

## CABLES

### Introducción:

Los cables son elementos estructurales lineales (las dimensiones de su sección son muy pequeñas comparadas con su longitud).

Tienen la característica de ser sumamente flexibles. Razón por la cual para su estudio no se considera su resistencia a flexión y se los diseña para soportar cargas en forma axial, con esfuerzos únicamente de tracción.

Al estar sometidos a un sistema de fuerzas los cables alcanzan el equilibrio adaptando su forma a la del funicular de cargas. El estudio estático de estos sistemas se reduce al estudio de la curva funicular.

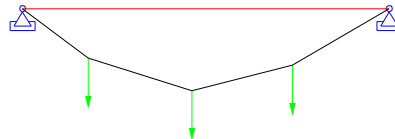
### Formas de los cables:

Siendo que la forma del cable depende de las cargas que actúen en él, para estudiar la forma de un cable debemos distinguir diferentes acciones que lo solicitan.

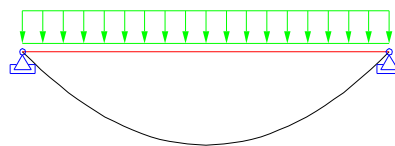
En general los cables se encuentran sometidos principalmente a:

- cargas concentradas en diferentes puntos de su extensión
- cargas verticales distribuidas por unidad horizontal de longitud (Ej. peso del tablero de un puente colgante)
- cargas verticales distribuidas por unidad de longitud del cable (Ej. peso propio del cable)

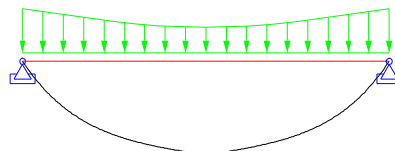
Cuando un cable sujetado en sus extremos es sometido a cargas concentradas adopta una forma poligonal.



Si el cable soporta una carga distribuida por unidad horizontal de longitud, su forma es parabólica.



Mientras que si está sometido a una fuerza uniformemente distribuida por unidad de longitud del mismo, toma la forma de catenaria.

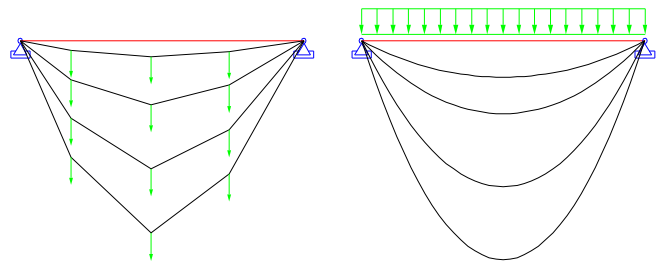


### Estudio del equilibrio de un cable

Las condiciones de vínculo en los extremos de un cable sometido a la acción de un sistema de fuerzas arbitrario deben ser tales que permitan el equilibrio del conjunto. Para alcanzar el equilibrio, las reacciones suministradas por los vínculos tienen que ser contrarias a las acciones ejercidas por el cable (principio de acción y reacción). Debido que los cables no poseen resistencia a flexión, no ejercen momentos en los apoyos, sólo fuerzas cuyas intensidades y direcciones dependerán de las cargas actuantes en el sistema. Consecuentemente los vínculos en los extremos del cable siempre se tratan de apoyos fijos (vínculos de segunda especie).

Si ahora aplicamos las ecuaciones de equilibrio, tendremos entonces un sistema de tres ecuaciones independientes y cuatro incógnitas (dos por cada apoyo), es decir un sistema estáticamente indeterminado. Esto significa que existe una multitud de cables que podrán satisfacer las ecuaciones de equilibrio para un mismo sistema de fuerzas. Esta afirmación es representada en las figuras a continuación.

En las figuras se puede apreciar un conjunto de cables bajo la acción de un mismo sistema de cargas, donde cada cable se encuentra en estado de equilibrio. Notemos sin embargo que cada uno posee una longitud y una forma distinta. Al mismo tiempo las tensiones que solicitan a cada cable difieren del resto.



Por consiguiente, para la determinación de las reacciones de vínculo externo se podrá plantear una cuarta ecuación en función de la longitud que presenta el cable en estudio, o de la deformación que se desea del mismo o de la tensión para la cual se diseña este elemento estructural. De esta forma se puede hallar una única solución del sistema que se ajusta a las condiciones del problema en estudio.

**Determinación de las reacciones de vínculo:**

A continuación se desarrollará la resolución de sistemas planos de cables bajo los tipos de cargas más frecuentes. Para su estudio se adoptarán las siguientes hipótesis:

Sección despreciable. Se considera que el cable posee una dimensión predominante mucho mayor que los otros dos, por lo que puede ser idealizado según una línea, sin sección transversal. Tan sólo será necesario considerar su sección a efecto de calcular su peso propio en función de la densidad del material que lo compone.

Flexibilidad perfecta. El cable no resiste esfuerzos de flexión, y por lo tanto tampoco de corte. Tan sólo resiste esfuerzos axiales.

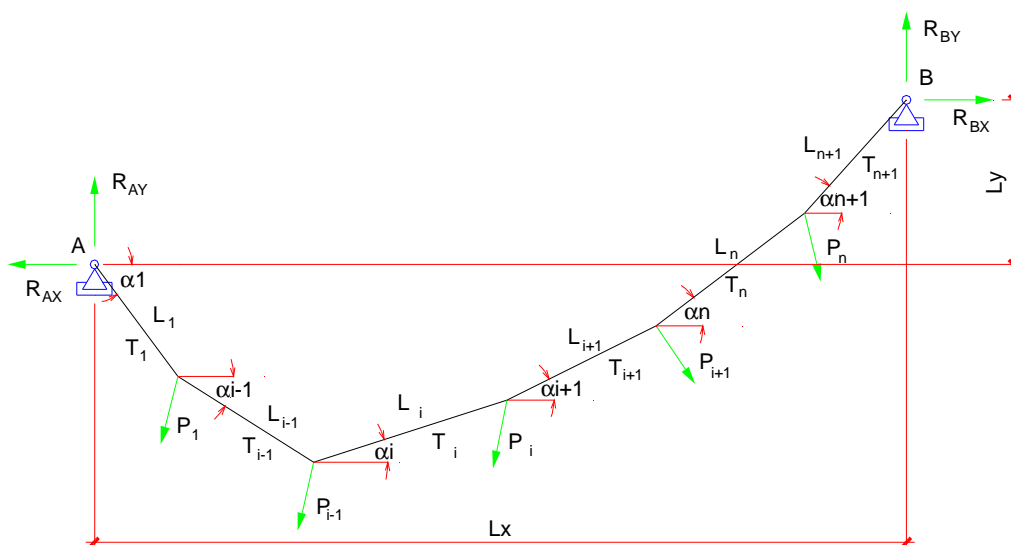
Inextensibilidad. Cuando está sometido a tracción, el cable es lo suficientemente rígido (en dirección longitudinal) como para que se pueda despreciar su extensibilidad. Por el contrario, sometido a compresión, el cable no ofrece resistencia alguna y se deforma completamente.

**1-Cables sometidos a fuerzas concentradas en diferentes puntos de su extensión:**

**1.a-Caso general: Fuerzas aplicadas con componentes horizontales y verticales.**

En el caso general de un cable sometido a cargas de direcciones arbitrarias, los puntos de aplicación de las mismas o vértices de la poligonal se desplazarán vertical y horizontalmente hasta alcanzan el equilibrio del sistema. Por la hipótesis de inextensibilidad que hemos adoptado, el corrimiento de cada uno de los vértices estará condicionado por el desplazamiento que experimentan el resto de los vértices, puesto que la distancia entre los mismos debe mantenerse invariante.

Esquema de estudio:



**Incógnitas:** De cada uno de los tramos rectos del cable se desconoce la tensión actuante en él y su orientación. Si consideramos que actúan un número “n” de cargas, tendremos “n+1” tramos rectos y por consiguiente “2n+2” incógnitas.

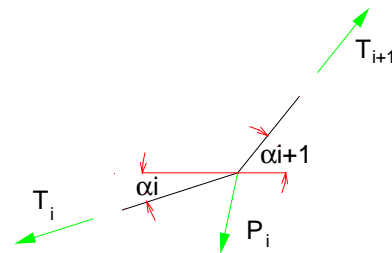
**Ecuaciones:** En cada uno de los puntos de aplicación de cargas se pueden plantear dos ecuaciones para garantizar el equilibrio nodal de fuerzas (“2n” ecuaciones). Se completa el sistema con dos ecuaciones que aseguren que la deformación del cable se compatible con las condiciones de vínculo impuestas.

