Diagramas de características en barras de eje curvo

· Arcos

Consideraremos en nuestro análisis, un elemento diferencial de barra de eje curvo que forma parte de una estructura plana en equilibrio , perteneciente al plano "z-y", cuya longitud proyectada sobre el eje z es dz.

Sobre el elemento que analizaremos actúa un sistema de fuerzas cuya ley de variación es continua y derivable.

Luego de poner en las secciones extremas del elemento aislado las fuerzas que el resto de la estructura ejercía sobre él obtendremos, si referimos dichas fuerzas generalizadas a la terna correspondiente a los esfuerzos característicos, un sistema en equilibrio que es el esquematizado en la figura 1.

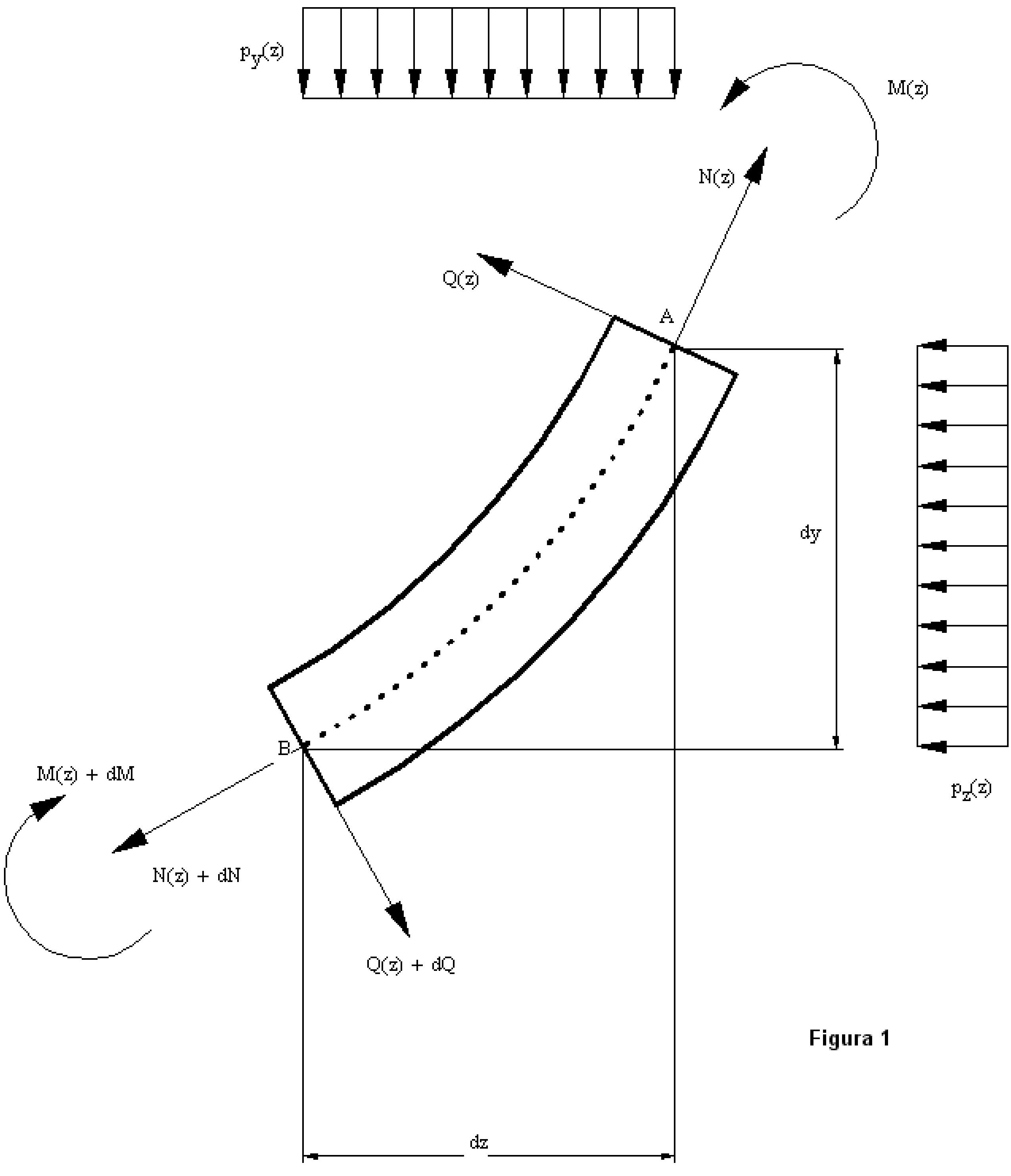

Figura 1

Debido a que el eje de la barra es curvo, resulta más conveniente equilibrar las acciones externas con fuerzas que mantengan su orientación para todas las secciones de la barra. De este modo, en lugar de considerar la dirección de las fuerzas en relación al plano de la sección, consideraremos fuerzas horizontales y verticales aplicadas en los baricentros de las secciones extremas y obtenemos el sistema en equilibrio esquematizado en la figura 2.

