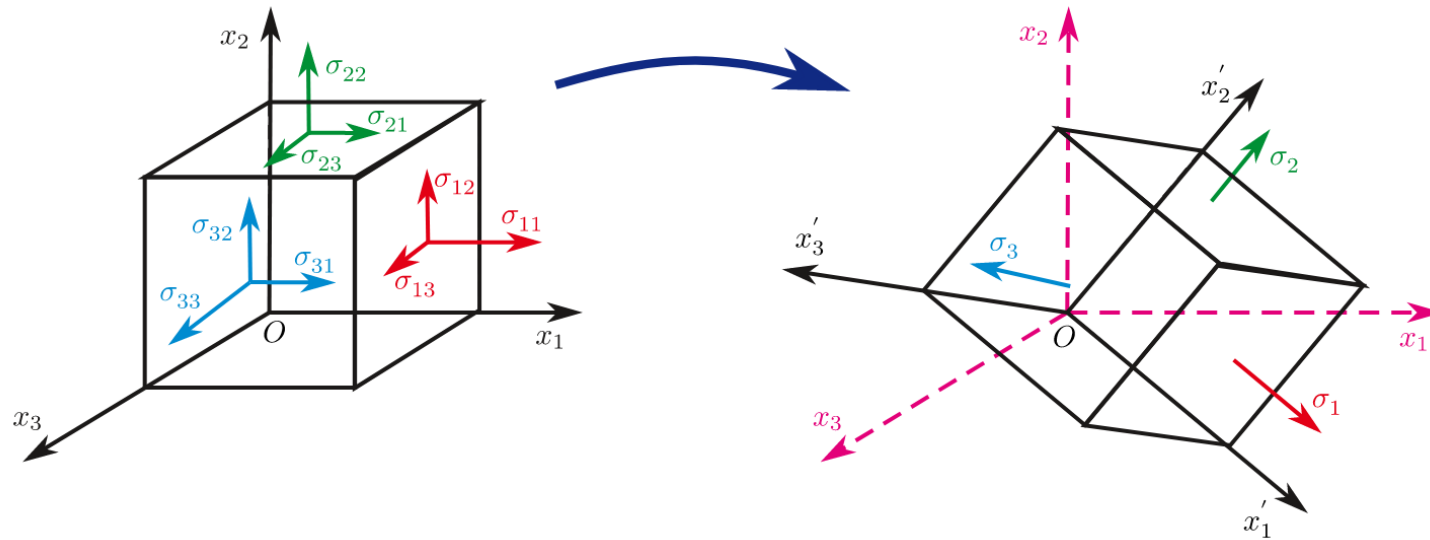




Estado de Tensión



Clara Zaccaria – Catalina Urteche

Repaso teórico



Axil: $\sigma_x = \frac{N}{A}$

Flexión: $\sigma_x = \frac{M_{LN} \cdot v_{LN}}{J_{LN}}$

Torsión: $\tau = \frac{M_T \cdot dist}{J_{TOP}}$ $\tau_{xy} \text{ o } \tau_{xz}$

Corte: $\tau = \frac{Q_{LFQ} \cdot S_{LNQ}}{J_{LNQ} \cdot b}$ $\tau_{xy} \text{ o } \tau_{xz}$

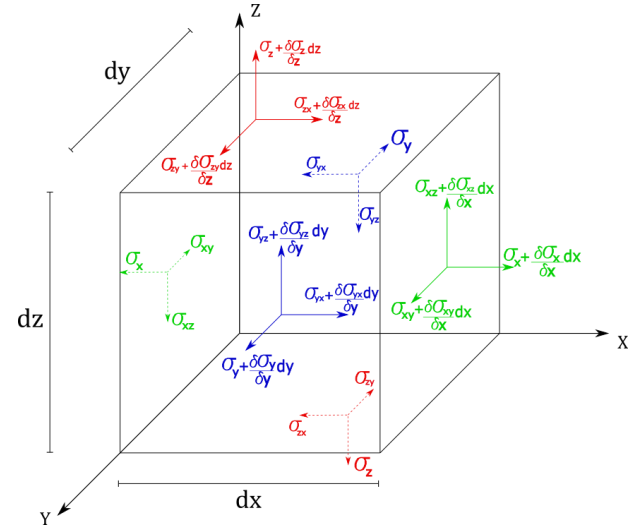
$$T_T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \longrightarrow T_T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Repaso teórico

$$\begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

$$\bar{\rho} = [T_T] \cdot \check{n}$$



Por el teorema de Cauchy: $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

$$T_T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\bar{\rho} = [T_T] \cdot \check{n} \quad |\sigma_n| = \bar{\rho} \cdot \check{n} \quad \overline{\sigma_n} = |\sigma_n| \check{n} \quad \overline{\tau_n} = \bar{\rho} - \overline{\sigma_n}$$

Dirección principal es cuando $\bar{\rho} = \overline{\sigma_n}$ $[T_T] \cdot \check{n} = |\sigma_n| \check{n}$

Tensiones y direcciones principales



$$[T_T] \cdot \check{n}_i = \sigma_i \check{n}_i \quad \longrightarrow \quad ([T_T] - \sigma_i [I]) \cdot \check{n}_i = \underline{0} \quad \longrightarrow \quad \det([M]) = 0$$

Las dirección \check{n}_i son las direcciones principales, y son los autovectores de $[T_T]$

$|\sigma_i|$ son las tensiones principales, y son los autovalores de $[T_T]$

$$\det([M]) = \sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 + I_2 \sigma_i - I_3 = 0$$

Invariantes: $I_1 = \text{tr}(T_T)$ $I_2 = 1/2 (I_1^2 - \text{tr}([T_T] \cdot [T_T]))$ $I_3 = \det(T_T)$

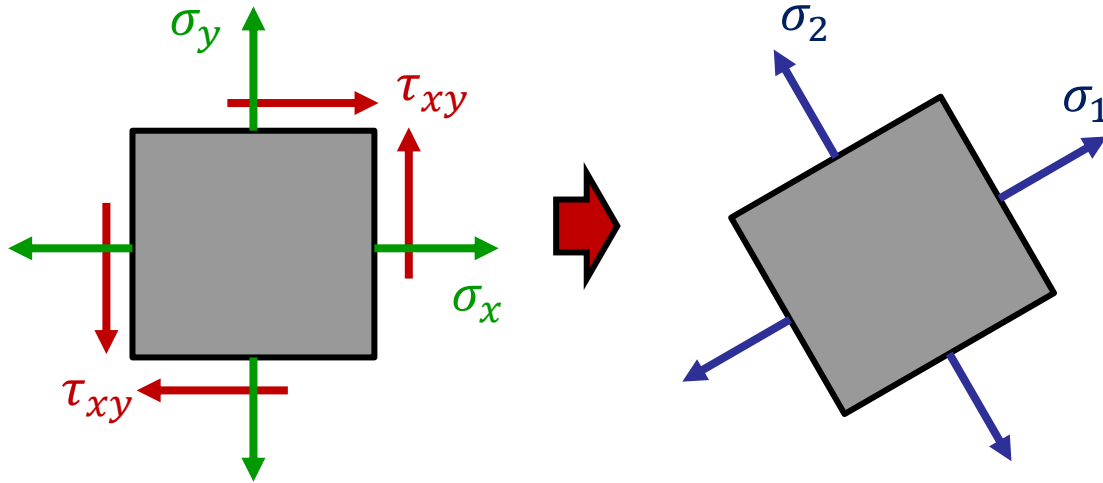
Clasificación del estado tensional:

$I_3 \neq 0$ \longrightarrow Estado triple (Ninguna tensión principal es igual a cero)

$I_3 = 0$ y $I_2 \neq 0$ \longrightarrow Estado doble (Una tensión principal es igual a cero)

$I_3 = 0$ y $I_2 = 0$
y $I_1 \neq 0$ \longrightarrow Estado simple (Dos tensiones principales son iguales a cero)

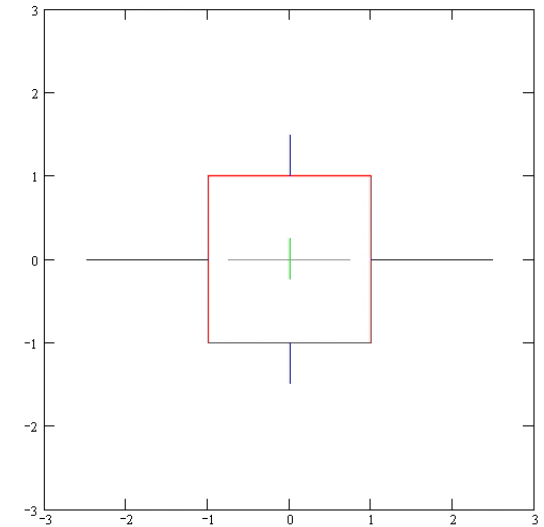
Ejes principales para estado plano



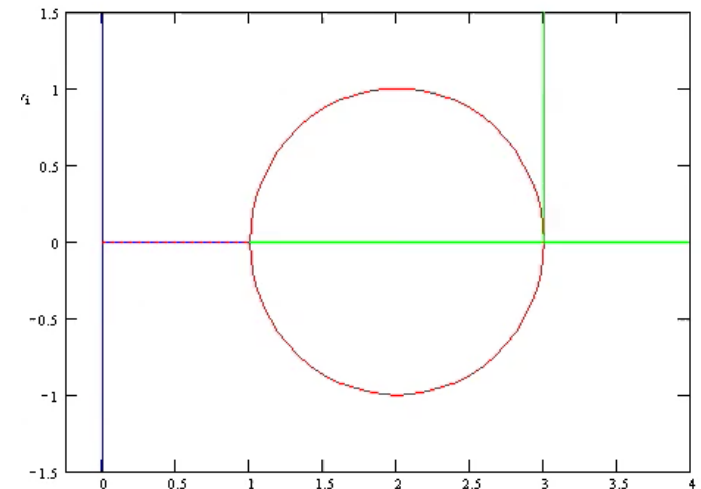
$$T_T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$T_T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Las tensiones principales son los valores máximos y mínimos que tiene mi estado tensional



