75.12 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I - 95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMERICOS - 95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA

INTEGRACION NUMERICA

Ejercicios Requeridos

1. Calcular la siguiente integral utilizando las fórmulas del trapecio con pasos h=π/4 y h=π/2, respectivamente:

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} e^{\left(2-\frac{1}{2}\sin(x)\right)}\,dx$$

Obtener conclusiones sobre la precisión obtenida.

2. Integrar la función $y = \sqrt{x}$ entre los argumentos 1.00 y 1.30, según las fórmulas del trapecio. Obtener conclusiones sobre la precisión obtenida.

3. Integrar la función y=sen(x) entre 0 y π/2, a partir de la siguiente tabla:

x	0	π/12	π/6	π/4	π/3	5π/12	π/2
senx	0.0000	0.2587	0.5000	0.7071	0.8660	0.9659	1.0000

por el método del trapecio. Comparar los resultados con el valor exacto.

4. Integrar la función $y = e^{-x}$ entre 0 y 10, por el método de cuadratura de Gauss con 6 puntos. Comparar con el resultado exacto a 6 decimales: 0.999955.

5. Evaluar la integral

$$I = \int_0^2 sen^2(x)\,dx$$

Estimar el error de redondeo en los resultados parciales obtenidos por la regla del trapecio suponiendo que se ha trabajado con aritmética de punto flotante con 4 dígitos de precisión. Suponer que el orden en que se efectúan las operaciones es el siguiente:

$$T(h) = \left[\frac{1}{2}(f_0 + f_n) + \sum_{j=1}^{n-1} f_j\right] h$$

donde n es el número de intervalos y h el paso.

6. Evaluar la integral

$$I = \int_0^2 sen^2(x)\, dx$$

mediante cuadratura de Gauss con 3 puntos. Proceder de la siguiente forma:

a) Hallar la fórmula de cuadratura sabiendo que el polinomio de Legendre de grado 3 es:

$$p_3(x) = \left(\frac{x}{2}\right)(5x^2 - 3)$$

Aplicarla a la integral.

b) Estimar el error cometido en base al desarrollo en serie de Taylor del integrando. Indicar de qué tipo de error de trata.

7. Evaluar la integral:

$$I = \int_0^2 e^{x^2}\, dx$$

mediante cuadratura de Gauss con 4 puntos. La siguiente tabla presenta los puntos de evaluación y los coeficientes asociados:

Puntos	Coeficientes
± 0.86114	0.34785
± 0.33998	0.65215

Efectuar los cálculos con 5 decimales de precisión.

8. Hallar una fórmula de cuadratura para la integral:

$$I = \int_0^3 f(x)dx$$

utilizando 4 nodos equiespaciados e interpolación polinomial sobre todo el intervalo. Utilizar el método de los coeficientes indeterminados. Si M es una cota superior para $\left|f^{IV}(0)\right|$, hallar una estimación del error por truncamiento en términos de M.

9. La función error se define como:

$$erf = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

a) Hallar $erf(1)$ utilizando Cuadratura de Gauss con 5 puntos. Los nodos de evaluación y los correspondientes coeficientes son:

± 0.90618	0.23693
± 0.53847	0.47863
0	0.56889

b) Estimar el error del resultado obtenido por Gauss debido al redondeo en las coordenadas y en los coeficientes provistos. ¿qué puede decir del error de truncamiento del método de Gauss?

10. Obtener una fórmula de integración que involucre 4 nodos equiespaciados (fórmula de Cotes) mediante el método de los coeficientes indeterminados. Para simplificar la resolución del sistema de ecuaciones, tener en cuenta que la fórmula resulta simétrica alrededor del punto medio.

a) Hallar una expresión para el error de truncamiento.

b) Aplicar las fórmulas obtenidas para estimar la integral:

$$I = \int_0^{1.5} \sin^2(x)dx$$

junto con su error. Sabiendo que el valor correcto de la integral a 5dígitos significativos es 0.71472, comparar la estimación del error con su valor correcto.

11. Evaluar la integral

$$I = \int_0^{\pi} \ln(2 - \cos(x))dx$$

a) Calcular la influencia de los errores en los valores del integrando sobre los valores obtenidos por la Regla del Trapecio.

b) El valor exacto de la integral es

$$\pi \ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1.959759164 \ldots$$

Dar una explicación de la alta precisión obtenida con la Regla del Trapecio.

Ejercicios Adicionales

E1) a) Usar el polinomio interpolante de grado 1 y aritmética de 5 dígitos con redondeo simétrico para aproximar cos(0.750) con el método de Newton a partir de los siguientes valores:

x	0.733	0.768
cos(x)	0.74317	0.71930

b) Usar el polinomio interpolante de grado 2 y aritmética de 5 dígitos con redondeo simétrico para aproximar cos(0.750) con el método de Newton a partir de los siguientes valores:

x	0.698	0.733	0.768
cos(x)	0.76613	0.74317	0.71930

c) Calcular una cota de error de truncamiento para los resultados calculados previamente.

E2) Evaluar la siguiente integral mediante cuadratura de Gauss con 3 puntos:

$$I = \int_0^{\pi} e^{sen^2 x}\, dx$$

Para ello obtenga explícitamente la fórmula de cuadratura sabiendo que el polinomio de Legendre de grado 3 es

E3) Se sospecha que altas cantidades de tanino en hojas de roble maduras inhibe el crecimiento de las larvas de la polilla de invierno que dañan extensivamente estos árboles en ciertos años. La siguiente tabla presenta el peso promedio de una muestra de larvas a ciertos tiempos durante los primeros 28 días de vida, levantada de hojas de roble jóvenes.

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Día	Peso muestra (mg)
0	6,67
6	17,33
10	42,67
13	37,33
17	30,10
20	29,31
28	28,74

Se pretende hallar el peso máximo de la muestra y una estimación del error. Para ello proceder de la siguiente manera:

a) Construir una función interpolante cuadrática y la función error asociada mediante el método de Newton.
b) Derivar las funciones obtenidas y hallar el resultado pedido.