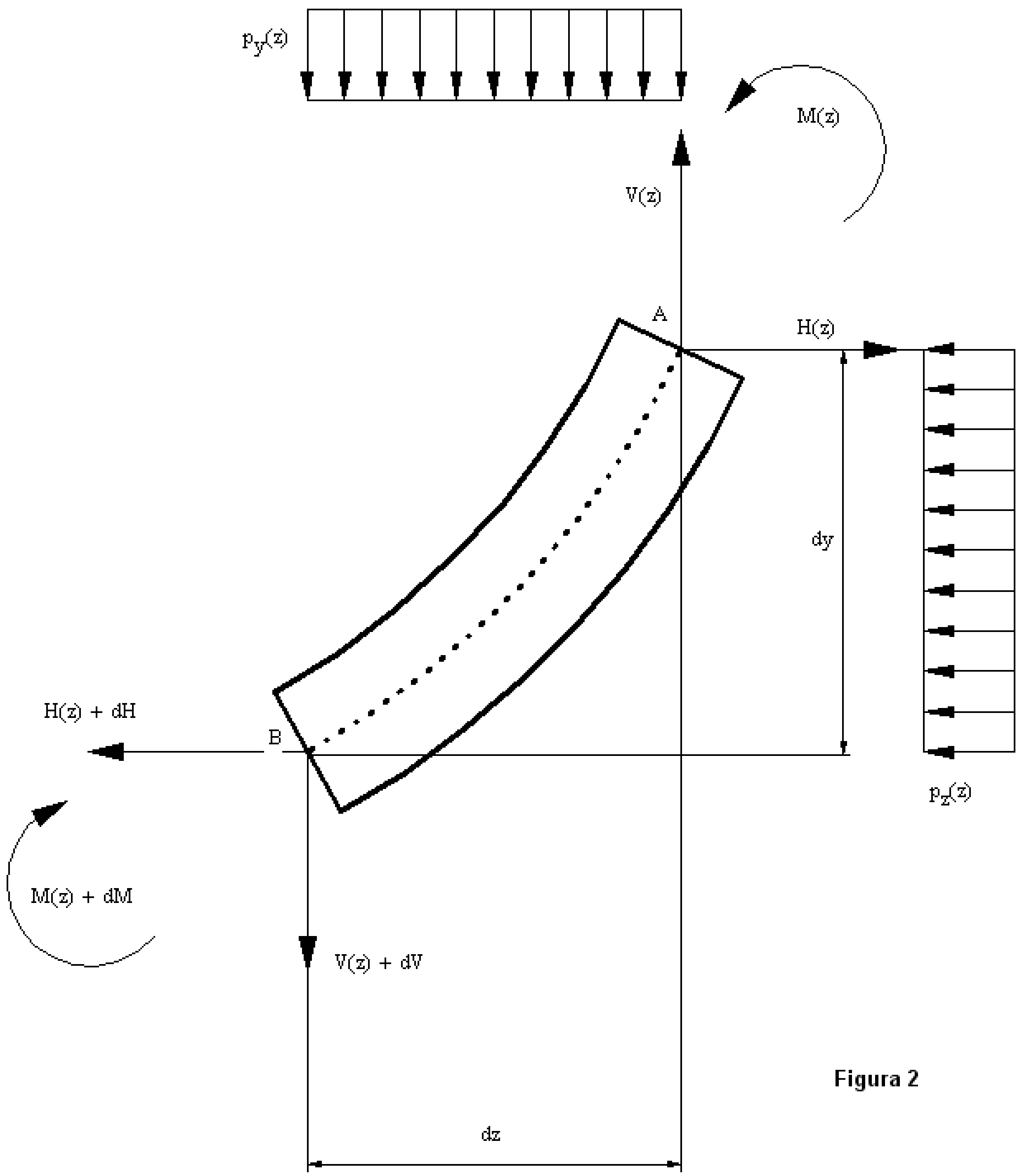

Figura 2

Las relaciones existentes entre el sistema de fuerzas N(z), Q(z) y su equivalente constituido por H(z) y V(z) son las siguientes, y surgen de observar la figura 3.