Estado de tensión

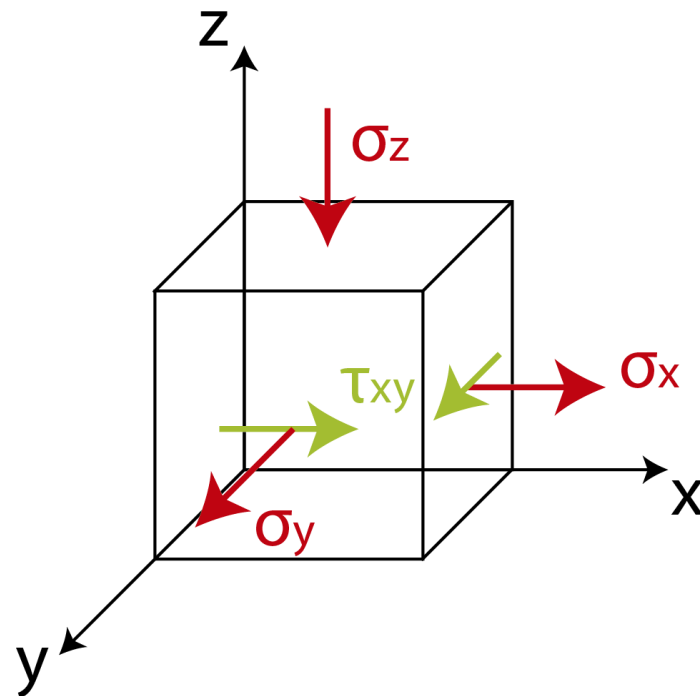


Circunferencia de Mohr

Ejercicio 1: Para el punto “A” de un sólido



- 1) Determinar las tensiones principales.
- 2) Determinar las direcciones principales 1, 2 y 3 calculando los cosenos directores.
- 3) Ídem gráficamente aplicando la construcción de Mohr.



Datos:

- $\sigma_x = 10 \text{ MPa}$
 - $\sigma_y = 10 \text{ MPa}$
 - $\sigma_z = 20 \text{ MPa}$
 - $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 10 \text{ MPa}$
-
- $E = 200000 \text{ MPa}$
 - $\mu = 0,25$
 - $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$

1) Determinar las tensiones principales.



$$[T_T]_{XYZ} = \begin{pmatrix} \sigma_X & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{YX} & \sigma_Y & \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} & \tau_{ZY} & \sigma_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

Planteando la ecuación de Lagrange:

$$\sigma_i^3 - I_1 \cdot \sigma_i^2 + I_2 \cdot \sigma_i - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z$$

$$I_2 = \sigma_X \cdot \sigma_Y - \tau_{XY}^2 + \sigma_Y \cdot \sigma_Z - \tau_{YZ}^2 + \sigma_X \cdot \sigma_Z - \tau_{XZ}^2$$

$$I_3 = \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \sigma_Z + 2 \cdot \tau_{XY} \cdot \tau_{YZ} \cdot \tau_{XZ} - \sigma_X \cdot \tau_{YZ}^2 - \sigma_Y \cdot \tau_{XZ}^2 - \sigma_Z \cdot \tau_{XY}^2$$

¡Observación!

I_2 es la suma de los determinantes menores de $[T_T]$ y I_3 es el determinante de $[T_T]$

Autovalores de $[T_T]$

$$\sigma_1 = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -20 \text{ MPa}$$



$$[T_T]_{123} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

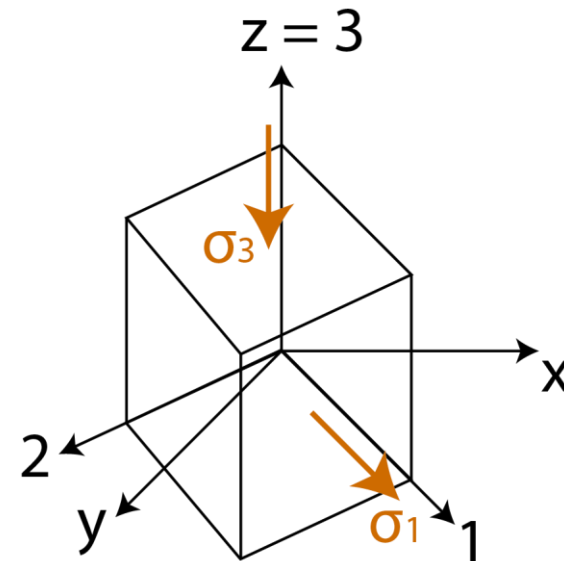
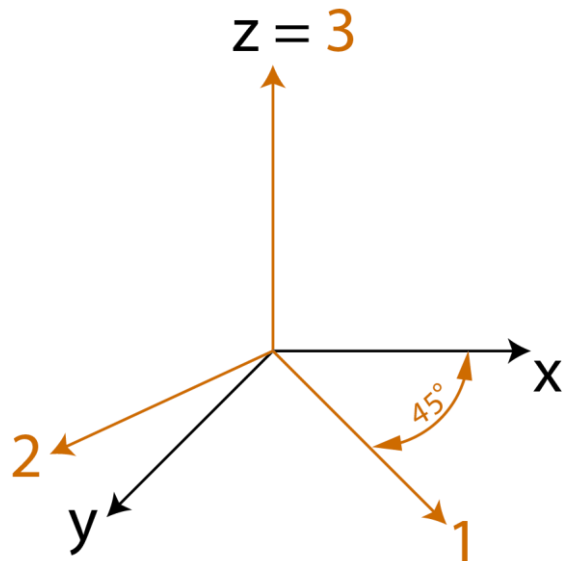
2) Determinar las direcciones principales 1, 2 y 3 calculando los cosenos directores.



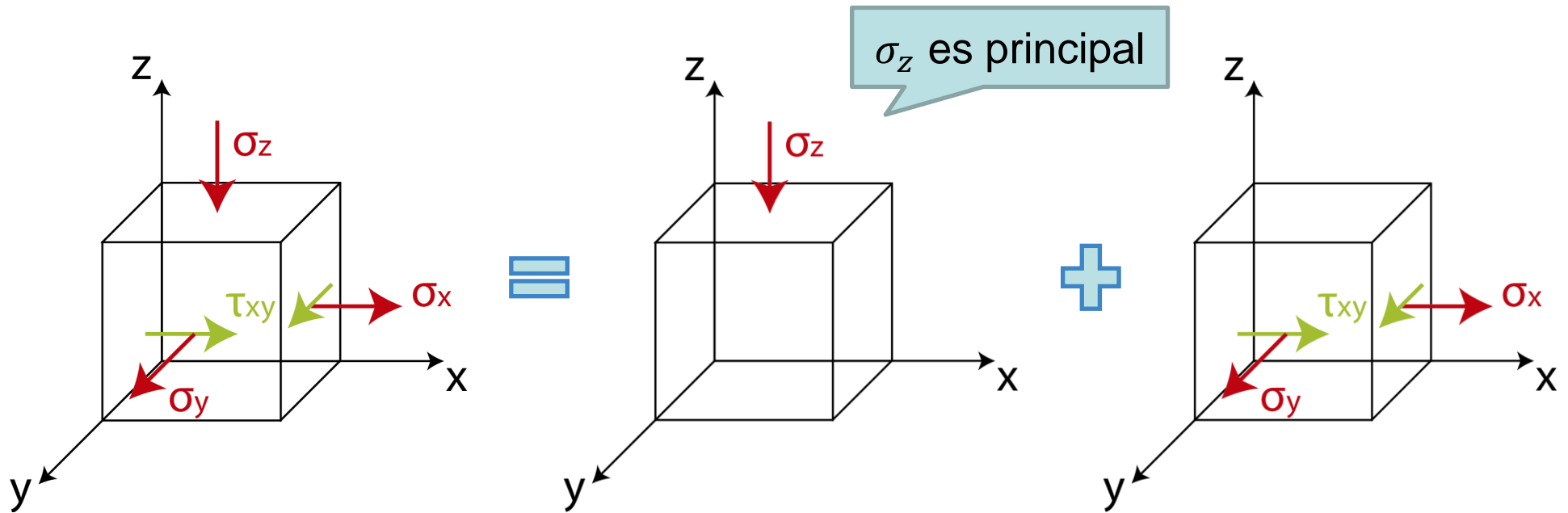
$$\{[T]_T - \sigma_i \cdot [I]\} \cdot \widehat{v}_i = 0 \quad (\text{con } i = 1,2,3)$$

$$\widehat{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,707 \\ 0,707 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \widehat{v}_2 = \begin{pmatrix} -0,707 \\ 0,707 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \widehat{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

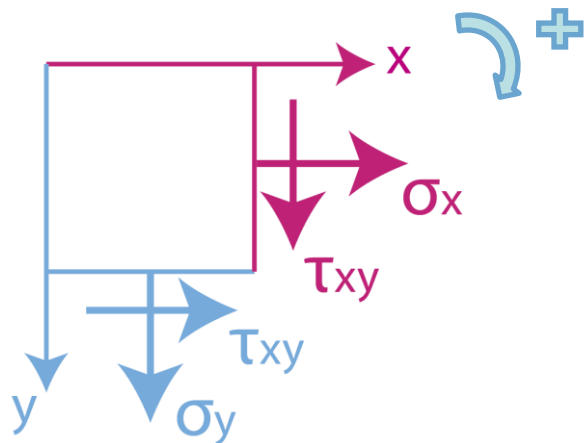
Autovectores de $[T_T]$



3) Ídem gráficamente aplicando la construcción de Mohr.