Planteo del sistema de ecuaciones:

Ecuaciones de equilibrio en cada nodo:

$$\sum_n F_x = 0 = \cos(\alpha_i) \cdot T_i - \cos(\alpha_{i+1}) \cdot T_{i+1} + P_{x_i}$$

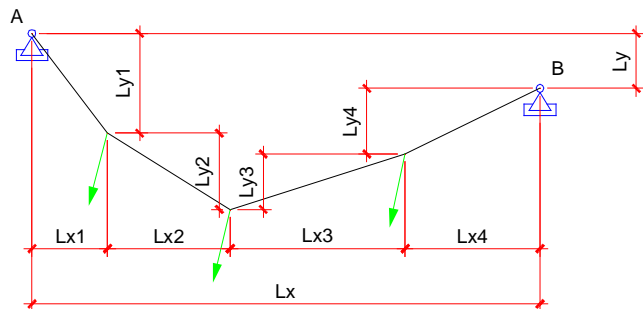
$$\sum_n F_y = 0 = \sin(\alpha_i) \cdot T_i - \sin(\alpha_{i+1}) \cdot T_{i+1} + P_{y_i}$$



Ecuaciones de compatibilización de deformaciones:

$$L_x = \sum_{i=1}^{n+1} L_{x_i} = \sum_{i=1}^{n+1} L_i \cdot \cos(\alpha_i)$$

$$L_y = \sum_{i=1}^{n+1} L_{y_i} = \sum_{i=1}^{n+1} L_i \cdot \sin(\alpha_i)$$



La resolución de este sistema de ecuaciones nos permitirá conocer las tensiones que actúan en cada uno de los tramos del cable y la forma del mismo en el estado de equilibrio.

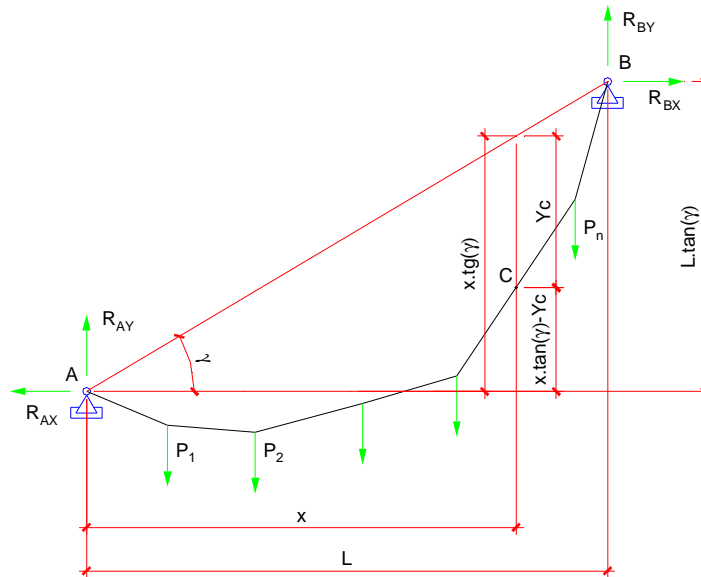
El sistema sin embargo presenta una gran complejidad y requiere del uso de métodos computacionales para su resolución, dado que no es lineal y al mismo tiempo parte de las incógnitas están afectadas por funciones trigonométricas.

A final de este apunte se presenta un ejemplo de cálculo de un cable sometido a un conjunto de cargas concentradas arbitrarias realizado con MahtCad.

Si bien las estructuras formadas con cables sometidos a cargas concentradas presentan en general componentes de fuerzas horizontales, un número muy importante de sistemas se encuentran bajo la acción de cargas concentradas predominantemente verticales. El estudio de estos casos presenta ciertas particularidades respecto al planteo que hemos realizado. En principio en muchos de estos modelos se consideran invariantes las distancias horizontales entre cargas en vez de las distancias entre puntos de aplicación de fuerzas. De esta manera para conocer la forma final del cable basta con conocer solamente las deflexiones o flechas de los puntos de aplicación de las cargas. Al mismo tiempo, queda libre la posibilidad de plantear la ecuación geométrica en términos de la flecha que experimenta algún punto del cable, en vez de hacerlo en función de su longitud. Esta posibilidad permite construir sistemas de ecuaciones de mayor simplicidad de resolución. A continuación se pasará analizar estos casos.

**1.b- Caso particular. Cables sometidos a fuerzas concentradas verticales.**

Consideremos el caso de un cable sujetado en los puntos A y B, no necesariamente ubicados a la misma altura, sobre el que actúa un sistema de cargas verticales  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .



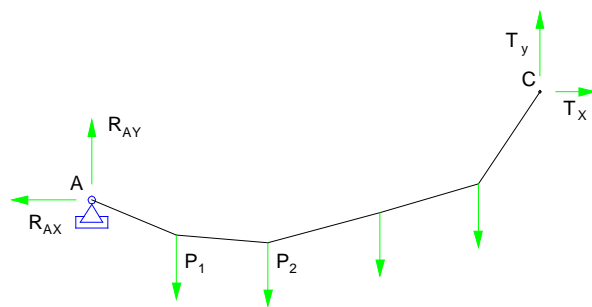
Para que el sistema se encuentre en equilibrio, la sumatoria de fuerzas horizontales debe ser nula. Como todas las cargas son verticales, entonces las componentes horizontales de las reacciones de vínculo externo deberán ser iguales y de sentidos opuestos.

$$\sum_n F_x = 0 = R_{Ax} - R_{Bx} + \sum_j P_{x_j} \qquad \sum_j P_{x_j} = 0 \qquad R_{Ax} = R_{Bx}$$

Si ahora cortamos el cable en un punto cualquiera "C" y ponemos en evidencia las componentes de la tensión que actúa en el mismo, del planteo de la misma ecuación de equilibrio surge:

$$\sum_n F_x = 0 = R_{Ax} - T_x + \sum_j P_{x_j}$$

$$\sum_j P_{x_j} = 0 \qquad R_{Ax} = T_x$$



Entonces resulta,  $R_a=R_b=T_x=H$ , donde H es una constante cuya magnitud representa la componente horizontal de la tensión actuante en cualquier punto del cable.

Sea la siguiente nomenclatura,

$$\sum_n M_B = \text{suma de los momentos respecto al punto B de todas las cargas } P_i$$

$$\sum_n M_C = \text{suma de momentos respecto al punto C del cable de todas las cargas } P_i \text{ que actúan a su izquierda}$$

Tomando momentos respecto al punto extremo B de todas las fuerzas que actúan sobre el cable obtenemos,

$$H \cdot L \cdot \tan(\gamma) + R_{Ay} \cdot L - \sum_n M_B = 0$$

de donde podemos despejar el valor de la reacción de vínculo vertical en A.

$$R_{Ay} = \frac{\sum_n M_B}{L} - H \cdot \tan(\gamma)$$

Si ahora tomando momentos respecto al punto arbitrario C, de todas las fuerzas que actúan en la parte del cable a la izquierda de C obtenemos,