- **[1]** $N(z) = H(z)\cdot\cos\alpha(z) + V(z)\cdot\sin\alpha(z)$
- **[2]** $Q(z) = -H(z)\cdot\sin\alpha(z) + V(z)\cdot\cos\alpha(z)$

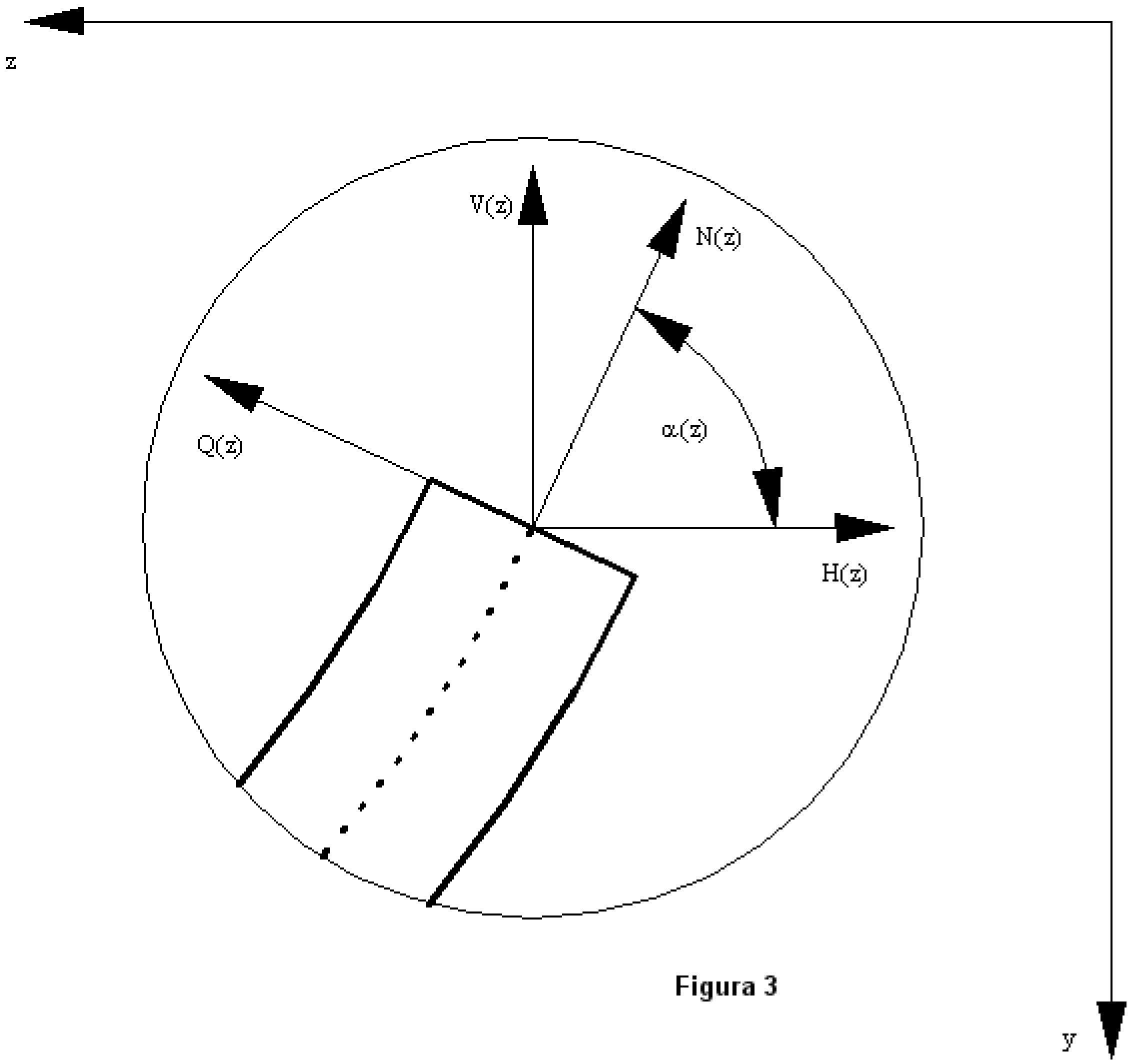

Figura 3

A continuación determinaremos las relaciones entre las cargas exteriores y las funciones H(z) y V(z) planteando el equilibrio del elemento diferencial de barra bajo la acción de las fuerzas generalizadas esquematizadas en la figura 2.

Las ecuaciones a plantear son:
Nulidad de la suma de las proyecciones de las fuerzas generalizadas sobre el eje z (horizontal).
Nulidad de la suma de las proyecciones de las fuerzas generalizadas sobre el eje y (vertical).
Nulidad de la suma de los momentos de las fuerzas generalizadas respecto del punto B.