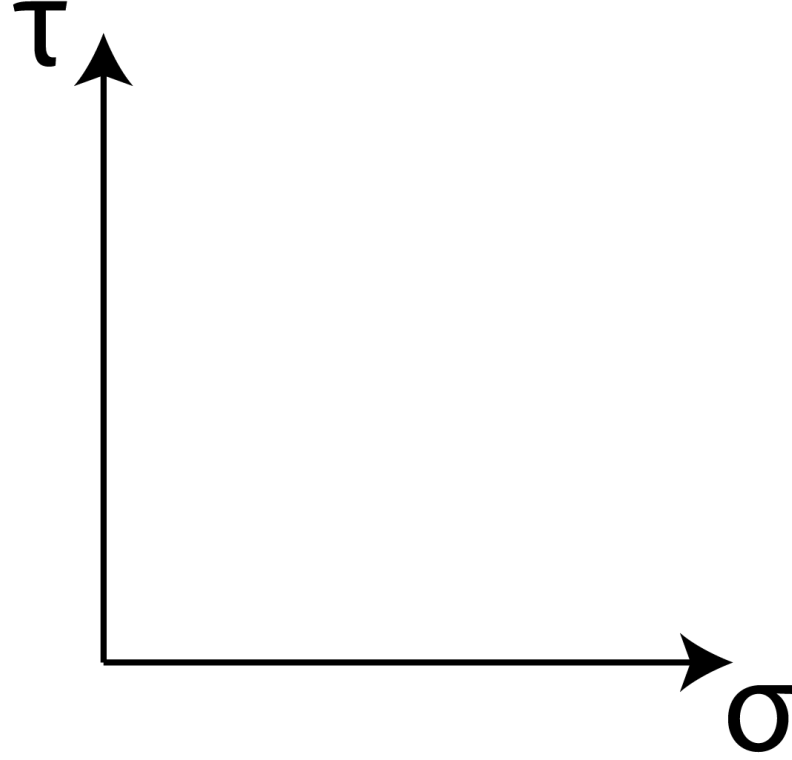
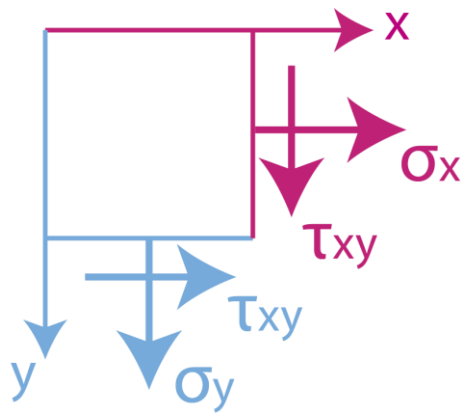


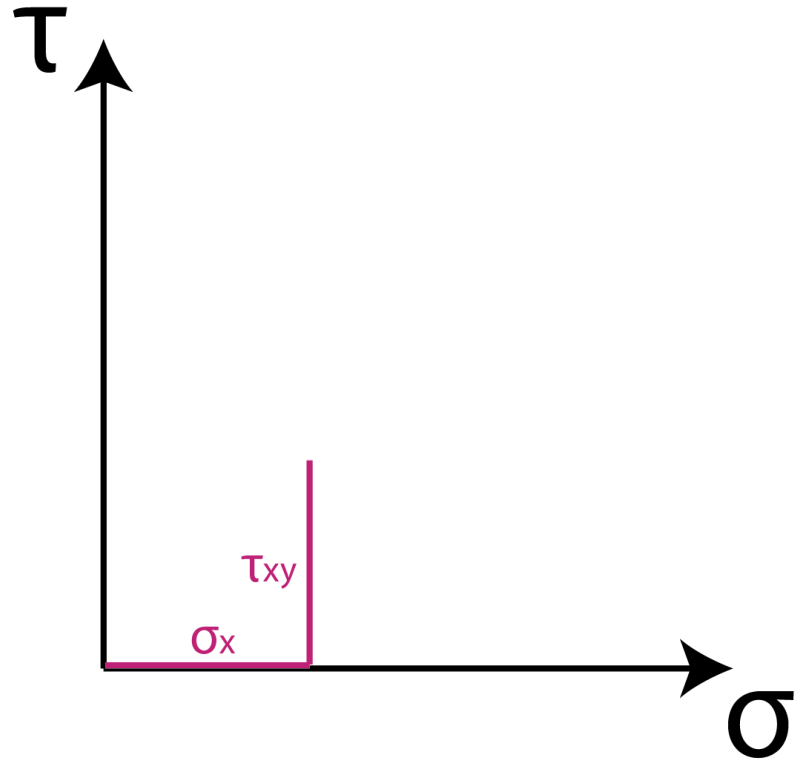
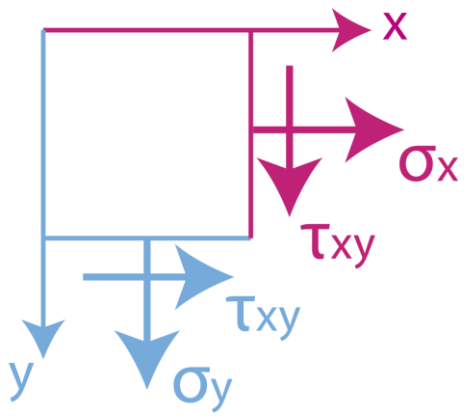
Construimos la circunferencia de Mohr del Estado Plano:

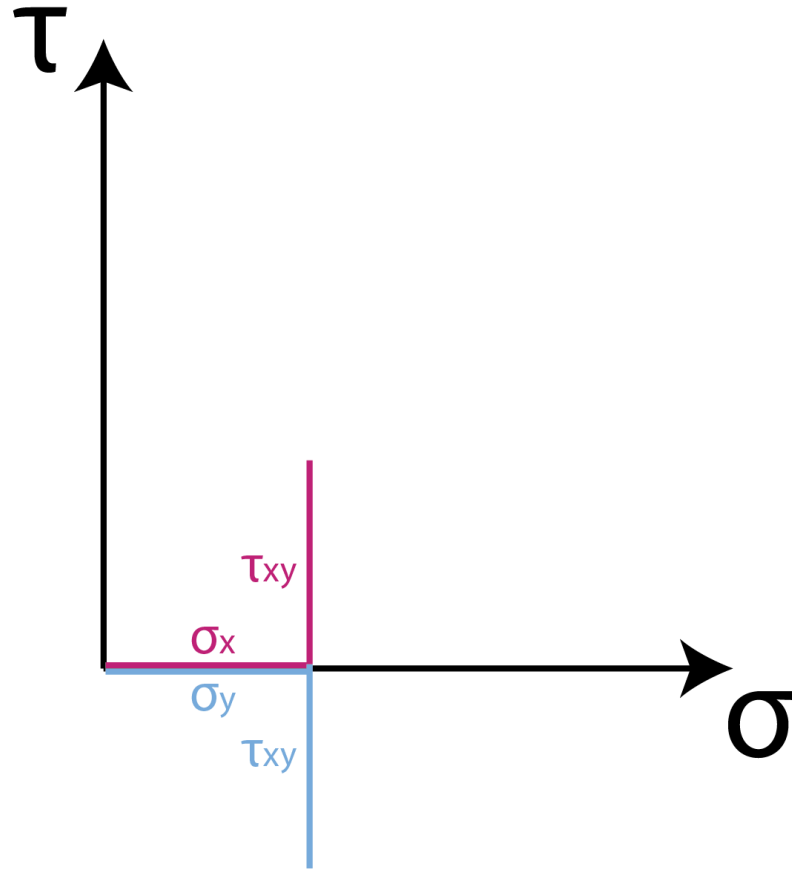
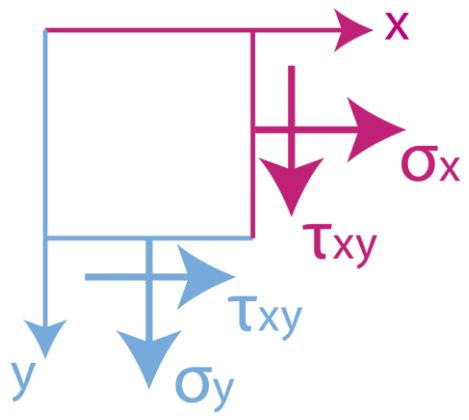


¡Observación!