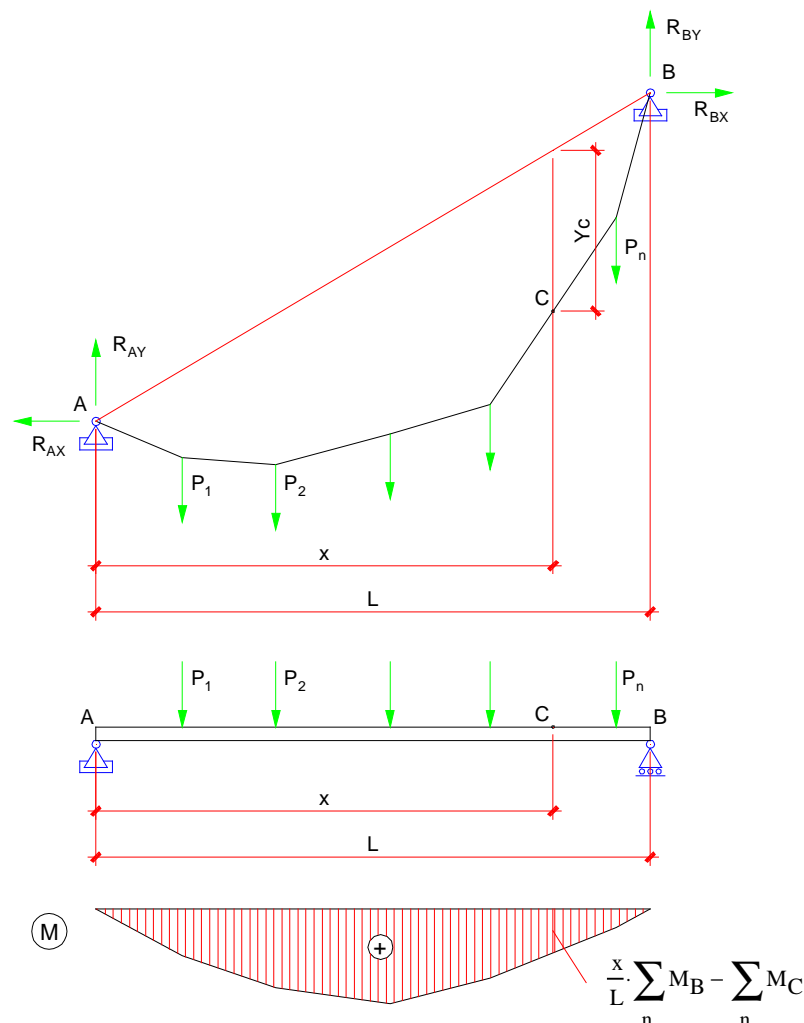
$$H(x \cdot \tan(\gamma) - y_c) + R_{Ay} \cdot x - \sum_n M_C = 0$$

Reemplazando el valor de  $R_{Ay}$  y simplificando se obtiene

$$H \cdot y_c = \frac{x}{L} \cdot \sum_n M_B - \sum_n M_C$$

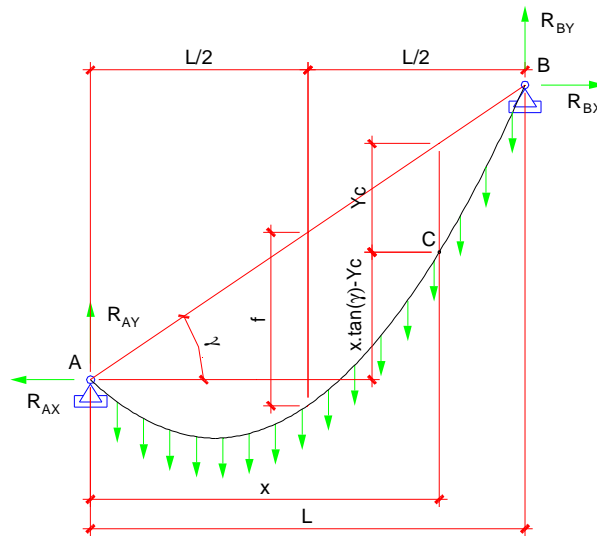
En el primer miembro tenemos a la constante H por la distancia vertical desde el punto C del cable a la cuerda AB. El segundo miembro de la ecuación es igual al momento flector que se produciría en C si se aplicaran las cargas  $P_i$  en una viga apoyada en sus extremos de luz L, y C fuese un punto de esta viga imaginaria, situado a una distancia x del apoyo izquierdo. De esta expresión se deduce el siguiente teorema general del cable:

*“En un punto cualquiera de un cable sometido a cargas verticales, el producto de la componente horizontal de la tensión que soporta el cable por la distancia vertical desde ese punto a la cuerda, es igual al momento flector que se produciría en esa sección si las cargas que soporta el cable actuasen sobre una viga apoyada en sus extremos, de la misma luz que él.”*



**2- Cables uniformemente cargados por unidad horizontal de longitud**

Esquema de análisis



Siendo  $w$  el valor de la carga uniformemente distribuida,

$$\sum_n M_B = w \cdot L \cdot \frac{L}{2} \quad \text{momento respecto al punto B de la carga distribuida}$$

$$\sum_n M_C = w \cdot x \cdot \frac{x}{2} \quad \text{momento respecto al punto C de la carga distribuida a la izquierda de C}$$

Aplicando el teorema general del cable se obtiene  $H \cdot y_C = \frac{x}{L} \cdot \sum_n M_B - \sum_n M_C$

$$H \cdot y_C = \frac{w \cdot L \cdot x}{2} - \frac{w \cdot x^2}{2}$$

Denominando "f" al valor de  $y_C$  en el centro del tramo. Esta distancia "f" se la conoce como flecha del cable y se mide siempre en forma vertical. Para el centro del vano, donde

$$x = \frac{L}{2} \quad y_C = f \quad \text{la ecuación anterior se reduce a} \quad H = \frac{w \cdot L^2}{8f}$$

Recordemos que esta relación es válida tanto si la cuerda del cable es inclinada como horizontal y es de gran importancia. Permite resolver un gran número de estructuras que se encuentran sometidas al tipo de cargas en estudio y también permite resolver en forma simplificada el caso de un cable sometido a su peso propio cuando la relación flecha / longitud es baja, que como veremos más adelante presenta en su desarrollo un modelo matemático de mayor complejidad.

Reemplazando el valor de H en la ecuación anterior obtenemos  $y_C = \frac{4 \cdot f \cdot x}{L^2} \cdot (L - x)$

Esta ecuación define la forma del cable referida a la cuerda en función de la flecha.

A veces se prefiere utilizar como eje de referencia a la horizontal. Si se toma origen en O de los ejes en el extremo izquierdo del cable, se puede utilizar la siguiente relación:

$$y = x \cdot \tan(\gamma) - y_C \quad \text{sustituyendo } y_C \text{ de la ecuación anterior} \quad y = \frac{4 \cdot f \cdot x}{L^2} \cdot (x - L) + x \tan(\gamma)$$

### Tensión en el cable uniformemente cargado

La fuerza en cualquier punto del cable es axial. Si consideramos un elemento diferencial del cable de longitud  $ds$  y proyección horizontal  $dx$  la tensión  $T(x)$  en el cable a una distancia  $x$  del origen estará dada por

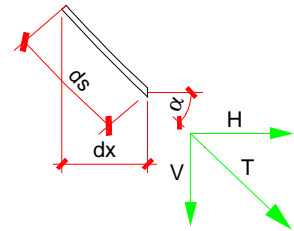
$$\cos(\alpha) = \frac{T(x)}{H} = \frac{ds}{dx} \quad T(x) = H \cdot \frac{ds}{dx}$$

Siendo  $y = \frac{4 \cdot f \cdot x}{L^2} \cdot (x - L) + x \cdot \tan(\gamma)$   $y = \frac{4 \cdot f \cdot x^2}{L^2} - \frac{4 \cdot f \cdot x}{L} + x \cdot \tan(\gamma)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8 \cdot f \cdot x}{L^2} - 4 \cdot \frac{f}{L} + \tan(\gamma) \quad \text{donde} \quad \frac{f}{L} \quad \text{es la llamada relación de flecha}$$

Además, como  $ds^2 = dx^2 + dy^2$   $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$

$$T(x) = H \cdot \sqrt{1 + \frac{64f^2 \cdot x^2}{L^4} + 16 \frac{f^2}{L^2} + \tan(\gamma)^2 - \frac{64f^2 \cdot x}{L^3} + \frac{16f \cdot x}{L^2} \cdot \tan(\gamma) - 8 \cdot \frac{f}{L} \cdot \tan(\gamma)}$$



La máxima tensión se producirá en un extremo del cable

Para  $x = 0$   $T_{A\text{máx}} = H \cdot \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{L^2} + \tan(\gamma)^2 - 8 \cdot \frac{f}{L} \cdot \tan(\gamma)} = H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{L} - \tan(\gamma)\right)^2}$

Para  $x = L$   $T_{B\text{máx}} = H \cdot \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{L^2} + \tan(\gamma)^2 + 8 \cdot \frac{f}{L} \cdot \tan(\gamma)} = H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{L} + \tan(\gamma)\right)^2}$

### Longitud del cable uniformemente cargado

Si  $S$  es la longitud del cable  $S = \int_0^L ds = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{8 \cdot f \cdot x}{L^2} - 4 \cdot \frac{f}{L} + \tan(\gamma)\right)^2} dx$