- **[3]** $$H(z) + dH - H(z) + p_z(z)\cdot dz = 0$$

- **[4]** $$V(z) + dV - V(z) + p_y(z)\cdot dz = 0$$

- **[5]** $$M(z) + dM - M(z) - V(z)\cdot dz + H(z)\cdot dy + p_y(z)\cdot dz\cdot\frac{dz}{2} - p_z(z)\cdot dz\cdot\frac{dy}{2} = 0$$

Teniendo en cuenta que los dos últimos términos de la expresión [5] no son apreciables frente a los demás por contener un producto de diferenciales concluimos que las siguientes, son las <u>relaciones diferenciales entre las cargas exteriores y las funciones H(z) y V(z)</u>:

· [6] $$\frac{dH}{dz} = -p_z(z)$$

· [7] $$\frac{dV}{dz} = -p_y(z)$$

· [8] $$\frac{dM}{dz} = V(z) - H(z)\cdot\frac{dy}{dz}$$

Recordando que:

· [9] $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (tg\alpha)^2}}$$

· [10] $$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + (tg\alpha)^2}}$$

· [11] $$tg\alpha = \frac{dy}{dz}$$

si conocemos la función $y(z)$, que describe el eje de la barra, estaremos en condiciones de trazar los diagramas de características de la misma.

Trazar los diagramas de esfuerzos característicos del arco parabólico triarticulado representado en la figura siguiente, sujeto a una carga uniformemente distribuida $p_y(z)$:

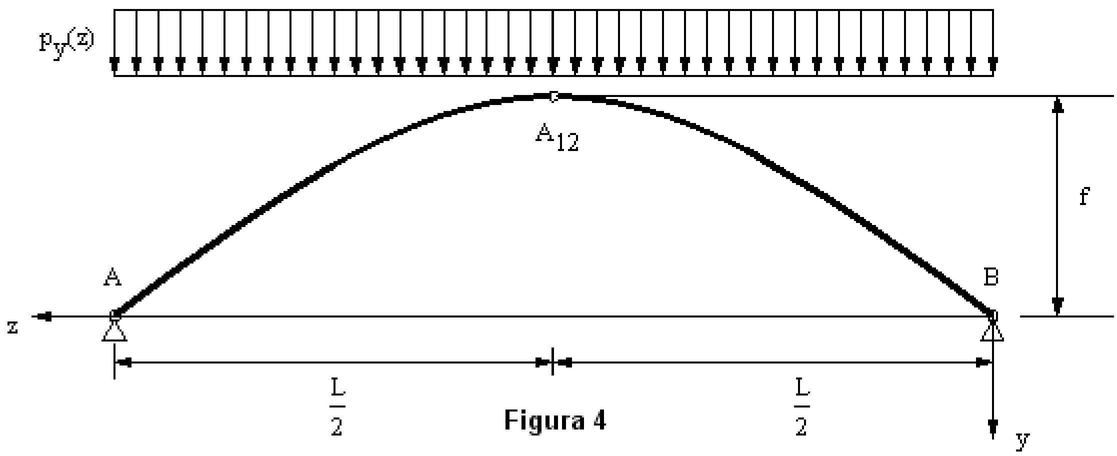

Figura 4

<u>Cálculo de las reacciones de vínculo externo:</u>

En este caso $p_y(z) = p$ y $p_z(z) = 0$

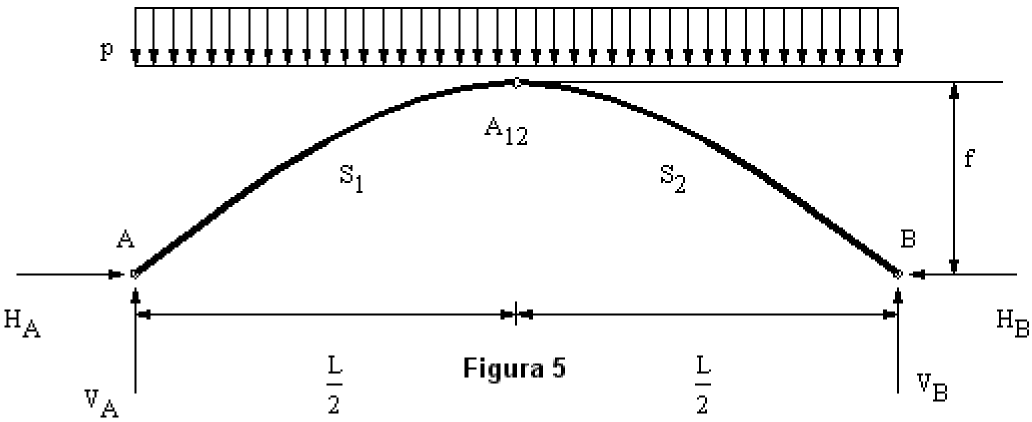

Figura 5

Puestas en evidencia las incógnitas, plantearemos las siguientes ecuaciones de equilibrio para determinar las componentes de reacción de vínculo externo :