Para determinar el signo de τ nos fijamos qué giro le producen al cubo

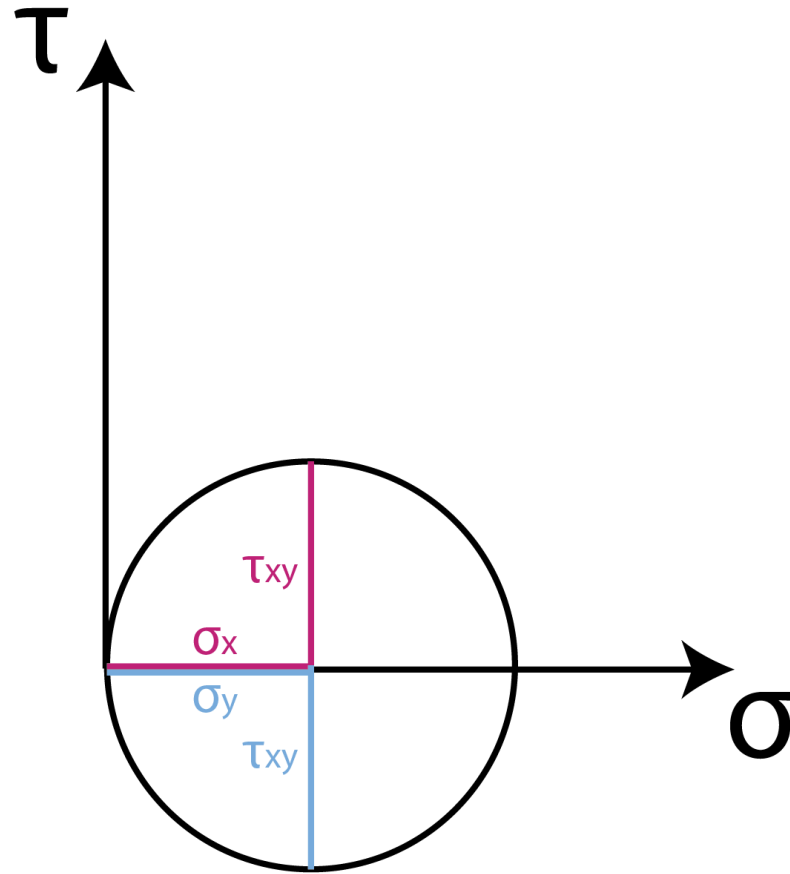


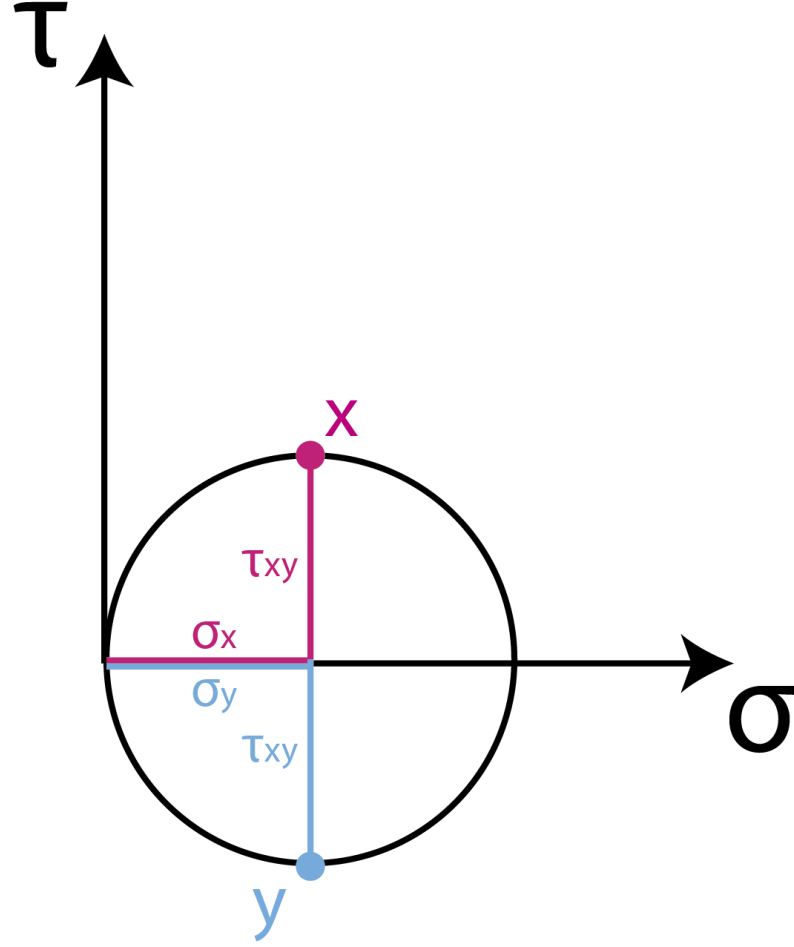






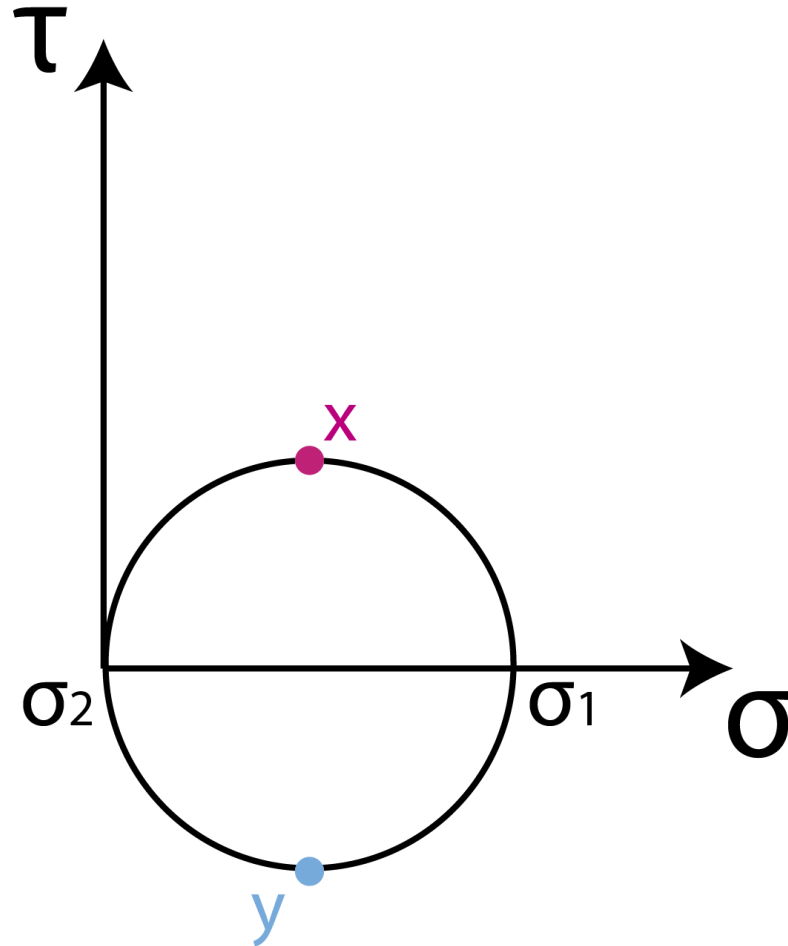
Trazamos la
circunferencia de modo
tal que pase por los
puntos que representan
las tensiones del cubo
elemental

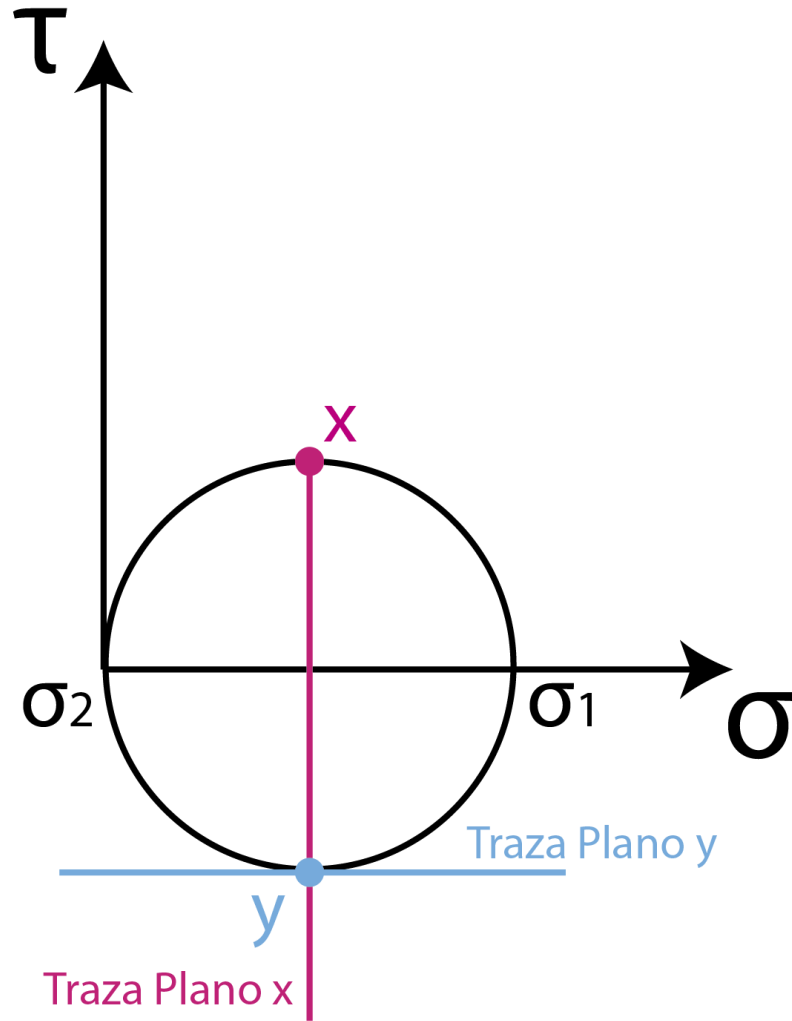
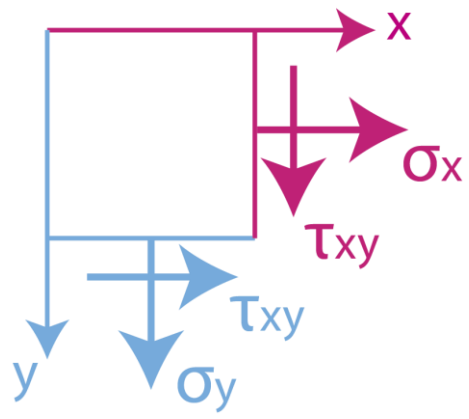






