13 de Mayo de 2019

1. Considere un sistema LTI en tiempo discreto dado por:

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \beta_1 x[n-1] + \beta_2 x[n-2]$$

Se sabe que si $x[n] = 1$ para todo n entonces $y[n] = 0$ para todo n y si $x[n] = (-1)^n$ para todo n entonces $y[n] = 0$ para todo n.

a) Determinar los valores de β_1 y β_2.

b) Obtener la respuesta al impulso.

c) Obtener la respuesta al escalón.

$a)$ Determinar los valores de β_1 y β_2.

$$x[n] = 1 \ \forall n \quad \rightarrow \quad y[n] = 0 \ \forall n$$

$$y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] + \beta_1 x[n-1] + \beta_2 x[n-2]$$

$$0 + 0 = 1 + \beta_1 + \beta_2$$

$$x[n] = (-1)^n \ \forall n \ \rightarrow \ y[n] = 0 \ \forall n$$

$$y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] + \beta_1 x[n-1] + \beta_2 x[n-2]$$

$$0 + 0 = (-1)^n + \beta_1 (-1)^{n-1} + \beta_2 (-1)^{n-2}$$

$$n = 2 \quad \rightarrow \quad 0 = (-1)^2 + \beta_1 (-1)^1 + \beta_2 (-1)^0$$

$$0 = 1 + \beta_1(-1) \quad + \beta_2$$

$$\beta_1 = 1 + \beta_2$$

$$\boxed{\beta_1 = 0 \qquad \beta_2 = -1}$$

$b)$ Obtener la respuesta al impulso.

$$x[n] \rightarrow X(\Omega)$$
$$y[n] \rightarrow Y(\Omega)$$

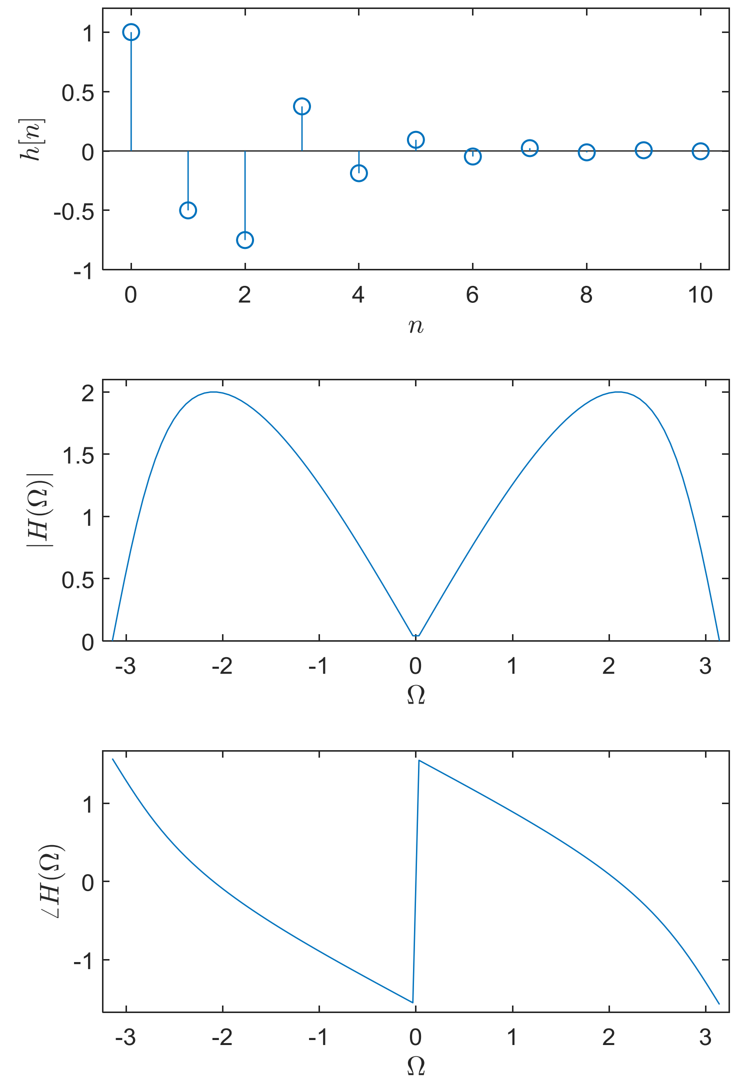
$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - x[n-2]$$

$$Y(\Omega) + \frac{1}{2}Y(\Omega)e^{-j\Omega} = X(\Omega) - X(\Omega)e^{-j2\Omega}$$

$$Y(\Omega)\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right) = X(\Omega)\left(1 - e^{-j2\Omega}\right)$$

$$\mathrm{H}(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1 - e^{-j2\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{e^{-j2\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$h(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2)$$



¿Estable? ¿Causal?