$$\sum M_A = p\cdot L\cdot\frac{L}{2} - V_B\cdot L = 0 \qquad V_B = \frac{p\cdot L}{2}$$

$$\sum_{S_2} M_{A12} = p\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{4} + H_B\cdot f - \frac{p\cdot L}{2}\cdot\frac{L}{2} = 0 \qquad H_B = \frac{p\cdot L^2}{8\cdot f}$$

$$\sum F_z = H_B - H_A = 0 \qquad H_A = \frac{p\cdot L^2}{8\cdot f}$$

$$\sum F_y = p\cdot L - p\cdot\frac{L}{2} - V_A = 0 \qquad V_A = \frac{p\cdot L}{2}$$

Diagrama de cuerpo libre bajo la acción de las fuerzas exteriores:

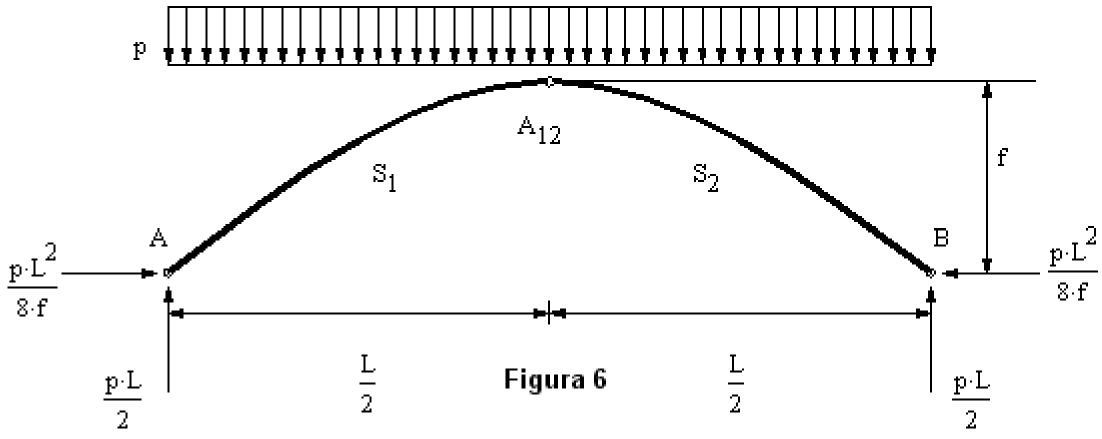

Figura 6

En virtud de la expresión **· [6] ,** $\frac{dH}{dz} = -p_z(z)$

En el caso que nos ocupa $p_z(z)$ es nula, por lo tanto $H(z)$ es una función constante. Conociendo el valor de la función en un punto (por ejemplo $H(L) = -\frac{p\cdot L^2}{8\cdot f}$), podemos trazar el diagrama de $H(z)$.

Por otra parte $p_y(z)$ es una función constante, por lo tanto, en virtud de la **· [7]** ($\frac{dV}{dz} = -p_y(z)$) **,** $V(z)$ deberá ser una función lineal. Conociendo el valor de la función en dos puntos $V(0) = \frac{p\cdot L}{2}$ y $V(L) = \frac{p\cdot L}{2}$ podremos trazar el diagrama de $V(z)$.