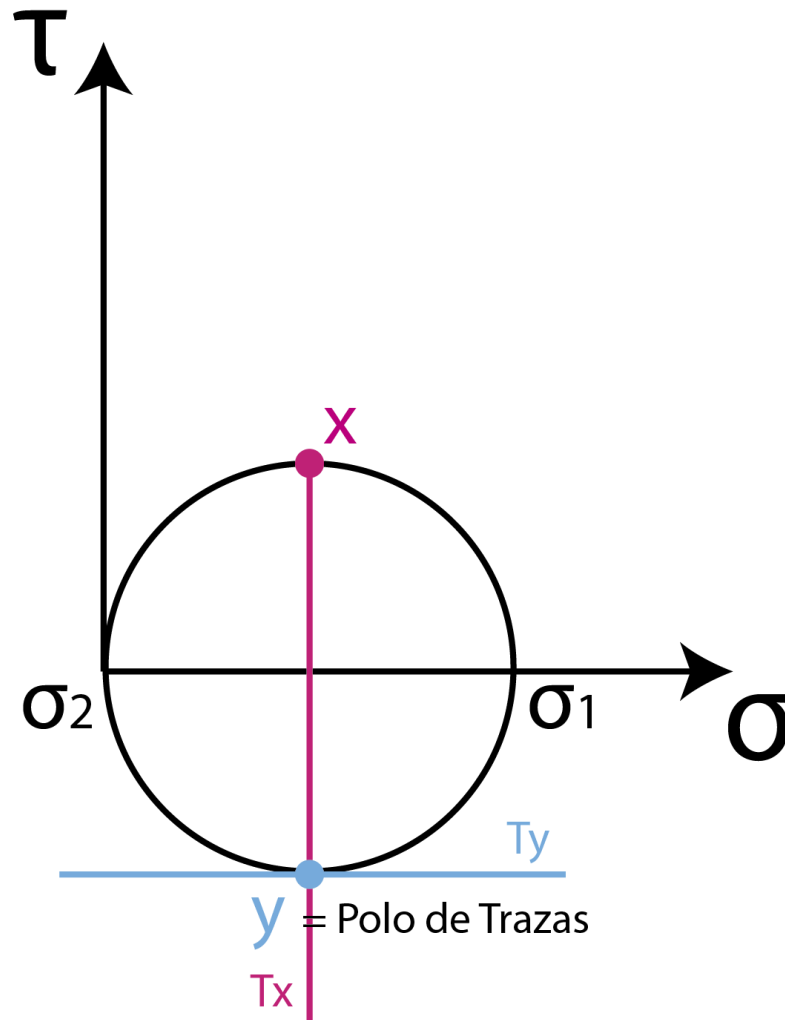
Donde la circunferencia interseca con el eje σ estarán σ_1 y σ_2

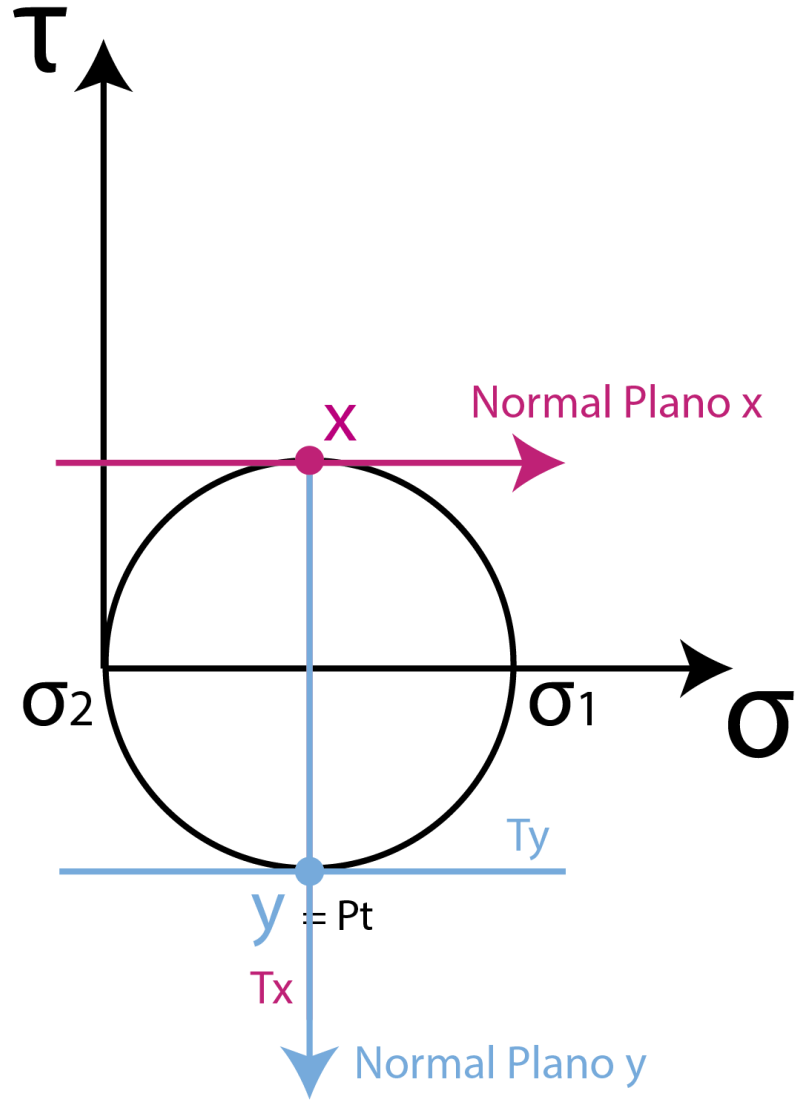
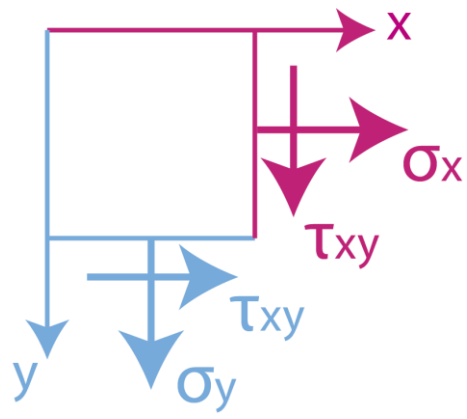






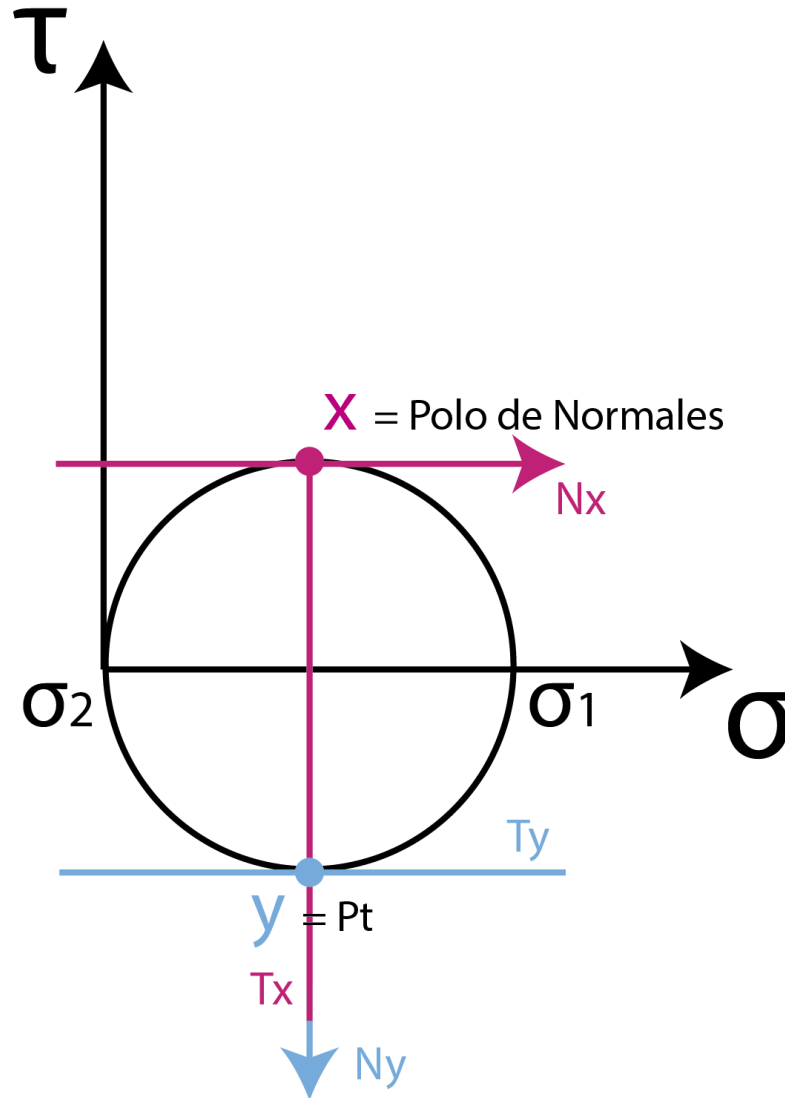
En la intersección de las trazas de los planos se encuentra el polo de trazas