Para un cable con los extremos al mismo nivel la integral vale:

$$S = \frac{L}{2} \cdot \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{L^2}} + \frac{L^2}{8 \cdot f} \cdot \ln \left( \frac{4f}{L} + \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{L^2}} \right)$$

Para un cable con extremos a distintos nivel, el valor de la integral se puede expresar en términos de las tensiones actuantes en los extremos A y B de la siguiente forma:

$$S = \frac{L^2}{16f \cdot H} \left[ T_A \cdot \sqrt{\left(\frac{T_A}{H}\right)^2 - 1} + T_B \cdot \sqrt{\left(\frac{T_B}{H}\right)^2 - 1} + H \cdot \ln \left( \frac{T_B + \sqrt{T_B^2 - H^2}}{T_A - \sqrt{T_A^2 - H^2}} \right) \right]$$

### 3- Cables uniformemente cargados por unidad de longitud del cable

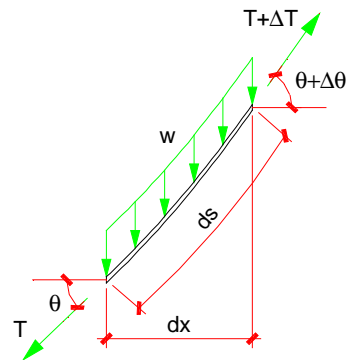
#### Planteo de las ecuaciones de equilibrio

Ecuación de proyección horizontal de fuerzas:

$$\sum_n F_x = 0 = -T \cdot \cos(\theta) + (T + dT) \cdot \cos(\theta + d\theta)$$

Ecuación de proyección vertical de fuerzas

$$\sum_n F_y = 0 = -T \cdot \sin(\theta) + (T + dT) \cdot \sin(\theta + d\theta) - w \cdot ds$$



Para operar con estas expresiones se utilizarán las siguientes propiedades:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Desarrollo del polinomio de Taylor de una función entorno al punto  $X_0$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{d}{dx} f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \cdot \frac{d^2}{dx^2} f(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \cdot \frac{d^3}{dx^3} f(x_0) \dots \frac{(x - x_0)^n}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} f(x_0)$$

Desarrollo del polinomio de Taylor de las funciones trigonométricas entorno al origen

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \dots 0$$

$$\sin(\alpha) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \dots 0$$

Si se evalúa  $d\theta$  despreciando diferenciales de segundo orden obtenemos

$$\cos(d\theta) \approx 1 \quad \sin(d\theta) \approx d\theta$$

#### Tratamiento de la ecuación de proyección horizontal de fuerzas:

$$\sum_n F_x = 0 = -T \cdot \cos(\theta) + (T + dT) \cdot \cos(\theta + d\theta)$$

Si se desarrolla  $\cos(\theta+d\theta)$  y se divide por  $dx$  se obtiene

$$\frac{-T \cdot \cos(\theta) + (T + dT) \cdot (\cos(\theta) \cdot \cos(d\theta) - \sin(\theta) \cdot \sin(d\theta))}{dx} = 0$$

$$\frac{-T \cdot \cos(\theta) + (T + dT) \cdot (\cos(\theta) - \sin(\theta) \cdot d\theta)}{dx} = 0$$

Simplificando

$$\frac{dT \cdot \cos(\theta) - T \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta - dT \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta}{dx} = 0$$

Despreciando diferenciales de segundo orden

$$\frac{dT \cdot \cos(\theta) - T \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta}{dx} = 0$$

Finalmente, 
$$\frac{d(T \cdot \cos(\theta))}{dx} = 0$$

Siendo  $H=T \cdot \cos(\theta)$ , entonces se concluye que H permanece constante.

**Tratamiento de la ecuación de proyección vertical de fuerzas:**

$$\sum_n F_y = 0 = -T \cdot \sin(\theta) + (T + dT) \cdot \sin(\theta + d\theta) - w \cdot ds$$

Si se desarrolla  $\sin(\theta+d\theta)$  y se divide por dx se obtiene

$$\frac{-T \cdot \sin(\theta) + (T + dT) \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(d\theta) + \cos(\theta) \cdot \sin(d\theta)) - w \cdot ds}{dx} = 0$$

$$\frac{-T \cdot \sin(\theta) + (T + dT) \cdot (\sin(\theta) + \cos(\theta) \cdot d\theta) - w \cdot ds}{dx} = 0$$

$$\frac{-T \cdot \sin(\theta) + T \cdot \sin(\theta) + T \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta + dT \cdot \sin(\theta) + dT \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta - w \cdot ds}{dx} = 0$$

Despreciando diferenciales de segundo orden

$$\frac{T \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta + dT \cdot \sin(\theta) - w \cdot ds}{dx} = 0$$

Entonces,

$$\frac{T \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta + dT \cdot \sin(\theta)}{dx} = w \cdot \frac{ds}{dx}$$

Finalmente, 
$$\frac{d(T \cdot \sin(\theta))}{dx} = w \cdot \frac{ds}{dx}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Reemplazando 
$$\frac{d(T \cdot \sin(\theta))}{dx} = w \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Siendo,  $H = T \cdot \cos(\theta)$        $T = \frac{H}{\cos(\theta)}$

Entonces,  $T \cdot \sin(\theta) = \frac{H \cdot \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = H \cdot \tan(\theta) = H \cdot \frac{dy}{dx}$

Sustituyendo,  $\frac{d\left(H \cdot \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = w \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = w \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Ecuación diferencial del cable

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w}{H} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Realizando en siguiente cambio de variable,  $\frac{dy}{dx} = \sinh(z)$

$$\cosh(z) \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{w}{H} \cdot \sqrt{1 + \sinh^2(z)} = \frac{w}{H} \cdot \cosh(z)$$

entonces  $\frac{dz}{dx} = \frac{w}{H}$

Ecuación en términos de z       $z = \frac{w}{H} \cdot x + C$

Reemplazando  $\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{w}{H} \cdot x + C\right)$

Integrando la expresión anterior alcanzamos la ecuación que describe la forma del cable.

$$y = \frac{H}{w} \cdot \cosh\left(\frac{w}{H} \cdot x + C_1\right) + C_2$$

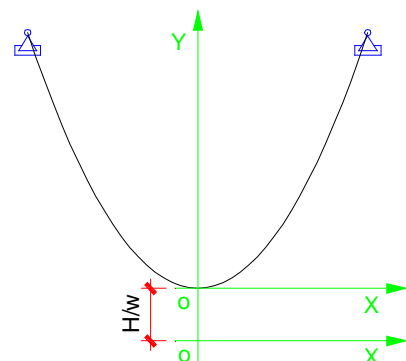
Donde  $C_1$  y  $C_2$  son dos constantes de integración que dependen del sistema de referencia utilizado.

En el caso de colocar el origen de coordenadas del sistema en el punto más bajo del cable (donde  $dy/dx=0$ ) la ecuación toma la siguiente forma:

$$y = \frac{H}{w} \cdot \cosh\left(\frac{w}{H} \cdot x - 1\right)$$

Mientras que si el sistema anterior se desplaza verticalmente de modo que la ordenada del punto más bajo del cable tome un valor igual a  $H/w$ , la ecuación encuentra su expresión más simple.

$$y = \frac{H}{w} \cdot \cosh\left(\frac{w}{H} \cdot x\right)$$



Si ahora queremos hallar la tensión en un punto del cable,

$$\frac{T}{H} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad T = H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Resulta,

$$T = H \cdot \sqrt{1 + \left(\sinh\left(\frac{w}{H} \cdot x + C_1\right)\right)^2}$$

$$T = H \cdot \cosh\left(\frac{w}{H} \cdot x + C_1\right)$$

Para obtener la longitud del cable entre dos puntos se plantea:

$$S = \int_{x_1}^{x_0} 1 ds = \int_{x_1}^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_0} \sqrt{1 + \left(\sinh\left(\frac{w}{H} \cdot x + C_1\right)\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_0} \sqrt{\left(\cosh\left(\frac{w}{H} \cdot x + C_1\right)\right)^2} dx$$

$$S = \frac{H}{w} \cdot \left( \sinh\left(\frac{w}{H} \cdot x_1 + C_1\right) - \sinh\left(\frac{w}{H} \cdot x_0 + C_1\right) \right)$$