$\alpha^n u[n], \lvert\alpha\rvert < 1$	$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$ periódica con periodo 2π

c) Obtener la respuesta al escalón.

$$y[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} u(k) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2} u(k-2)\right\}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} u(k)\right\} - \sum_{k=-\infty}^{n} \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2} u(k-2)\right\}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k} - \sum_{k=2}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

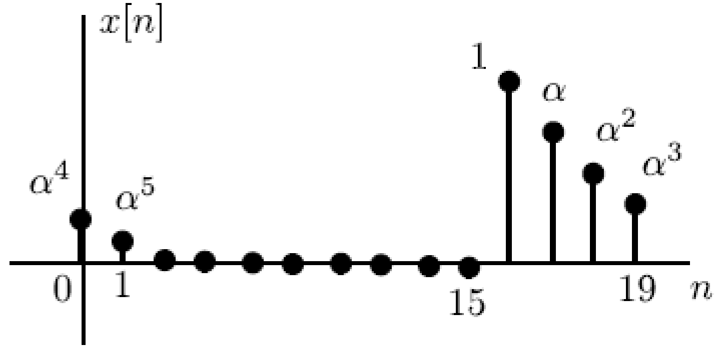
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k} - \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2-1} \alpha^n = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2}}{1-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{C},\ N_1, N_2 \in \mathbb{N}$$

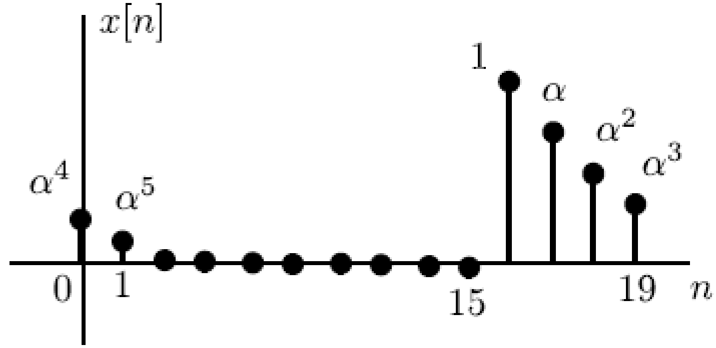
$$y[n] = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{3/2} u[n] - \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3/2} u[n]$$

$$y[n] = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n] - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n]$$

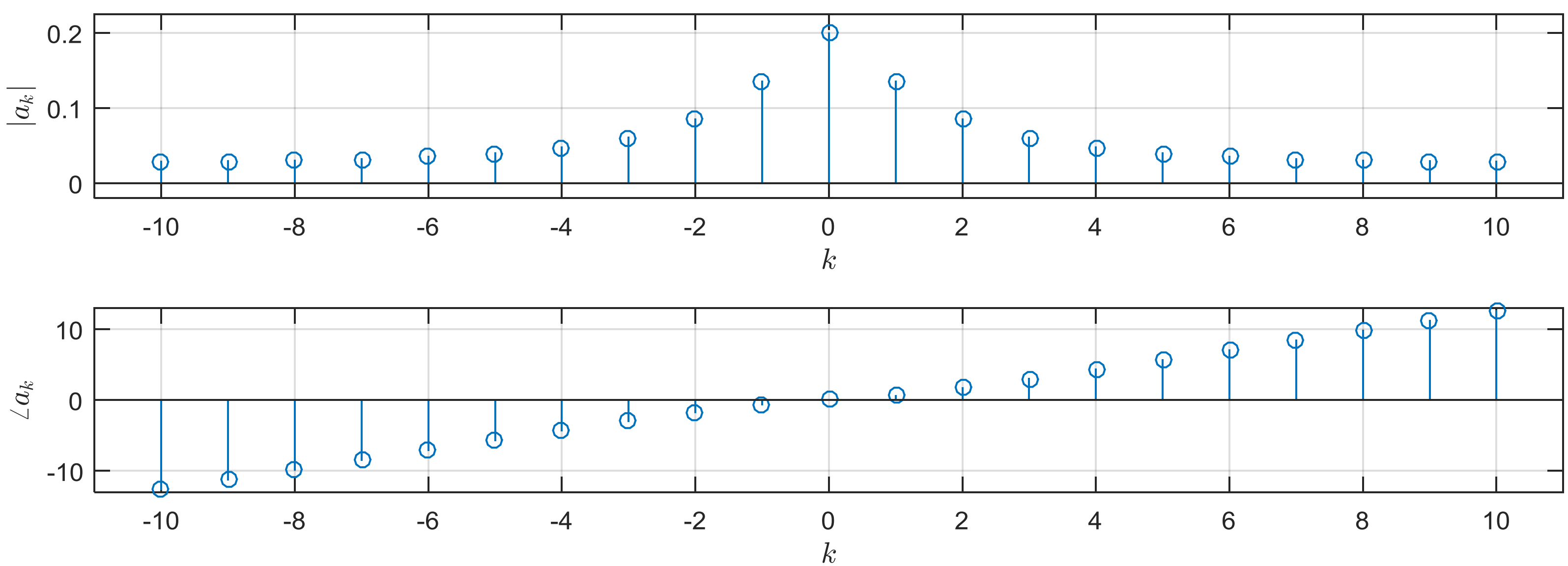
2. Considere la señal de la figura con $\alpha < 1$. La misma es periódica y en la figura se muestra sólo un período. Determine los coeficientes de Fourier de tiempo discreto para esta señal.