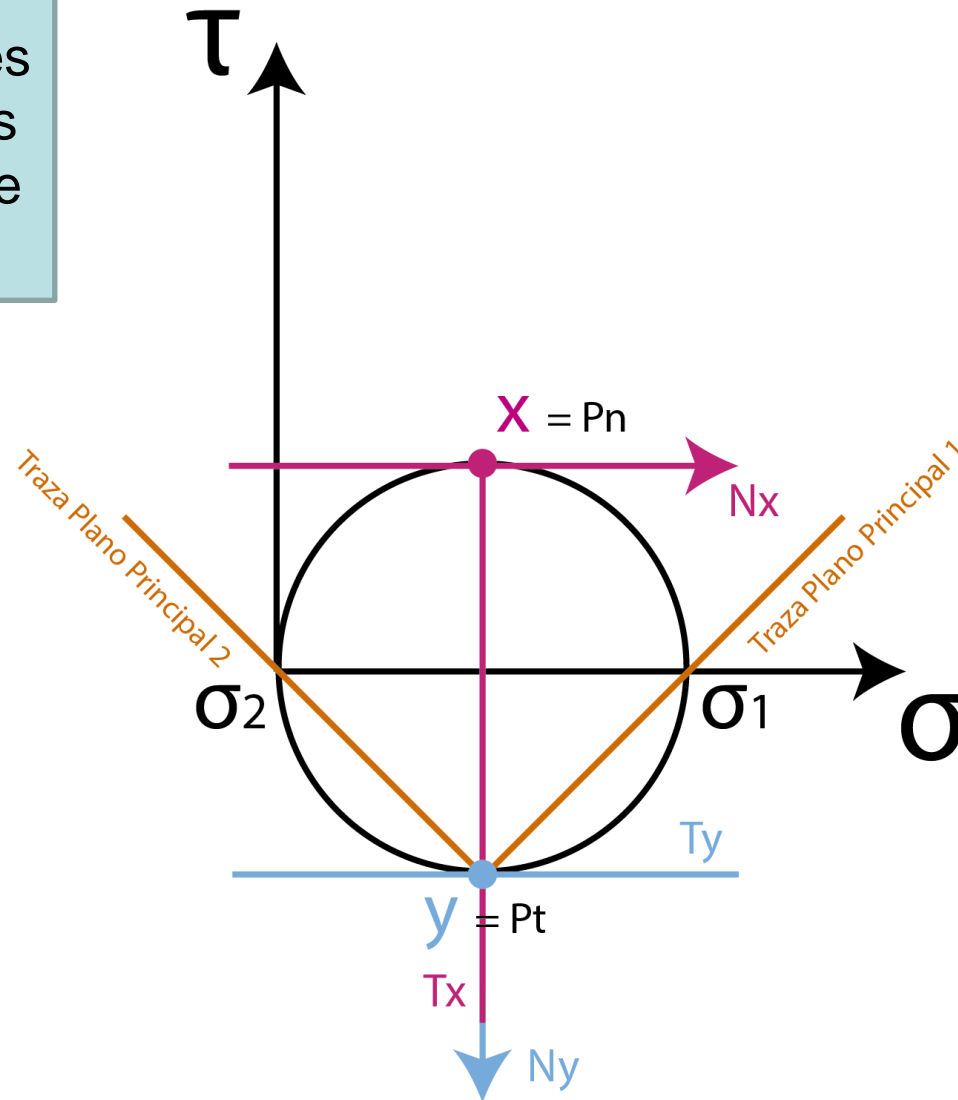


En la intersección de las normales de los planos se encuentra el polo de normales



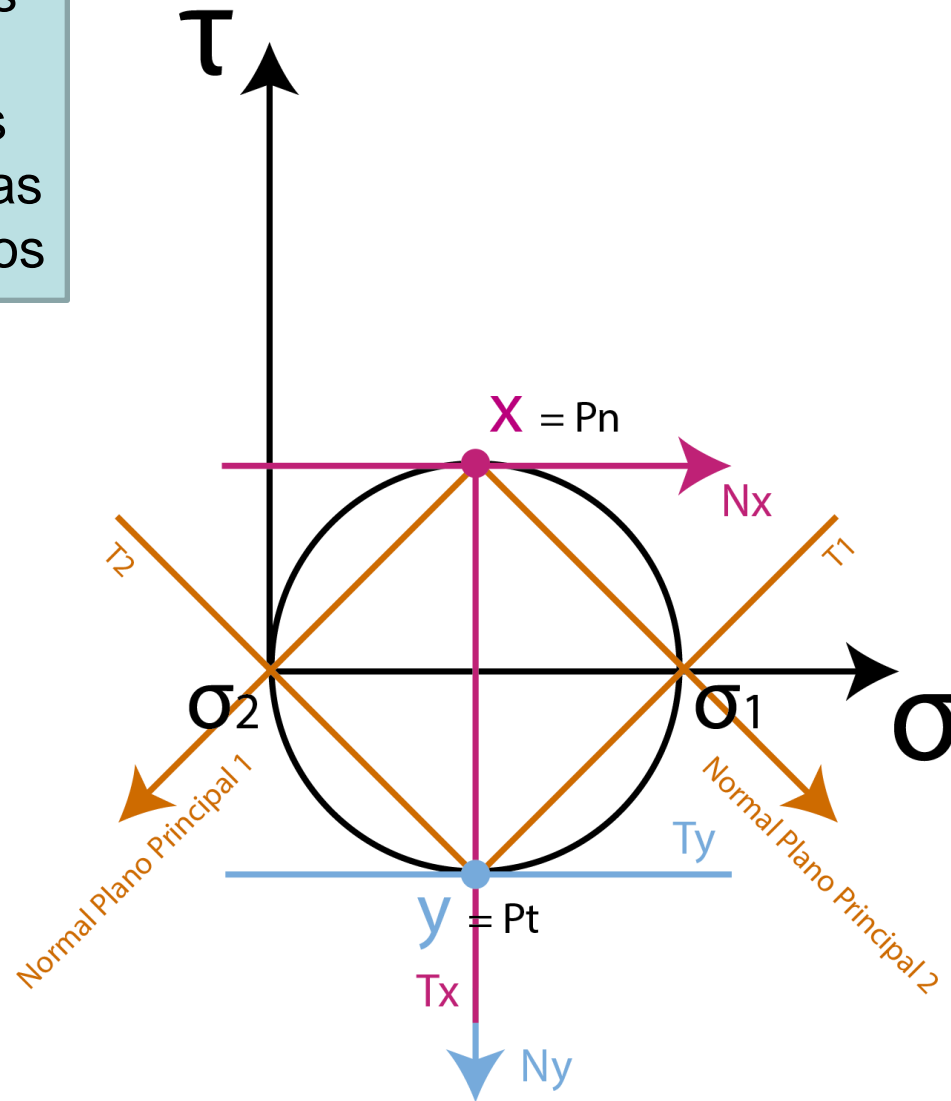


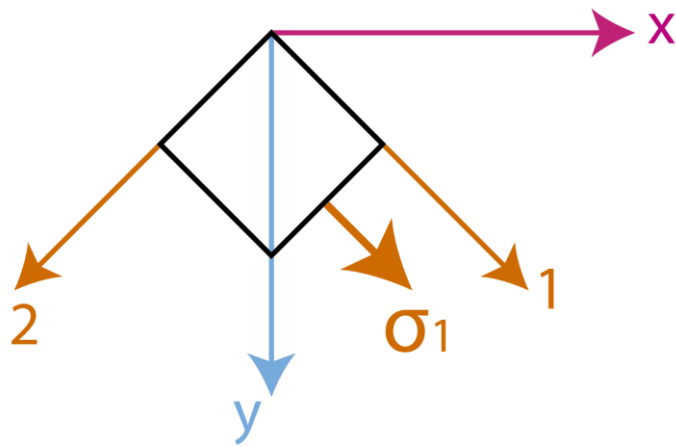
Uniendo el polo de trazas con los puntos que representan las tensiones de los planos principales se obtienen las trazas de dichos planos



