se encuentre la solución y en el que se pueda garantizar (**mediante justificación teórica**) la convergencia del método propuesto.

b) Calcular el ángulo de detención, o sea el valor de θ que satisface la ecuación no lineal, con un error relativo inferior a 0,01.

c) Analizar el tipo de convergencia observado tanto desde el punto de vista experimental como teórico.

A.5) Por un conducto cilíndrico circula un fluido a alta temperatura (T_{int}). La pared del conducto tiene espesor L y conductividad k. Si T_{ext} es la temperatura ambiente, en condiciones estacionarias la temperatura de la superficie externa del conducto (T_p) puede calcularse igualando los flujos de calor por conducción, convección y radiación, resultando:

$$\frac{T_{int} - T_p}{L/k} = 1{,}464\left(T_p - T_{ext}\right)^{5/4} + 0{,}2954\left\{\left(\frac{T_p + 273}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{ext} + 273}{100}\right)^4\right\}$$

a) Utilizando apropiadamente el método de la secante, encontrar la temperatura de la superficie externa del conducto con una precisión de 1 ºC. Escribir correctamente el resultado numérico del problema.

b) Hallar experimentalmente el orden de convergencia del método utilizado. ¿Es esperable el valor obtenido? Justificar.

Datos: L=0,15; k=0,175; T_{int}=1200; T_{ext}=30.

A.6) Dada la profundidad h y el período T de una ola, su longitud de onda l surge de la relación de dispersión $w^2 = g\ .\ k\ .\ tanh(k\ .\ h)$, donde $w=(2.\pi)/T$ es la pulsación, g es la aceleración de la gravedad y $k = (2\cdot\pi)\ l$ es el número de onda. Conociendo $g = 9.8 m\, s^2$ y $h = 4m$, se desea calcular cuál es la longitud de onda correspondiente a una ola con $T = 5seg$.

a) Utilizar un método de punto fijo para calcular la solución con 1 dígito de precisión, partiendo de k=1.

b) Utilizar el método de Newton Raphson para calcular la solución con 4 dígitos de precisión. Partir del resultado obtenido en a).

c) Escribir en pseudolenguaje un algoritmo que efectúe los cálculos desarrollados en a) y b).

A.7) La concentración de saturación de oxígeno disuelto en agua dulce se calcula con la ecuación

$$ln\ O_s = -139{,}34411 + \frac{1{,}575701.\,10^5}{T_a} - \frac{6{,}642308.\,10^7}{{T_a}^2} + \frac{1{,}243800.\,10^{10}}{{T_a}^3} - \frac{8{,}621949.\,10^{11}}{{T_a}^4}$$

donde O_s=concentración de saturación de oxígeno disuelto en agua dulce a 1 atm [mg/l] y T_a= temperatura absoluta [K]. Para aguas naturales comunes en climas templados, la ecuación se usa para determinar que la concentración de oxigeno varia de 14,621 mg/L a 0°C a 6,413 mg/L a 40°C.

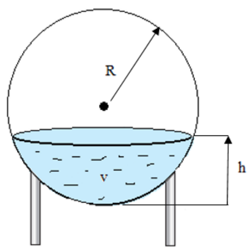
a- Si los valores iniciales son de 0 y 40°C, usando el método de Bisección ¿cuantas iteraciones se requerirían para determinar la temperatura con un error absoluto de 0,05°C?
b- A que temperatura la concentración de oxígeno en agua será de 8,10mg/L considerando un error absoluto de 0,05°C? y para 12,00 mg/L?
c- Compare el número de iteraciones que necesitó para cumplir la consigna b), con el calculado analíticamente en el inciso a). Sacar conclusiones.

Obs: Recordar que $T_a[K] = 273{,}15 + T[°C]$

A.8) Suponga que tiene que diseñar un tanque esférico de almacenamiento de agua potable. El volumen de líquido que puede contener se calcula con:

$$V = \pi h^2 \frac{3\,R - h}{3}$$

donde V=volumen [m^3], h=profundidad del agua en el tanque [m] y R=radio del tanque [m].



a. Si R=3m, a qué profundidad debe llenar el tanque para contener 30m^3 con una precisión de al menos 0,01%? Resuelva usando método de Bisección y Regula Falsi, expresando correctamente el resultado.

i. Determinar experimentalmente el orden de convergencia de cada método.

ii. Graficar el error de cada iteración en función del error del paso anterior para cada método. Obtener información sobre la velocidad de convergencia. Sacar conclusiones.
iii. Graficar el error en función del número de iteración. Sacar conclusiones.

b. Resolver por el método de Newton Raphson. Expresar correctamente el resultado.
   i. Determinar experimentalmente un intervalo de convergencia.
   ii. El intervalo del inciso i. cumple con las condiciones de convergencia? Realizar el análisis teórico y garantizar el cumplimiento.
   iii. Determinar experimentalmente el orden de convergencia.
   iv. Graficar al igual que en los incisos a)i, ii y comparar los tres métodos. Sacar conclusiones.
   v. Calcular experimentalmente la constante asintótica del error.