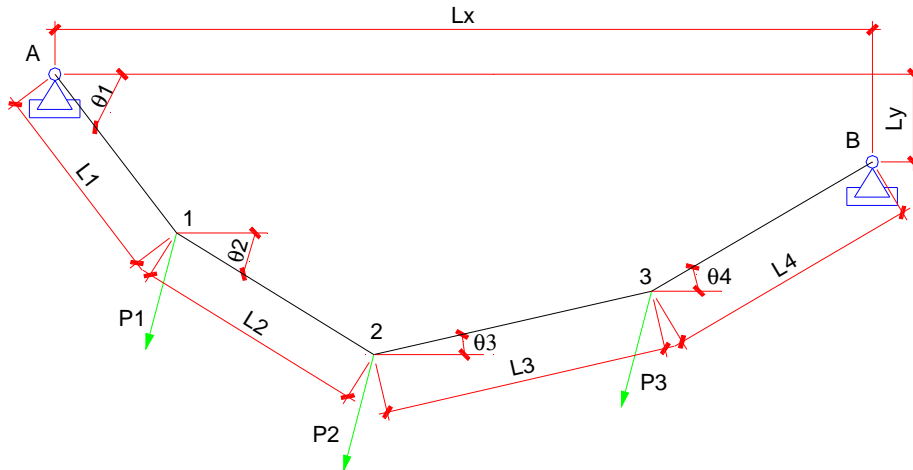
### Bibliografía:

- Norris y Wilbur. Análisis Elemental de Estructuras. Segunda edición
- Russel C. Hibbeler. Mecánica vectorial para ingenieros - Estática. Décima edición.
- Arthur Boresi – Richard Schmidt. Ingeniería mecánica – Estática.
- Bedford – Fowler. Estática – Mecánica para ingeniería.
- Irving Shames. Mecánica para ingenieros – Estática. Cuarta edición.

## Ejemplos de cálculo

### 1- Cable bajo la acción de cargas puntuales de direcciones arbitrarias

Esquema de análisis:



#### Datos del problema:

Número de tramos en que se divide el cable:  $n := 4$

Índice de cada uno de los tramos:  $j := 1, 2.. n$

Índice de cada uno de los nodos:  $i := 1, 2.. n - 1$

Distancia horizontal entre apoyos:  $L_x := 20\text{m}$

Distancia vertical entre apoyos:  $L_y := 2\text{m}$

Vector de longitud de cada uno de los tramos:  $L := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{m}$

Vector de cargas horizontales aplicadas en cada nodo:  $P_x := \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$

Vector de cargas verticales aplicadas en cada nodo:  $P_y := \begin{pmatrix} -75 \\ -100 \\ -75 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$

#### Incógnitas:

Se busca hallar:

- 1- Tensiones actuantes en cada tramo
- 2- Forma del cable cargado

**Resolución:**

**Planteo de las ecuaciones de equilibrio:**

Siendo T el vector de las tensiones de cada uno de los n tramos y  $\theta$  el vector de ángulos correspondientes, definimos:

Vector de componentes horizontales de tensiones:  $T_x(\theta, T) := \overrightarrow{(\cos(\theta) \cdot T)}$

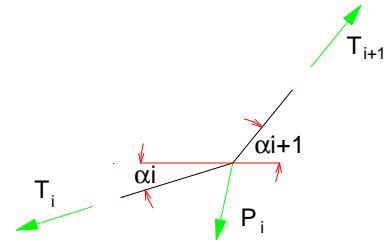
Vector de componentes verticales de tensiones:  $T_y(\theta, T) := \overrightarrow{(\sin(\theta) \cdot T)}$

Ecuaciones de equilibrio en cada nodo:

Nodo i:  $T_{x_i} - T_{x_{i+1}} = P_{x_i}$        $T_{y_i} - T_{y_{i+1}} = P_{y_i}$

Nodo i+1:  $T_{x_{i+1}} - T_{x_{i+2}} = P_{x_{i+1}}$        $T_{y_{i+1}} - T_{y_{i+2}} = P_{y_{i+1}}$

Nodo i+2:  $T_{x_{i+2}} - T_{x_{i+3}} = P_{x_{i+2}}$        $T_{y_{i+2}} - T_{y_{i+3}} = P_{y_{i+2}}$



El sistema puede dividirse en dos subsistemas, uno por cada dirección. A su vez cada subsistema puede expresarse en forma matricial de la siguiente manera:

Ecuaciones de equilibrio:  $C \cdot T_x(\theta, T) = P_x$        $C \cdot T_y(\theta, T) = P_y$

Donde C es una matriz de coeficientes de los subsistemas de ecuaciones

Definición de la matriz de coeficientes:  $C_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ -1 & \text{if } i + 1 = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$        $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

**Planteo de las ecuaciones de geométricas:**

Vector de componentes horizontales de longitudes:  $L_x(\theta) := \overrightarrow{(\cos(\theta) \cdot L)}$

Vector de componentes verticales de longitudes:  $L_y(\theta) := \overrightarrow{(\sin(\theta) \cdot L)}$

Ecuaciones de compatibilidad geométrica:  $\sum_j L_x(\theta)_j = L_x$        $\sum_j L_y(\theta)_j = L_y$

**Resolución del sistema:**

La resolución del sistema se hará empleando las herramientas del Mathcad.

Valores de arranque para la resolución iterativa del sistema de ecuaciones  $\theta := \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}^\circ$        $T := \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} \text{ kN}$

Given (apertura del bloque de resolución)

Ecuaciones geométricas a satisfacer:  $\sum_j L_x(\theta)_j = L_x$   $\sum_j L_y(\theta)_j = L_y$

Ecuaciones de equilibrio nodal a satisfacer:  $C \cdot T_x(\theta, T) = P_x$   $C \cdot T_y(\theta, T) = P_y$

Función de resolución del bloque:  $\begin{pmatrix} \theta \\ T \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \text{Find}(\theta, T)_1 \\ \text{Find}(\theta, T)_2 \end{pmatrix}$

Vector resultante de tensiones actuantes en cada tramo:  $T = \begin{pmatrix} 233.04 \\ 205.38 \\ 205.66 \\ 237.85 \end{pmatrix} \text{ kN}$

Vector resultante de ángulos de cada tramo:  $\theta = \begin{pmatrix} -26.7 \\ -8.3 \\ 20.0 \\ 37.7 \end{pmatrix}^\circ$

**Obtención de las coordenadas de cada nodo:**

Coordenadas X:

$X_1 := 0\text{m}$   $X_{j+1} := X_j + \cos(\theta_j) \cdot L_j$

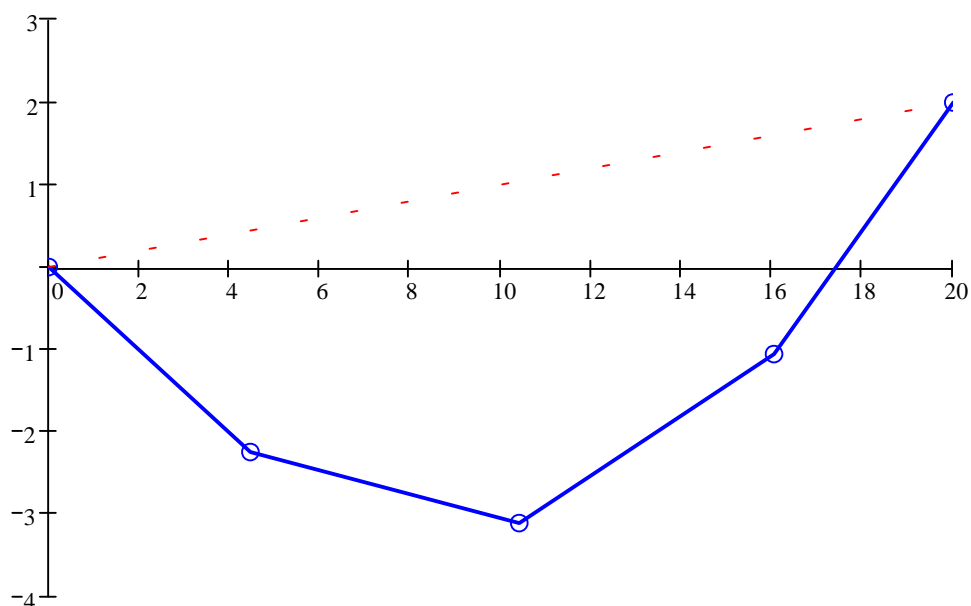
$X^T = (0.00 \ 4.47 \ 10.41 \ 16.04 \ 20.00) \text{m}$