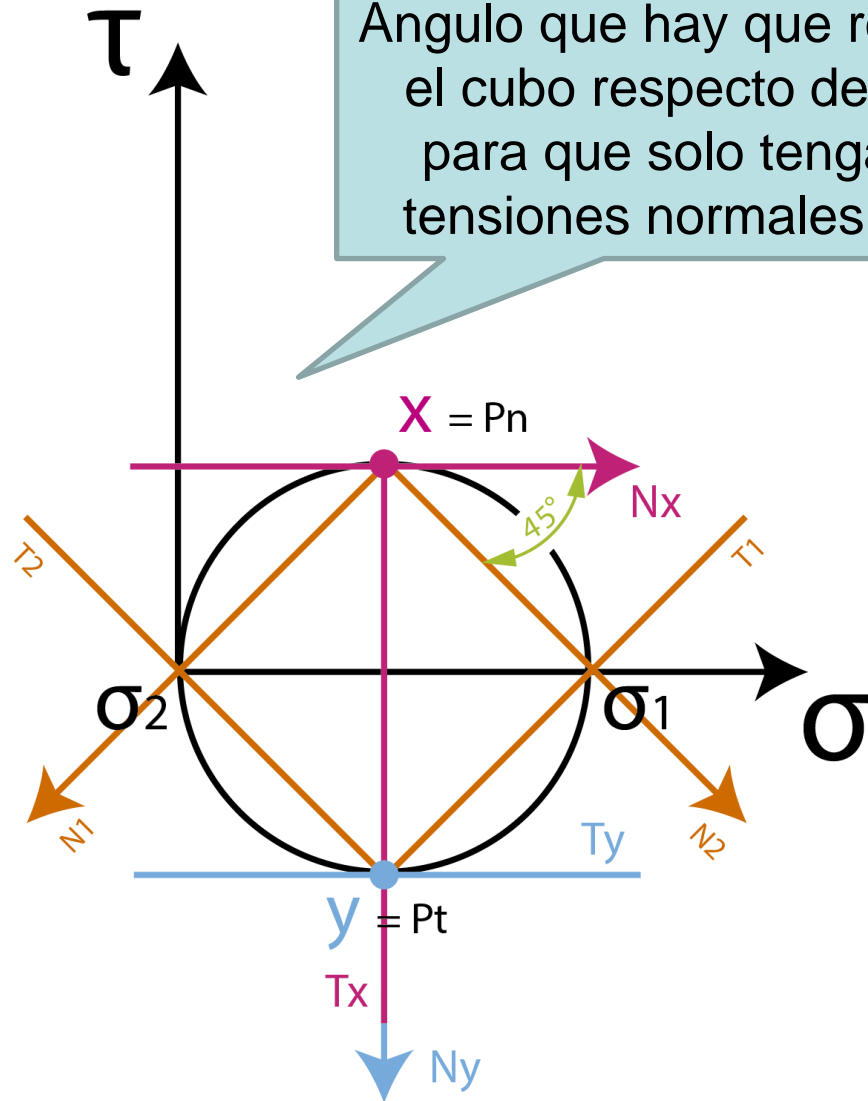


Uniendo el polo de normales con los puntos que representan las tensiones de los planos principales se obtienen las normales de dichos planos

