FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

75.12 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I - 95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMERICOS - 95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA

GUÍA DE PROBLEMAS

PROBLEMAS DE VALORES INICIALES

Ejercicios Requeridos

1. Discretizar el siguiente problema de valores iniciales por el método de Euler

$$\frac{dy}{dt} = -y + t + 1 \qquad t \geq 0 \qquad y(0) = 1$$

a) Utilizando un paso k = 0.1 avanzar 10 pasos el cálculo de la solución numérica.
b) Calcular el error global en t=1 sabiendo que la solución exacta es

$$y(t) = t + e^{-t}$$

2. Discretizar el siguiente problema mediante el método de Euler y analizar la estabilidad numérica.

$$\frac{du}{dt} = u^2 \qquad t_0 < t < \frac{1}{u_0} \qquad u(t_0) = u_0 > 0$$

Analizar la estabilidad numérica si $u_0 < 0$ y $\frac{1}{u_0} < t_0 < t$

3. Discretizar el siguiente problema mediante el método de Euler y analizar la estabilidad numérica.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2u = 0 \qquad t \geq 0 \qquad u(0) = u_0 \qquad u'(0) = u'_0$$

4. Discretizar el siguiente problema mediante el método de Euler y analizar la estabilidad numérica.

$$\frac{du_1}{dt} = u_2 \qquad \frac{d2}{dt} = -u_1 \qquad t > 0 \qquad u_1(0) = a \qquad u_2(0) = b$$

5. Aproximar el siguiente problema por el método fuertemente implícito (Euler inverso) y analizar la estabilidad numérica. Analizar qué ocurre si u(0) = -1.

$$\frac{du}{dt} = -u^2 \qquad t \geq 0 \qquad u(0) = 1$$

6. Aproximar el siguiente problema por el método de Euler modificado (Runge-Kutta de orden 2:

$$\frac{du}{dt} = u + t \qquad t \geq 0 \qquad u(0) = 1$$

Analizar la estabilidad numérica. Avanzar 10 pasos de cálculo y comparar con la solución exacta $u(t) = 2e^t - t - 1$.

7. Aproximar el siguiente problema por el método de Euler. Utilizar un paso k = 0.01 y obtener u(0.1). Estimar el tamaño de malla necesario para obtener una precisión de 10^{-4}.

$$\frac{du}{dt} - t - u - u\,t = 0 \qquad t \geq 0 \qquad u(0) = 1$$

8. Repetir el problema anterior, utilizando el método de Crank-Nicolson, con un paso k = 0.025. Comparar el esfuerzo de cálculo requerido por ambos métodos.
9.
10. El problema diferencial $y' = -y + t + 1,\ \ 0 < t < 1,\ \ y(0) = 1,$ ha de ser integrado utilizando el esquema predictor-corrector explícito o del punto medio.

a) Demostrar que el esquema es consistente y hallar su orden de precisión.
b) Utilizando un paso k = 0.1 avanzar 10 pasos el cálculo de la solución numérica.
c) Calcular el error cometido (ver problema 1 b)

11. Calcular u(0.5) utilizando los siguientes métodos:

a) Euler.
b) Predictor-corrector explícito (Punto medio).
c) Euler modificado (Runge-Kutta orden 2).

aplicados al siguiente problema

$$\frac{du}{dt} + (1 - t)\,u^3 = 0 \qquad u(0) = 1$$

Obtener previamente el factor de amplificación y durante el cálculo verificar en cada paso que dicho factor es menor o igual que 1. Elegir un paso k = 0.1 por razones de precisión.

12. Sea el siguiente problema

$$u' - \frac{a}{u} = 0 \qquad\qquad u(0) = 1$$

Discretizarlo utilizando los métodos:

a) Runge-Kutta de orden 2 (Euler modificado).
b) Crank-Nicolson.

Verificar el orden del error de truncamiento. Hallar las condiciones de estabilidad.

13. Sea el siguiente problema:

$$\frac{du}{dt} + u^2 t = 0 \qquad\qquad u(0) = 1$$

Discretizarlo mediante el esquema de Crank-Nicolson y analizar la estabilidad suponiendo que u permanece positiva. Avanzar la solución un paso de cálculo tomando k = 0.1.

14. Sea el siguiente problema de valores iniciales:

$$y' = \left(\frac{2}{t}\right) y + t^2 e^t \qquad\qquad 1 \le t \le 1.5 \qquad\qquad y(1) = 0$$

cuya solución es $y(t) = t^2 \,.\, (e^t - e)$. Obtener la solución numérica mediante el método de Euler, utilizando 2 pasos de cálculo distintos, k = 0.1 y k = 0.05. Mostrar cómo se refleja el orden de precisión del esquema en la reducción del error de truncamiento.
Utilizar aritmética de punto flotante con 4 dígitos de precisión.

15. Dada la ecuación diferencial $\frac{du}{dt} + f(u,t) = 0$ se pide demostrar la consistencia del 7esquema de Euler modificado (Runge-Kutta deorden 2).

16. Dada la ecuación diferencial $\frac{du}{dt} + u = 0$, u(0)=1, calcular u(0.6) utilizando el método de Crank-Nicolson con pasos k = 0.2 y k = 0.1.

17. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} u' + u.v = 0 \\ v' + v^2 = 0 \end{cases}$$

$$u(0) = a, v(0) = 1, a = constante$$

Demostrar que si se discretiza el sistema por el método de Euler, la estabilidad numérica está sujeta a la restricción $k = 1/v$.

18. Dado el siguiente problema diferencial:

$$\frac{d^5u}{dt^5} - 120 = 0 \qquad t \geq 1.9$$

u(1.9)= -33 u'(1.9)= 322.6

u''(1.9)= 27.16 u'''(1.9)= -269.4

u^{IV}(1.9)= -12.5

a) Transformarlo en un sistema de ecuaciones de primer orden y resolverlo mediante el método de Crank-Nicolson , con k = 0.04 y avanzar la solución hasta t=2.1.
b) Hallar el polinomio que pasa por los puntos calculados en a) por el método de Newton, incluída la condición inicial.
c) La solución obtenida en a) cambia de signo en el intervalo considerado. Hallar el polinomio interpolante que pasa por los cuatro puntos más cercanos a la raíz y, en base a este polinomio, calcular la raíz por el método de Newton-Raphson.
d) Discutir sobre si hubiera sido suficiente una interpolación lineal para hallar la raíz evaluada en c) con la misma precisión.
<u>Nota:</u>Trabajar con 4 dígitos de precisión.

19. Transformar la ecuación diferencial: $\frac{d^2u}{dt^2} + \mu \frac{du}{dt} + w^2u = 0 \quad \mu > 0$
en un sistema de ecuaciones de primer orden y discretizar según el método fuertemente implícito (Euler inverso).

Avanzar dos pasos de cálculo tomandoiniciales:$\mu = w = 1$, para las condiciones

$$u(0) = 1 \qquad u'(0) = 1$$

Elegir un paso de cálculo que garantice la estabilidad.

20. Sea el siguiente problema diferencial

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \qquad u(0) = 0 \qquad u'(0) = 1$$

a) Transformarlo en un problema de valores iniciales de primer orden.
b) Utilizar el método de Euler modificado para avanzar la solución hasta t=0.4. Utilizar dos pasos de tiempo: k = 0.1 y k = 0.2.
c) Sabiendo que la solución es $u(t) = \sin(t)$, determinar los errores cometidos y verificar que el método numérico tiene orden de precisión 2.

21. Analizar la estabilidad del problema $\frac{d^3u}{dt^3} - 1 = 0$, reducido a un sistema de primer order y resuelto por Euler.