Coordenadas Y:

$Y_1 := 0\text{m}$   $Y_{j+1} := Y_j + \sin(\theta_j) \cdot L_j$

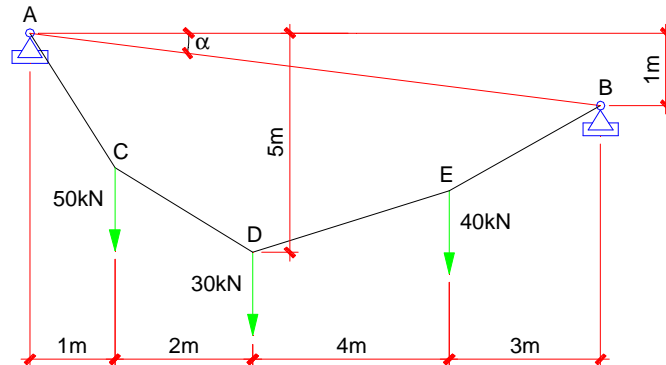
$Y^T = (0.00 \ -2.24 \ -3.11 \ -1.06 \ 2.00) \text{m}$

**Forma del cable cargado:**



## 2- Cable bajo la acción de cargas puntuales verticales

Esquema de análisis:



### Datos:

Luz del cable:  $L := 10\text{m}$

Diferencia de altura entre apoyos:  $\Delta h := -1\text{m}$

Ángulo que forma la cuerda AB:  $\alpha := \text{atan}\left(\frac{\Delta h}{L}\right) \quad \alpha = -5.711^\circ$

Cargas actuantes:  $P_C := 50\text{kN}$  en  $x_C := 1\text{m}$

$P_D := 30\text{kN}$   $x_D := 3\text{m}$

$P_E := 40\text{kN}$   $x_E := 7\text{m}$

### Incógnitas:

Se busca hallar:

- 1- Tensiones actuantes en cada tramo
- 2- Forma del cable cargado

### Resolución:

#### Cálculo de la componente horizontal de tensión en el cable

Teorema general del cable:  $H \cdot y_D = \frac{x_D}{L} \cdot \sum_n M_B - \sum_n M_D$

Evaluación de los términos:

Distancia de la cuerda al punto D:  $y_D := 5\text{m} + x_D \cdot \tan(\alpha) \quad y_D = 4.7\text{m}$

Momento de las fuerzas respecto a B:  $\sum_n M_B = 3\text{m} \cdot P_E + 7\text{m} \cdot P_D + 9\text{m} \cdot P_C = 780\text{kN} \cdot \text{m}$

Momento de las fuerzas a la izquierda de C respecto este punto:  $\sum_n M_D = 2\text{m} \cdot P_C = 100\text{kN} \cdot \text{m}$

Componente horizontal de la tensión en el cable:

$$H := \frac{\frac{x_D}{L} \cdot 780 \text{ kN} \cdot \text{m} - 100 \text{ kN} \cdot \text{m}}{y_D} \quad H = 28.511 \text{ kN}$$

**Cálculo de las reacciones de vínculo verticales:**

Reacción de vínculo vertical en A

$$R_{a_y} = \frac{\sum^n M_B}{L} - H \cdot \tan(\alpha) \quad R_{a_y} := \frac{780 \text{ kN} \cdot \text{m}}{L} - H \cdot \tan(\alpha) \quad R_{a_y} = 80.851 \text{ kN}$$

Reacción de vínculo vertical en B

$$R_{b_y} = \sum^n P_i - R_{a_y} \quad R_{b_y} := P_C + P_D + P_E - R_{a_y} \quad R_{b_y} = 39.149 \text{ kN}$$

**Cálculo de la tensión actuante en cada tramo:**

Tensión en el tramo AC:

$$T_{AC} := \sqrt{R_{a_y}^2 + H^2} \quad T_{AC} = 85.731 \text{ kN}$$

Tensión en el tramo CD:

$$T_{CD} := \sqrt{(R_{a_y} - P_C)^2 + H^2} \quad T_{CD} = 42.008 \text{ kN}$$

Tensión en el tramo DE:

$$T_{DE} := \sqrt{(R_{a_y} - P_C - P_D)^2 + H^2} \quad T_{DE} = 28.523 \text{ kN}$$

Tensión en el tramo EB:

$$T_{EB} := \sqrt{R_{b_y}^2 + H^2} \quad T_{EB} = 48.43 \text{ kN}$$

**Cálculo de la flecha de cada nodo**

Flecha en C:

$$y_C := \frac{1}{H} \cdot \left( \frac{x_C}{L} \cdot 780 \text{ kN} \cdot \text{m} - 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \right) \quad y_C = 2.736 \text{ m}$$

Flecha en E:

$$y_E := \frac{1}{H} \cdot \left[ \frac{x_E}{L} \cdot 780 \text{ kN} \cdot \text{m} - (4 \text{ m} \cdot P_D + 6 \text{ m} \cdot P_C) \right] \quad y_E = 4.419 \text{ m}$$

**Forma del cable cargado:**

Distancias horizontales

$$X := \begin{pmatrix} 0\text{m} \\ x_C \\ x_D \\ x_E \\ L \end{pmatrix}$$

Flechas

$$Y := \begin{pmatrix} 0\text{m} \\ y_C \\ y_D \\ y_E \\ 0 \end{pmatrix}$$

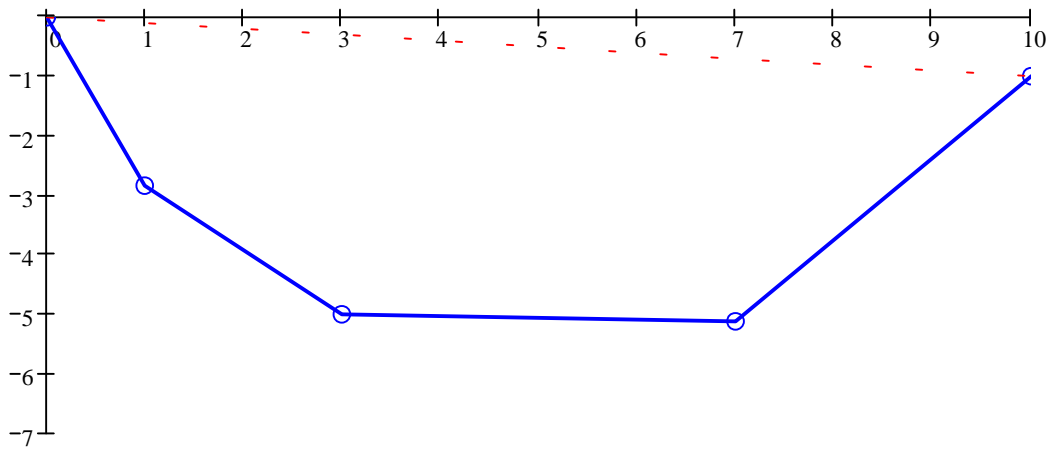
Distancias verticales con respecto a la horizontal

$$Y' := Y - \tan(\alpha) \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 1.00 \\ 3.00 \\ 7.00 \\ 10.00 \end{pmatrix} \text{ m}$$

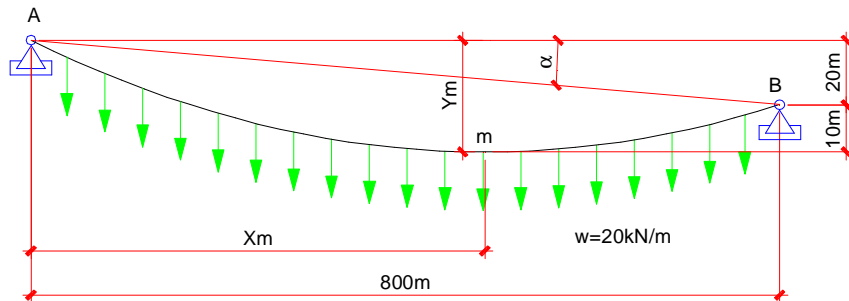
$$Y = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 2.74 \\ 4.70 \\ 4.42 \\ 0.00 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$Y' = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 2.84 \\ 5.00 \\ 5.12 \\ 1.00 \end{pmatrix} \text{ m}$$



### 3- Cable bajo la acción de una carga distribuida por unidad horizontal de longitud.

Esquema de análisis:



#### Datos:

Luz del cable:  $L := 800\text{m}$

Diferencia de altura entre apoyos:  $\Delta h := -20\text{m}$

Ángulo que forma la cuerda AB:  $\alpha := \text{atan}\left(\frac{\Delta h}{L}\right) \quad \alpha = -1.432^\circ$

Punto más bajo del cable:  $y_m := 30\text{m}$

Carga actuante:  $w := 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

#### Incógnitas:

Se busca hallar:

- 1- Tensiones actuantes en los extremos
- 2- Longitud del cable

#### Resolución:

##### Cálculo de la componente horizontal de la tensión en el cable

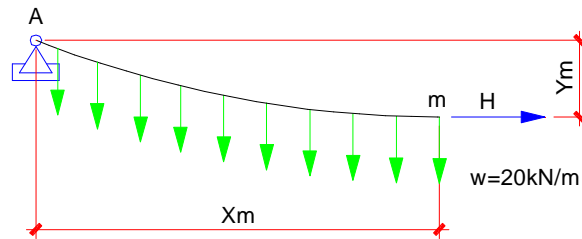
Recordando la extensión de la ecuación general del cable para una carga distribuida por unidad horizontal de longitud tenemos,

$$H \cdot (y_m + x_m \cdot \tan(\alpha)) = \frac{w \cdot L}{2} \cdot x_m - \frac{w \cdot x_m^2}{2}$$

El término  $(y_m + x_m \cdot \tan(\alpha))$  representa la distancia vertical en la coordenada  $x_m$  del cable hasta la cuerda

Por otro lado, sabiendo que el punto más bajo del cable se encuentra en la coordenada  $y_m$ , podemos plantear la siguiente ecuación de equilibrio.

$$\sum_A M_i = w \cdot x_m \cdot \frac{x_m}{2} - y_m \cdot H = 0$$



Tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas: la distancia  $x_m$  y la componente horizontal de tensión del cable  $H$ .

La resolución del sistema se hará empleando las herramientas del Mathcad.

Valores de arranque para la resolución iterativa del sistema de ecuaciones

Coordenada  $x_m$  de arranque  $x_m := \frac{L}{2}$

Componente horizontal de arranque  $H := 80000 \text{ kN}$

Given (apertura del bloque de resolución)

Ecuación del cable a satisfacer:  $H \cdot (y_m + x_m \cdot \tan(\alpha)) = \frac{w \cdot L}{2} \cdot x_m - \frac{w \cdot x_m^2}{2}$

Ecuación de equilibrio a satisfacer:  $w \cdot x_m \cdot \frac{x_m}{2} - y_m \cdot H = 0$

Función de resolución del bloque:  $\begin{pmatrix} x_m \\ H \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \text{Find}(x_m, H)_1 \\ \text{Find}(x_m, H)_2 \end{pmatrix}$

Valores resultantes del sistema,

Coordenada  $x_m$ :  $x_m = 507.18 \text{ m}$

Componente horizontal de tensión:  $H = 85743.7 \text{ kN}$

**Determinación de las características del cable:**

Flecha del cable:  $f := \frac{w \cdot L^2}{8 \cdot H}$   $f = 18.66 \text{ m}$

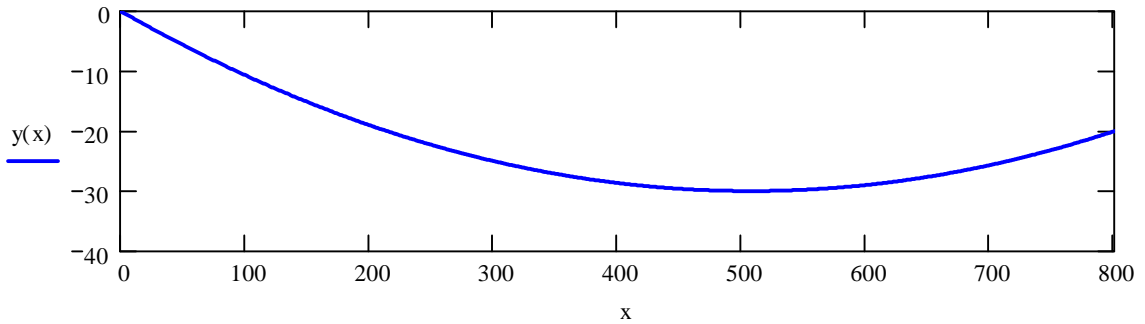
Tensión en A:  $T_A := H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{L} - \tan(\alpha)\right)^2}$   $T_A = 86341.7 \text{ kN}$

Tensión en B:  $T_B := H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{L} + \tan(\alpha)\right)^2}$   $T_B = 85943.5 \text{ kN}$

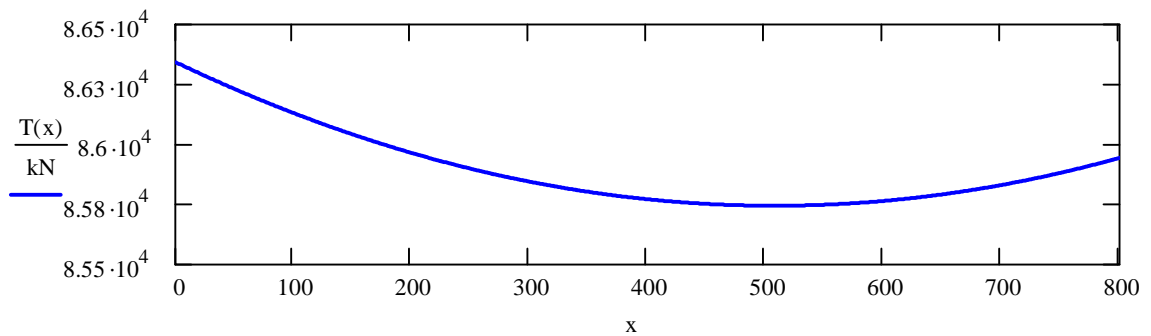
Longitud del cable: 
$$S := \frac{L^2}{16 \cdot f \cdot H} \left[ T_A \cdot \sqrt{\left(\frac{T_A}{H}\right)^2 - 1} + T_B \cdot \sqrt{\left(\frac{T_B}{H}\right)^2 - 1} + H \cdot \ln \left( \frac{T_B + \sqrt{T_B^2 - H^2}}{T_A - \sqrt{T_A^2 - H^2}} \right) \right]$$

$S = 801.408 \text{ m}$

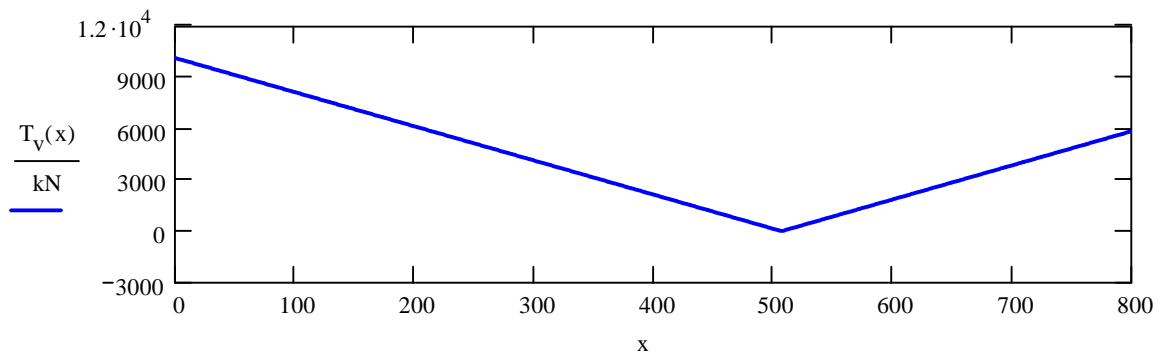
Forma del cable: 
$$y(x) := \frac{4 \cdot f \cdot x}{L^2} \cdot (x - L) + x \cdot \tan(\alpha)$$



Tensiones en el cable: 
$$T(x) := H \cdot \sqrt{1 + \frac{64 \cdot f^2 \cdot x^2}{L^4} + 16 \cdot \frac{f^2}{L^2} + \tan(\alpha)^2 - \frac{64 \cdot f^2 \cdot x}{L^3} + \frac{16 \cdot f \cdot x}{L^2} \cdot \tan(\alpha) - 8 \cdot \frac{f}{L} \cdot \tan(\alpha)}$$

