FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

75.12 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I - 95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMERICOS - 95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA

GUÍA DE PROBLEMAS

APROXIMACION DE FUNCIONES: INTERPOLACION

Ejercicios Requeridos

1- Calcular f(3) utilizando la fórmula de Newton, dada la siguiente tabla:

x	1	2	4	5
f(x)	0	2	12	21

a) Tomar los puntos 1, 2 y 4 y luego los puntos 2, 4 y 5.

b) Calcular f(3) por interpolación cúbica.

c) Comparar los resultados de (a) y (b). Obtener conclusiones.

2- Calcular f(0) utilizando la fórmula de Newton, dada la siguiente tabla:

x	0.1	0.2	0.4	0.8
f(x)	64987	62055	56074	43609

Notar que la fórmula de interpolación se utiliza para extrapolar.

Analizar si la extrapolación es admisible.

3- Encontrar el polinomio de grado 3 que pasa por los siguientes puntos utilizando la fórmula de Newton:

x	4	6	8	10
y	1	3	8	20

4- Encontrar el polinomio de grado 4 que pasa por los siguientes puntos utilizando la fórmula de Newton:

x	1	2	3	4	5
y	1	-1	1	-1	1

5- Encontrar el polinomio de grado 3 que pasa por los siguientes puntos utilizando la fórmula de Lagrange:

x	0	1	2	4
y	1	1	2	5

6- Hallar los valores de $(1.01)^{1/2}$ y $(1.28)^{1/2}$, a partir de la siguiente tabla, por interpolación de Newton con 3 dígitos significativos:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$(x)^{1/2}$	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1 14017

7- Encontrar un algoritmo para evaluar los coeficientes del polinomio de Newton minimizando las operaciones.

8- Hallar un polinomio Q de grado 3 tal que Q(0)=0, Q'(0)=1, Q(1)=3 y Q'(1)=6.

9- Dada la siguiente tabla:

x	0	1	3
f(x)	-1.201	0.8204	2.253

a) Construir el polinomio interpolante $P_n(x)$ que surge de la fórmula de Newton. Luego reescribirlo de la forma $P_t(x)=\sum a_i x^i$. Redondear los coeficientes a 4 dígitos.

b) Estudiar el error por redondeo durante las operaciones que se comete al evaluar $P_n(2)$ y $P_t(2)$.

10- Aproximar los datos con un polinomio de grado 2, por cuadrados mínimos y graficar la solución.

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

Calcular los errores para cada dato de la tabla. Calcular el error mínimo que puede ser obtenido con un polinomio cuadrático.

Calcular el polinomio interpolante de Lagrange de grado 2, en los nodos 0, 0.5 y 1. Graficar la solución y calcular los errores para cada dato de la tabla.

Comparar los resultados obtenidos y determinar cuál solución aproxima mejor a la curva en [0,1].

Comparar los resultados obtenidos con la función $f(x) = e^x$ en los puntos 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 ; calcular los errores y obtener conclusiones.

11- Hallar el polinomio interpolante de grado 2 para f(x)= 1/x , por medio de la fórmula de Lagrange, utilizando los nodos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 4$.
Graficar la curva y su aproximación. Analizar los errores para x = 0.5 y x = 1/3.

12- Cada 10 años se realiza un censo de población en los Estados Unidos.
La siguiente tabla presenta los resultados entre 1930 y 1980.

Año:	1930	1940	1950	1960	1970	1980
Población en miles:	123203	131669	150697	179323	203212	226505

a) Hallar el polinomio de Lagrange de grado 5 que aproxime estos datos.

b) Hallar el polinomio de Newton de grado 5 .

c) Utilizar las aproximaciones anteriores para estimar la población en 1920, 1965 y 2000. Comparar los resultados.

d) La población en 1920 fue de 105.711 millones de habitantes. En base a este dato, indicar qué tan exactos cree usted que son sus resultados de 1965 y 2000.

