FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

75.12 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I - 95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMERICOS - 95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA

GUÍA DE PROBLEMAS

APROXIMACION DE FUNCIONES: AJUSTE

Ejercicios Requeridos

1- Determinar las líneas rectas que aproximen la curva $y = e^x$, según los siguientes métodos y comparar los resultados obtenidos:

a) Cuadrados mínimos sobre la malla $(-1 \quad -0.5 \quad 0 \quad 0.5 \; 1)$.

b) Tomando la línea tangente a $y = e^x$ en el punto medio del intervalo $(0 \quad 1)$, es decir, aproximación de Taylor en el punto medio del intervalo $(-1 \quad 1)$.

Calcular los errores en x=1. Utilizar 3 decimales.

2- El nivel de agua en el Mar del Norte está determinado principalmente por la marea llamada M2, cuyo período es de aproximadamente 12 horas. Se han realizado las siguientes mediciones:

t(horas)	0	2	4	6	8	10
H(t)(m)	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

a) Ajustar la serie de mediciones usando el método de los cuadrados mínimos y la función

$$H_1^*(t) = h_o + a_1 \,.\sin\left(\frac{2\,\pi\,t}{12}\right)$$

b) Calcular errores que permitan estimar la precisión de la aproximación realizada en a)

c) Utilizar ahora la función

$$H_2^*(t) = h_o + a_1 \,.\sin\left(\frac{2\,\pi\,t}{12}\right) + a_2 \,.\cos\left(\frac{2\,\pi\,t}{12}\right)$$

d) Repetir b) para la nueva función aproximante. Comparar. Obtener conclusiones.

3- Se tiene la siguiente tabla de datos :

x	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
y	3.8	3.7	4.0	3.9	4.3	4.2	4.2	4.4	4.5	4.5

a) Encontrar una función lineal que aproxime estos datos por cuadrados mínimos. Utilizar esta curva para suavizar los datos.

b) Repetir el punto anterior con una función cuadrática.

c) Comparar los resultados.

4- Obtener una fórmula del tipo $P(x) = a \cdot e^{m \cdot x}$ a partir de los datos que siguen:

x	1	2	3	4
y	7	11	17	27

5- Dada la siguiente colección de datos, elegir la curva de aproximación y analizar los errores respecto de los valores dados.

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

6- Construir las aproximaciones indicadas, calcular los errores y obtener conclusiones.

a) Aproximación polinómica de grado 1.
b) Aproximación polinómica de grado 2.
c) Aproximación polinómica de grado 3.
d) Aproximación de la forma $b \cdot e^{a \cdot x}$.
e) Aproximación de la forma $b \cdot x^{a}$.

6.1)

x	y
4.0	102.56
4.2	113.18
4.5	130.11
4.7	142.05
5.1	167.53
5.5	195.14
5.9	224.87
6.3	256.73
6.8	299.50
7.1	326.72

6.2)

x	y
0.2	0.050446
0.3	0.098426
0.6	0.332770
0.9	0.726600
1.1	1.097200
1.3	1.569700
1.4	1.848700
1.6	2.501500

7- Para 5 instantes de tiempo se observaron los siguientes valores de un parámetro físico

t	-2	-1	0	1	2
u	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2

Mostrar que, si los datos se ajustan con una parábola $\psi(t)$, la aproximación en t=0 es:

$$\psi(0) = \frac{1}{35}\left\{-3u_{-2} \ +12u_{-1} \ +17u_0 \ +12u_1 + -3u_2\right\}$$

8- Hallar el polinomio aproximante de segundo grado para la función $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ en el intervalo $\left[0\ 1\right]$. Graficar la función y su aproximación. Analizar los errores.

9- Encontrar la aproximación polinómica de grado 1 y 2 de $f(x)$ en el intervalo indicado.

a)	$f(x) = x^2 - 2 \cdot x + 3$	[0 1]	d)	$f(x) = x^3 - 1$	[0 2]
b)	$f(x) = 1/x$	[1 3]	e)	$f(x) = e^x$	[0 1]
c)	$f(x) = \cos(\pi \cdot x)$	[0 1]	f)	$f(x) = \ln(x)$	[1 2]