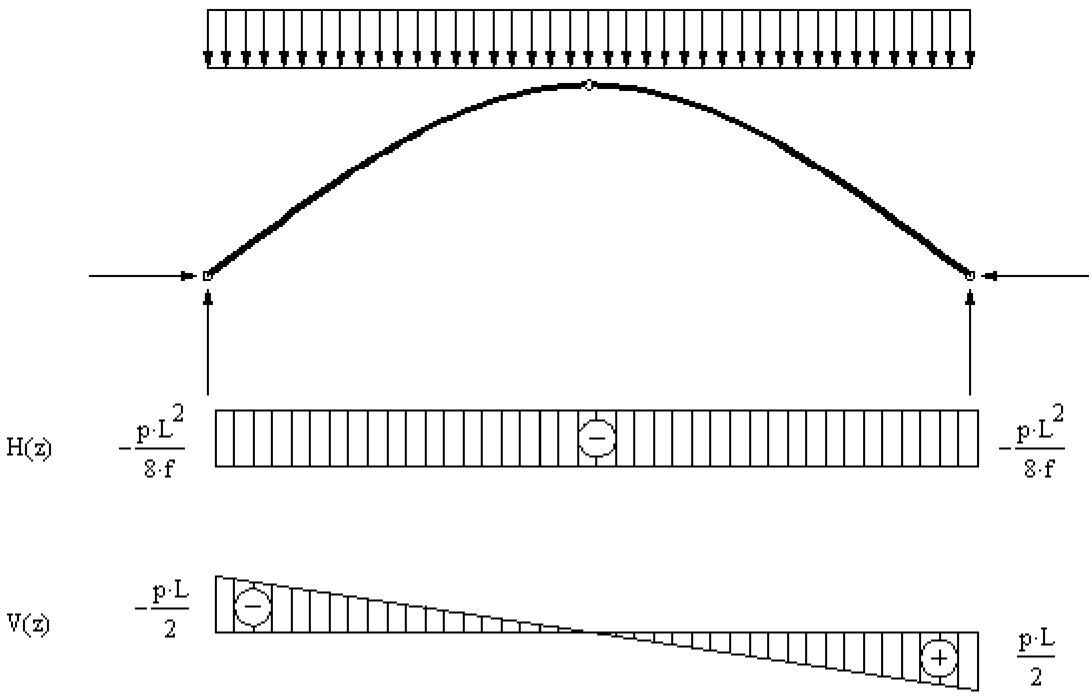

Figura 7

De los diagramas surge que :

· [12] $H(z) = -\frac{p \cdot L^2}{8 \cdot f}$ **· [13]** $V(z) = p \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right)$

<u>Determinación de la función y(z)</u>:

Como el arco es parabólico responderá a una función de la forma:

$$y(z) = a \cdot z^2 + b \cdot z + c$$

Los coeficientes a, b y c se obtienen de aplicar las condiciones de borde del arco que estamos estudiando.

Para nuestro caso es:

· [14] $y(0) = 0$ **· [15]** $y(L) = 0$ **· [16]** $y\left(\frac{L}{2}\right) = -f$

De la **· [14]**

$y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$ de donde surge que **· [17]** $\boxed{c = 0}$

De la **· [15]** y la **· [17]**

$y(L) = a \cdot L^2 + b \cdot L = 0$ o también $L \cdot (a \cdot L + b) = 0$ de donde debe ser $a \cdot L + b = 0$ y llegamos a que:

· [18] $a = \frac{-b}{L}$

De la **· [16]** , la **· [17]** y la **· [18]**

$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{-b}{L} \cdot \frac{L^2}{4} + b \cdot \frac{L}{2} = -f$ o también $\frac{b \cdot L}{4} = -f$ de donde **· [19]** $\boxed{b = \frac{-4 \cdot f}{L}}$ y **· [20]** $\boxed{a = \frac{4 \cdot f}{L^2}}$

La función y(z) que describe el eje del arco es, teniendo en cuenta las **· [17]** ,**· [19]** y **· [20]:**

· [21] $y(z) = \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot z^2 - \frac{4 \cdot f}{L} \cdot z$ o también **· [22]** $\frac{4 \cdot f \cdot z}{L} \cdot \left(\frac{z}{L} - 1\right)$

La derivada $\frac{dy}{dz}$ es la pendiente de la recta tangente al arco en la abscisa considerada.

Derivando la expresión **· [21]** obtenemos la pendiente de la recta tangente al arco en la abscisa considerada

· [23] $\frac{dy}{dz} = \frac{8 \cdot f}{L^2} \cdot z - \frac{4 \cdot f}{L}$ o también **· [24]** $\frac{dy}{dz} = \frac{4 \cdot f}{L}\left(\frac{2 \cdot z}{L} - 1\right)$

<u>Determinación de la función</u> $Q(z)$

Hemos visto que, según la expresión **· [2]**

$$Q(z) = -H(z) \cdot \sin\alpha(z) + V(z) \cdot \cos\alpha(z)$$

Reemplazando los valores obtenidos en **·[9] , ·[10], · [12] · [13]** y **· [24]** (teniendo en cuenta **· [11]**)

$$Q(z) = \frac{p\cdot L^2}{8\cdot f}\cdot\frac{\frac{4\cdot f}{L}\left(\frac{2\cdot z}{L} - 1\right)}{\sqrt{1 + (tg\alpha)^2}} + p\cdot\left(\frac{L}{2} - z\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + (tg\alpha)^2}}$$

Sacando factor común y simplificando nos queda:

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + (tg\alpha)^2}}\cdot\left[p\cdot\left(z - \frac{L}{2} + \frac{L}{2} - z\right)\right]$$

y finalmente:

· [25] $\boxed{Q(z) = 0}$ con lo que vemos que **el corte es nulo en todas las secciones del arco.**