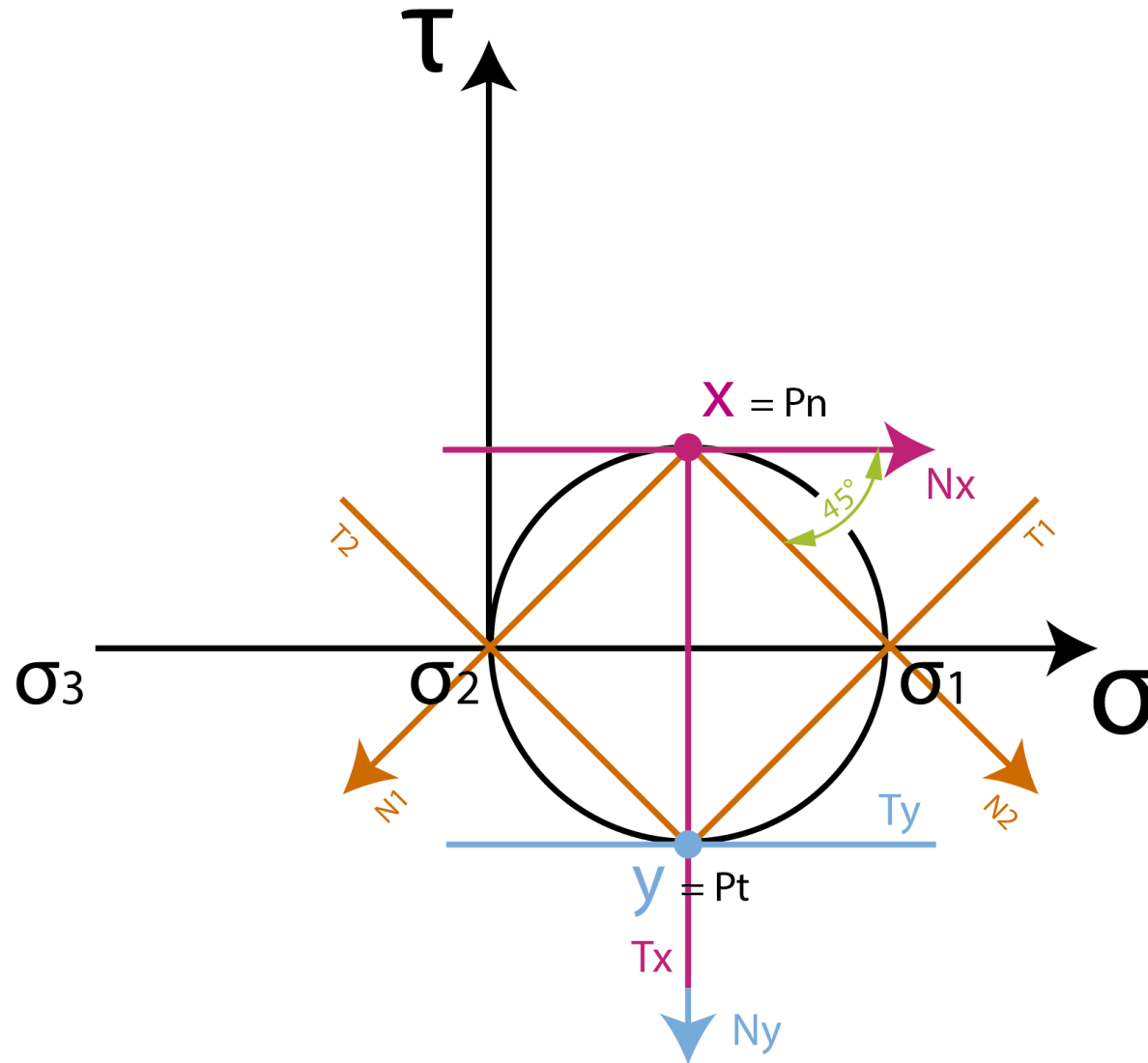


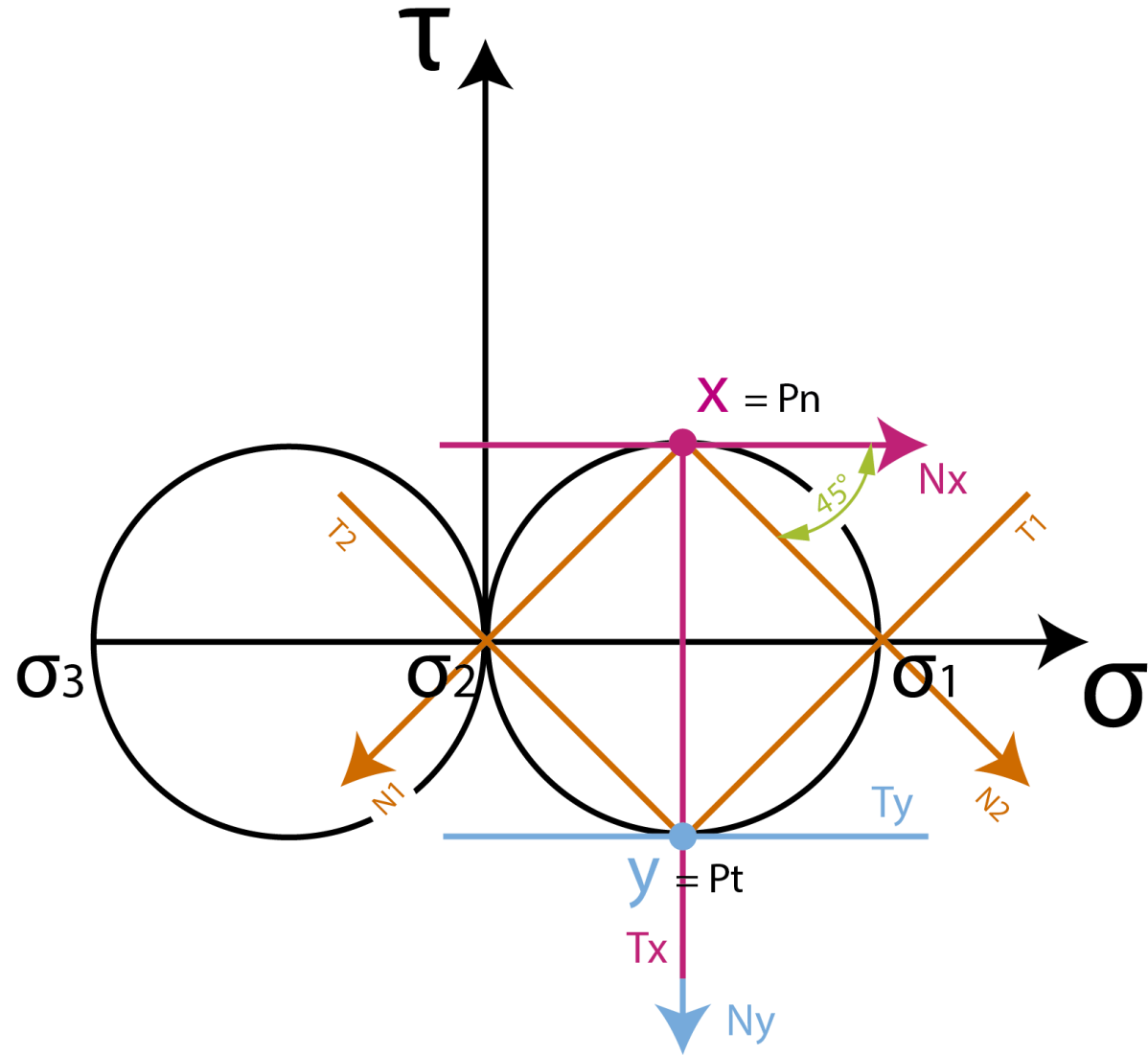


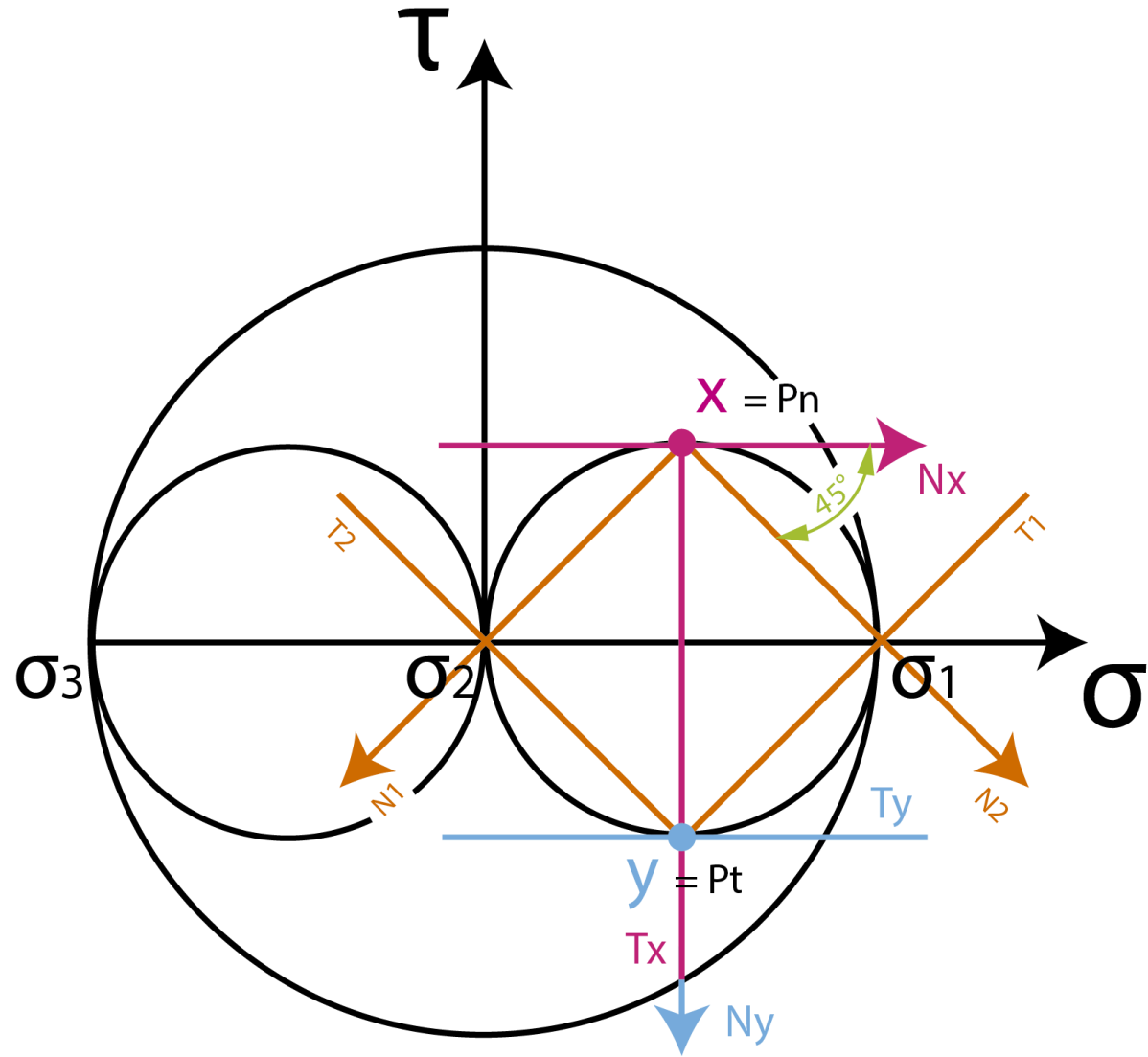
Ángulo que hay que rotar el cubo respecto de x para que solo tenga tensiones normales σ



Construimos la circunferencia de Mohr del Estado Triple agregando al Estado Doble la tensión principal 3:



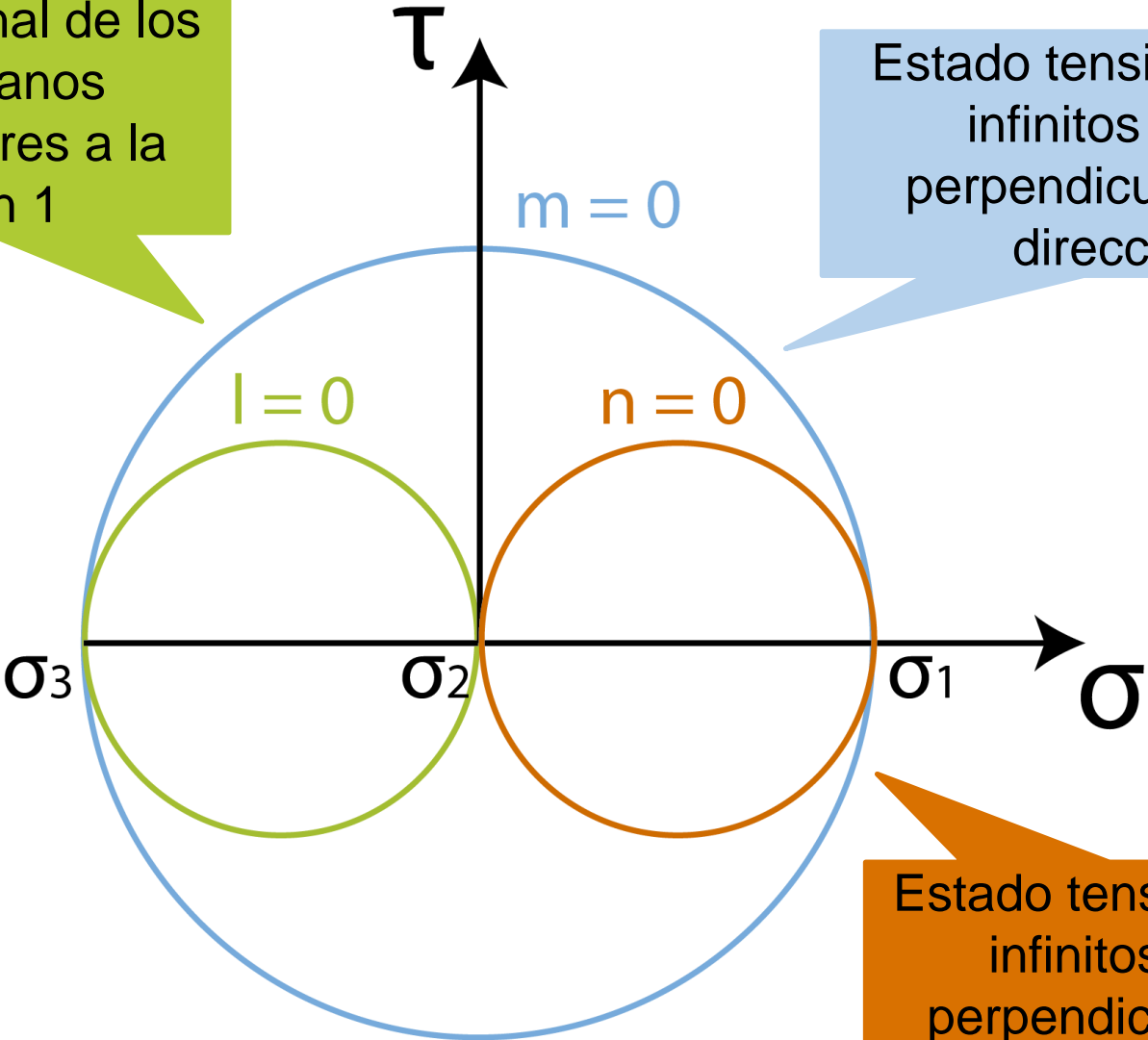






Estado tensional de los infinitos planos perpendiculares a la dirección 1

Estado tensional de los infinitos planos perpendiculares a la dirección 2



Estado tensional de los infinitos planos perpendiculares a la dirección 3