13- Se desea hallar una función polinómica para aproximar a la función $f(x) = e^x \cos x$, en el intervalo $0 \leq x \leq 2$.

a) Tabular f(x) en los nodos x = 0, 0.5, 1 y 2 y hallar el polinomio interpolante por el método de Newton. Trabajar con una precisión de 5 dígitos.

b) Agregar el nodo x = 1.5 para hallar una expresión aproximada para el error de truncamiento. Utilizarla para estimar el error en x = 0.1, 0.3, 0.8, 1.2, 1.5 y 1.7 .

c) Comparar los errores estimados en el punto anterior con los valores correctos, calculados como diferencia entre el valor correcto de f(x) y el obtenido por medio del polinomio interpolante.

Ejercicios Adicionales

A1) Se tiene una tabla de valores de una función, es decir, $\{ x_i , f(x_i) , 1 \leq i \leq n \}$, donde la grilla es equiespaciada, $x_i = x_o + i * h$, siendo h el paso.

a)Construir una fórmula de interpolación con 3 nodos por el método de Newton. Si x es tal que $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, los nodos a utilizar deben ser x_{i-1}, x_i y x_{i+1} . Expresar la fórmula final en términos de la variable $\varepsilon = (x - x_i) / h$. Obtener el término de error utilizando el nodo x_{i+2} .

b) Idem que el punto anterior, pero para una fórmula con 2 nodos, ahora no se usa x_{i-1}.
Mostrar que la relación entre los términos de error de la primera y segunda fórmula vale:

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{3}\right)\left(1-\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i}\right)$$

A partir de esta expresión determinar cuándo es mayor el error de la primera fórmula que el de la segunda, suponiendo que la diferencia segunda es positiva para todo i.

A2) Se tiene la función $f(x) = e^x$, de la cual se proveen los siguientes valores:

x	0.0	0.5	1.0	2.0
f(x)	1.00000	1.64872	2.71828	7.38906

a) Estimar f(0.25) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0$ y $x_1 = 0.5$.

b) Estimar f(0.75) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0.5$ y $x_1 = 1.0$.

c) Estimar f(0.25) y f(0.75) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0$, $x_1 = 1.0$ y $x_2 = 2.0$.

d) Estimar los errores de truncamiento de los cálculos realizados en los puntos a, b y c en base a la fórmula:

$$f(x) = f^*(x) + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

Compararlos con los valores "exactos" calculados a partir de los valores reales de la función f(0.25) = 1.28403 y f(0.75) =2.11700.

e) Indicar qué aproximaciones resultaron más precisas y por qué.

A3) Dada la siguiente serie de mediciones obtenidas experimentalmente en un secadero industrial, se desea conocer el valor de la temperatura en el punto medio del intervalo medido:

x (m)	1	3,1	4,7	7
Temp (°C)	26	86	103	45

a) Para ello, obtenga el polinomio interpolante de Newton utilizando todos los datos de la tabla e indique el valor calculado en el punto medio.

b) Se realiza una nueva medición en el punto 6,5 obteniéndose una temperatura de 76 °C. Obtenga una expresión del error cometido en a) e indique su valor en el punto medio.

c) Explique la diferencia que se obtendría si se interpolaran los puntos por el método de Lagrange.

A4) Dada la siguiente grilla de datos:

$$\bar{X} = [-2 \quad 0 \quad 2]$$
$$\bar{Y} = [-32 \quad -4 \quad 64]$$

Se requiere aproximar los puntos utilizando la siguiente función: $f(x) = ax + bx^4$
(*a* y *b* son números reales).

a) Definir el método de aproximación a utilizar (interpolación o ajuste). Justificar.
b) Hallar *a* y *b*.
c) A partir de la función de aproximación hallada se requiere encontrar el valor de *x* para el cual *y=24*. Explicar qué herramienta utilizaría para estimar dicho valor. <u>No calcularlo</u>, solamente describir la estrategia a utilizar.
d) Dada la misma grilla de datos ¿Qué otra función de aproximación *f(x)* hubiera elegido para que la estimación de *x* en el ítem c) tuviera menor complejidad de cálculo?

A3) Dada la siguiente tabla de valores de una función:

x	f(x)
0	1
20	1241
40	4881

Se pide:

a) Obtener un polinomio interpolante mediante el método de Newton.
b) Indicar que polinomio interpolante resulta de aplicar el método de Lagrange.
c) Usando la información adicional de que f(5)=86 diga qué tipo función es f(x)? Justifique su respuesta.