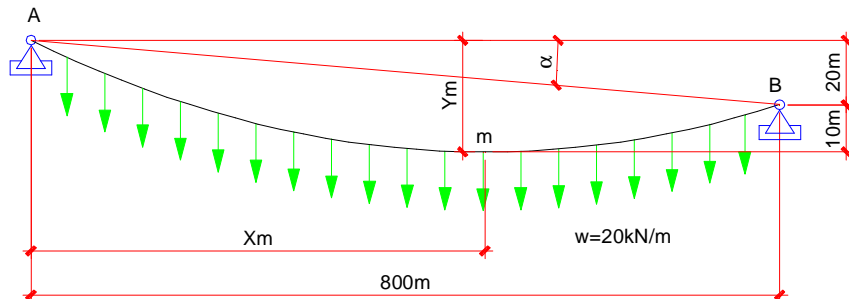


Tensiones verticales en el cable: 
$$T_v(x) := \sqrt{T(x)^2 - H^2}$$



#### 4- Cable bajo la acción de una carga distribuida por unidad de longitud del cable.

Esquema de análisis:



#### Datos:

Luz del cable:  $L := 800\text{m}$

Diferencia de altura entre apoyos:  $\Delta h := -20\text{m}$

Ángulo que forma la cuerda AB:  $\alpha := \text{atan}\left(\frac{\Delta h}{L}\right) \quad \alpha = -1.432^\circ$

Punto más bajo del cable  $y_m := -30\text{m}$

Carga actuante:  $w := 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

#### Incógnitas:

Se busca hallar:

- 1- Tensiones actuantes en los extremos
- 2- Longitud del cable
- 3 - Comparar los resultados con los obtenidos en el problema anterior

#### Resolución:

##### Cálculo de la componente horizontal de tensión en el cable

Ecuación del cable en estudio:  $y(x) = \frac{H}{w} \cdot \cosh\left(\frac{w}{H} \cdot x + C_1\right) + C_2$

Se sabe que:  $y(0\text{m}) = 0 \quad y(L) = -20\text{m}$

$y(x_m) = y_m \quad \frac{d}{dx}y(x_m) = 0$

Podemos formar un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $H$  y  $x_m$ )

La resolución del sistema se hará empleando las herramientas del Mathcad.

Valores de arranque para la resolución iterativa del sistema de ecuaciones

Coordenada  $X_m$  de arranque  $x_m = 507.18 \text{ m}$

Componente horizontal de arranque  $H = 85744 \text{ kN}$

Constante de integración  $C_1$   $C_1 := \frac{-w \cdot x_m}{H}$

Constante de integración  $C_2$   $C_2 := \frac{H}{w} \cdot \cosh(C_1)$

Given (apertura del bloque de resolución)

Ecuaciones a satisfacer:  $0 = \frac{H}{w} \cdot \cosh(C_1) + C_2$

$$-20\text{m} = \frac{H}{w} \cdot \cosh\left(\frac{w}{H} \cdot L + C_1\right) + C_2$$

$$y_m = \frac{H}{w} \cdot \cosh\left(\frac{w}{H} \cdot x_m + C_1\right) + C_2$$

$$0 = \sinh\left(\frac{w}{H} \cdot x_m + C_1\right)$$

Función de resolución del bloque:

$$\begin{pmatrix} x_m \\ H \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \text{Find}(x_m, H, C_1, C_2)_1 \\ \text{Find}(x_m, H, C_1, C_2)_2 \\ \text{Find}(x_m, H, C_1, C_2)_3 \\ \text{Find}(x_m, H, C_1, C_2)_4 \end{pmatrix}$$

Coordenada  $X_m$   $x_m = 507.107 \text{ m}$

Componente horizontal  $H = 85818.7 \text{ kN}$

Constante de integración  $C_1$   $C_1 = -0.118$

Constante de integración  $C_2$   $C_2 = -4320.9 \text{ m}$

**Determinación de las características del cable:**

Expresión de la función de tensión en el cable  $T_c(x) := H \cdot \cosh\left(\frac{w}{H} \cdot x + C_1\right)$

Tensión en A:  $T_{cA} := T_c(0\text{m})$   $T_{cA} = 86418.7 \text{ kN}$

Tensión en B:  $T_{cB} := T_c(L)$   $T_{cB} = 86018.7 \text{ kN}$

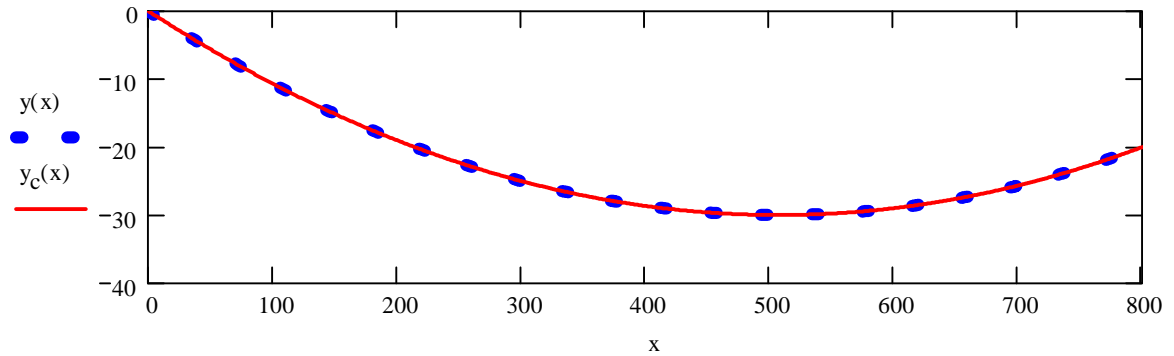
Longitud del cable:  $S_c := \frac{H}{w} \cdot \left( \sinh\left(\frac{w}{H} \cdot L + C_1\right) - \sinh(C_1) \right)$   $S_c = 801.409 \text{ m}$

**Comparación de resultados:**

**Forma del cable:**  $y_c(x) := \frac{H}{w} \cdot \cosh\left(\frac{w}{H} \cdot x + C_1\right) + C_2$

Longitudes: Cable parabólico:  $S = 801.408 \text{ m}$

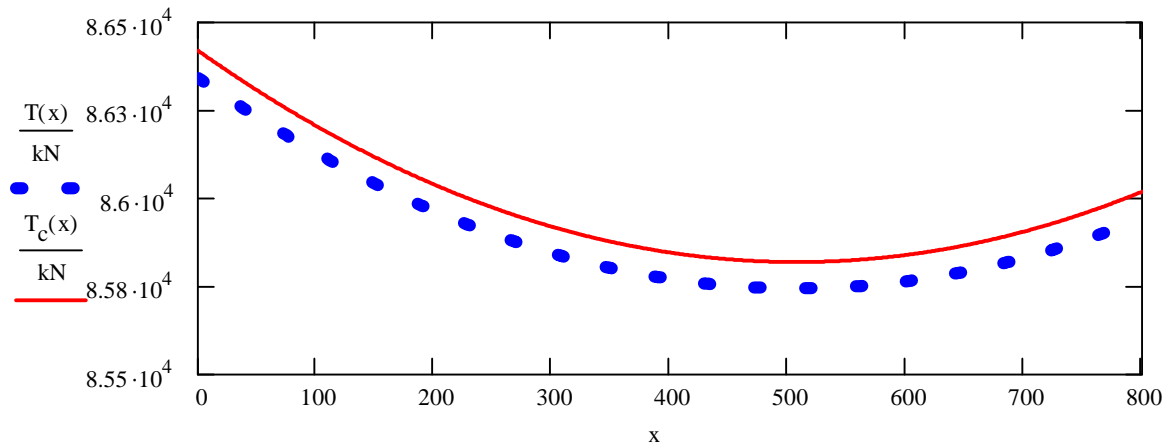
Catenaria:  $S_c = 801.409 \text{ m}$



**Tensiones en el cable:**

En extremos: Cable parabólico:  $T_A = 86341.7 \text{ kN}$        $T_B = 85943.5 \text{ kN}$

Catenaria:  $T_{cA} = 86418.7 \text{ kN}$        $T_{cB} = 86018.7 \text{ kN}$



**Tensiones verticales en el cable:**  $T_{vc}(x) := \sqrt{T_c(x)^2 - H^2}$