Determinación de la función $M(z)$

Hemos visto que, según la expresión **· [8]**

$$\frac{dM}{dz} = V(z) - H(z)\cdot\frac{dy}{dz}$$

Reemplazando los valores obtenidos en las **· [12]** , **· [13]** y **· [24]**

$$\frac{dM}{dz} = p\cdot\left(\frac{L}{2} - z\right) + \frac{p\cdot L^2}{8f}\cdot\frac{4f}{L}\cdot\left(\frac{2\cdot z}{L} - 1\right)$$

Simplificando y sacando factor común p

$$\frac{dM}{dz} = p\cdot\left(\frac{L}{2} - z + z - \frac{L}{2}\right)$$

y, finalmente:

· [26] $\boxed{\frac{dM}{dz} = 0}$

Si dM/dz es nulo, la función M(z) deberá ser constante y, para trazar el diagrama de M(z) será suficiente conocer el valor de la función en un solo punto.

Como en las articulaciones A , B y A_{12} el valor de M(z) es nulo, concluimos que e**l momento flexor es nulo en todas las secciones del arco.**

Determinación de la función $N(z)$

Hemos visto que, según la expresión **· [1]**

$$N(z) = H(z)\cdot\cos\alpha(z) + V(z)\cdot\sin\alpha(z)$$

Reemplazando los valores obtenidos en **·[9] , ·[10], · [12] · [13]** y **· [24]** (teniendo en cuenta **· [11]**)

$$N(z) = -\frac{p \cdot L^2}{8 \cdot f} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (tg\alpha)^2}} + p \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right) \cdot \frac{\left[\frac{4 \cdot f}{L}\left(\frac{2 \cdot z}{L} - 1\right)\right]}{\sqrt{1 + (tg\alpha)^2}}$$

Sacando factor común $\frac{1}{\sqrt{1 + (tg\alpha)^2}}$

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + (tg\alpha)^2}} \cdot \left[-\frac{p \cdot L^2}{8 \cdot f} + \frac{4 \cdot p \cdot f}{L} \cdot \left(\frac{L}{2} \cdot \frac{2 \cdot z}{L} - \frac{L}{2} - \frac{2 \cdot z^2}{L} + z\right)\right]$$

Simplificando y sacando factor común $\frac{-p \cdot L^2}{8 \cdot f}$ llegamos finalmente a

· [27] $$N(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + (tg\alpha)^2}} \cdot \left(\frac{-p \cdot L^2}{8 \cdot f}\right) \cdot \left[1 - \frac{32 \cdot f^2}{L^3} \cdot \left(\frac{-2 \cdot z^2}{L} + 2 \cdot z - \frac{L}{2}\right)\right]$$

Esta expresión nos permite ver que **la variación de N(z) es cuadrática** debido a que el paréntesis incluído en el corchete es una función de segundo grado en z.

Como hemos visto, al ser nulos Q(z) y M(z), el arco estará sujeto exclusivamente a un esfuerzo de compresión siendo los valores de N(z) en A y B iguales al módulo de las reacciones de vínculo externo.

$$N(0) = N(L) = -\sqrt{\left(\frac{p \cdot L^2}{8 \cdot f}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot L}{2}\right)^2} = -\sqrt{\frac{p^2 \cdot L^4}{64 \cdot f^2} + \frac{p^2 \cdot L^2}{4}}$$

y finalmente

· [28] $$N(0) = N(L) = \frac{-p \cdot L}{2} \cdot \sqrt{\frac{L^2}{16 \cdot f^2} + 1}$$

Como el diagrama de esfuerzos normales es cuadrático, necesitamos conocer el valor de la función N(z) en tres puntos.

Dada la simetría de la estructura que estamos analizando, es fácil ver que, tal como se puede apreciar en la figura 8 el esfuerzo normal en el eje de simetría es:

· [29] $$N\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{-p \cdot L^2}{8 \cdot f}$$