Ejercicios Adicionales

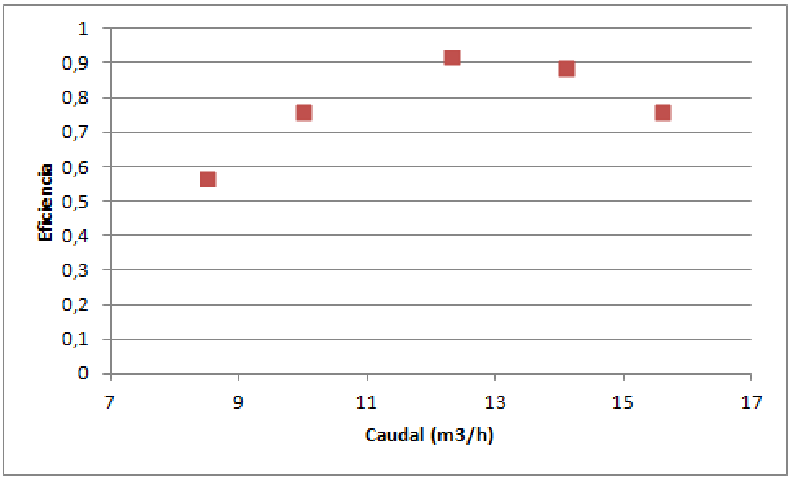
A1) El secado de una muestra de barro arrojó los siguientes valores, expresados como pérdida de peso por evaporación de la humedad:

Tiempo (seg)	75	95	120	160	190	220	250	280	330
Pérdida (%)	19.6	20.2	20.7	22.9	23.6	26	28.1	29.1	31.2

Se desea hallar la relación de pérdida (P) en función del tiempo (t), para lo cual se propone utilizar la ley $P = At^B$. Utilizando el método de cuadrados mínimos, determinar los valores de A y B.

A2) Se desea encontrar una expresión matemática que represente la curva de carga de una bomba centrífuga (Eficiencia en función del caudal impulsado):

Caudal (m^3/h)	8.50	10.0	12.3	14.1	15.6
Eficiencia	0.570	0.760	0.920	0.890	0.760



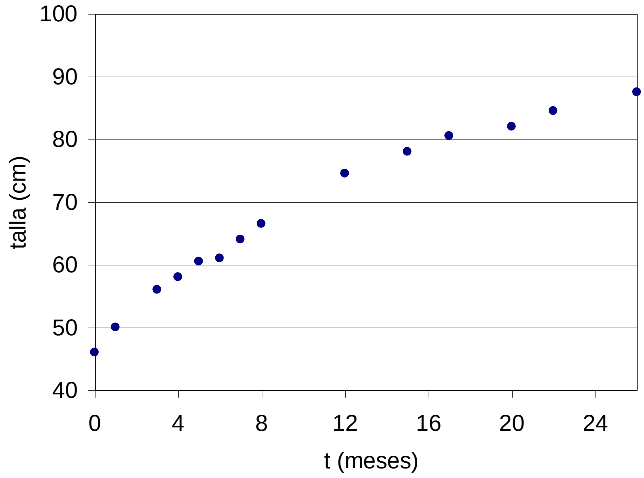
a) Seleccione la función de ajuste que considere más adecuada según la nube de puntos dada:

i) $f^*(x) = c_0 \, e^{c_1 x}$ ii) $f^*(x) = c_0 + c_1 x$ iii) $f^*(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

b) Plantee el ajuste con la función seleccionada y exprese el sistema resultante.
c) Indique como quedaría el sistema si la función de ajuste formase una base ortogonal en la nube de puntos dada.

A3) La tabla y figura siguientes muestran la evolución de la talla de un niño en sus primeros 26 meses de vida.

Tiempo (mes)	0	1	3	4	5	6	7	8	12	15	17	20	22	26
Talla (cm)	46	50	56	58	60.5	61	64	66.5	74.5	78	80.5	82	84.5	87.5



a) Utilizando el método de cuadrados mínimos, ajustar los datos anteriores utilizando la siguiente expresión: $h(t) = h_0 + at^P$, donde h_0 es la talla al momento del nacimiento (t=0).

b) Se calcula que la talla de adulto es el doble de la talla a los 2 años de vida. Estimar la talla de adulto prevista.

c) A los 41 meses de vida la talla medida fue de 95.5 cm. Confrontar este resultado con la previsión del ajuste obtenido en a). Explicar el origen de la diferencia observada.

A4) Se obtuvieron los siguientes resultados de la medición de un perfil curvo de una pieza mecánica:

x_i	0.5	1	1.5
f_i	0.924	0.707	0.383

Para obtener una forma analítica que represente esos valores, se propone utilizar la función aproximante

$$f^*(x) = \cos(ax)$$

a) Para determinar el parámetro desconocido a se utiliza la técnica de cuadrados mínimos. Plantear la ecuación normal (no lineal) para dicho parámetro.

b) Resolver la ecuación anterior utilizando el método de Newton-Raphson, partiendo de $a^0 = 1$ y trabajando con 6 decimales de precisión. Criterio de corte: error relativo entre dos aproximaciones sucesivas inferior al 3%.