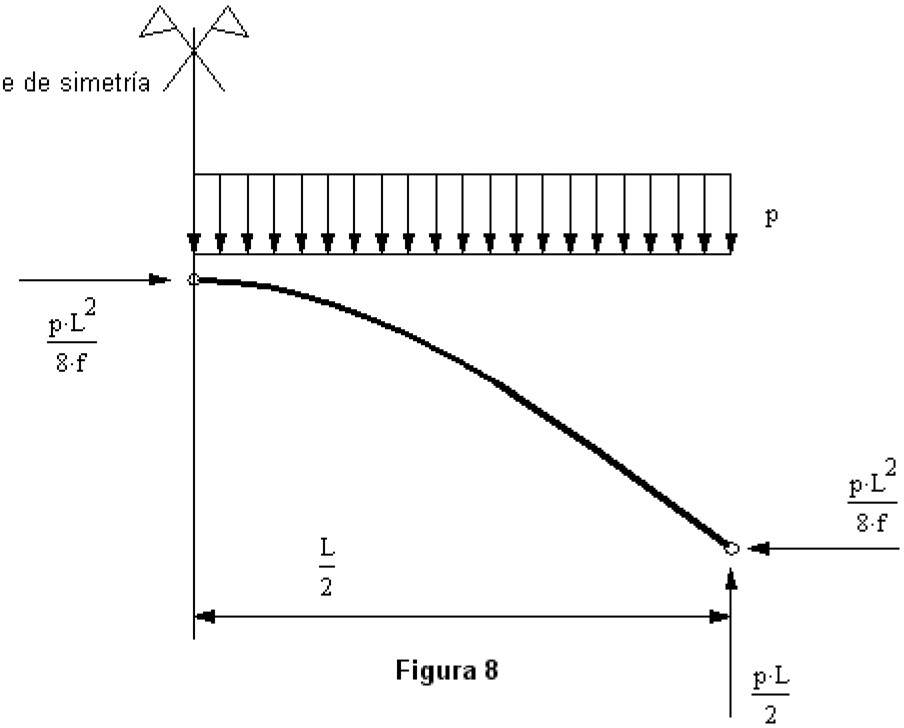

Figura 8

Ahora que conocemos tres valores de la función N(z) podemos trazar el **diagrama esfuerzos normales.**

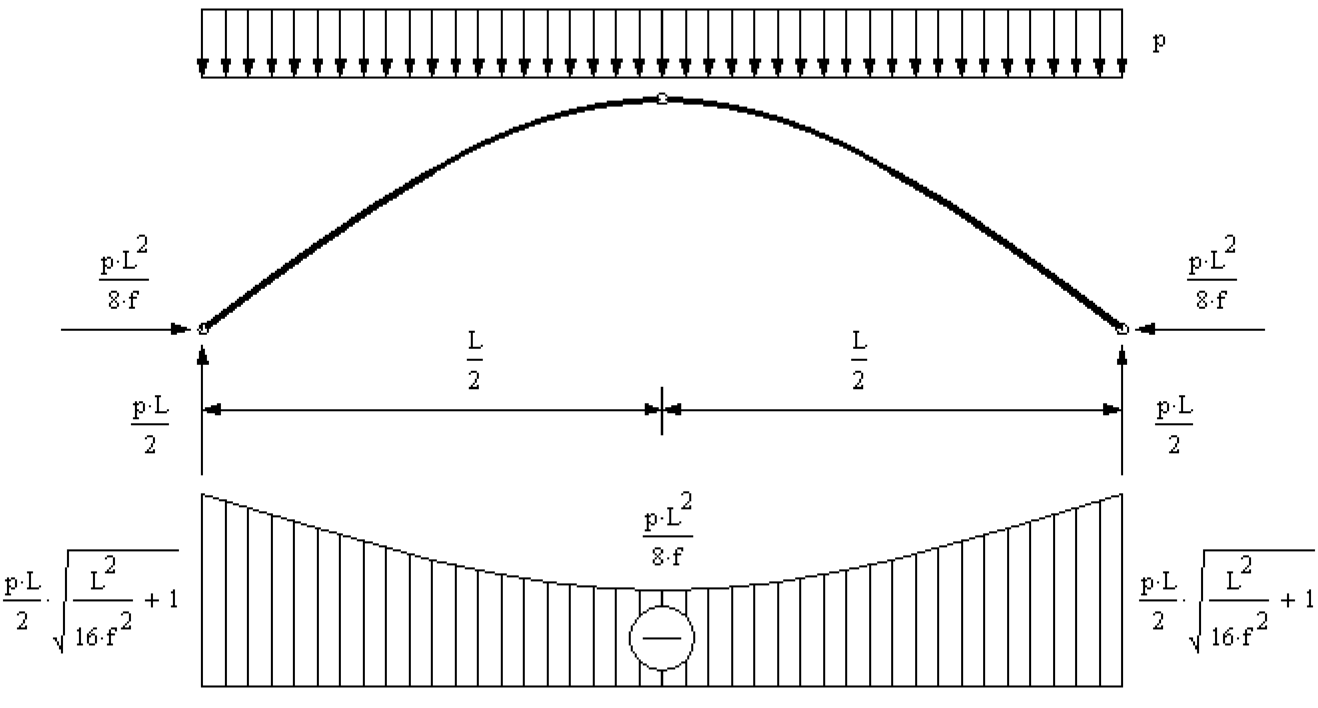

Figura 9