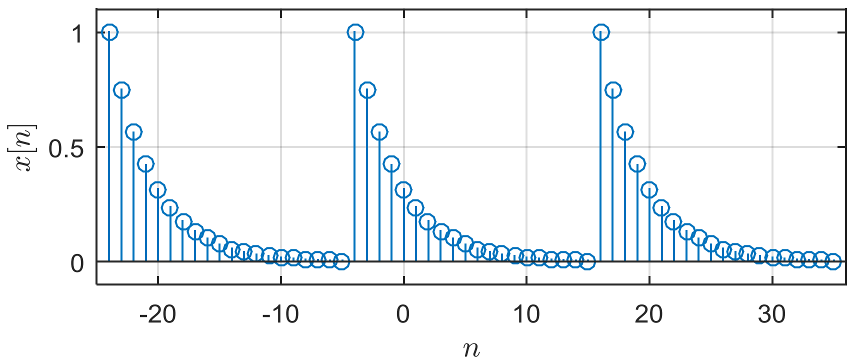
2. Considere la señal de la figura con $\alpha < 1$. La misma es periódica y en la figura se muestra sólo un período. Determine los coeficientes de Fourier de tiempo discreto para esta señal.

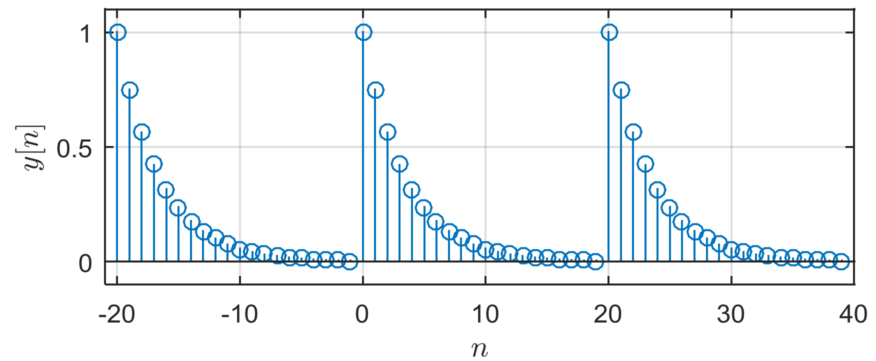


$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad N = 20$$



2. Considere la señal de la figura con $\alpha < 1$. La misma es periódica y en la figura se muestra sólo un período. Determine los coeficientes de Fourier de tiempo discreto para esta señal.





$$x[n] = y[n - 16] \qquad a_k = b_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}16}$$

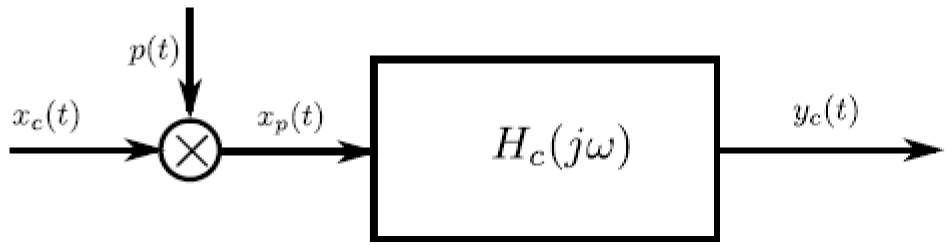
$$b_k = \frac{1}{20}\sum_{n=0}^{19} \alpha^n e^{-j\frac{2\pi}{20}kn} = \frac{1}{20}\sum_{n=0}^{19}\left(\alpha e^{-j\frac{2\pi}{20}k}\right)^n = \frac{1}{20}\frac{1-\left(\alpha e^{-j\frac{2\pi}{20}k}\right)^{20}}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{20}k}}$$

$$a_k = \frac{1}{20}\frac{1-\left(\alpha e^{-j\frac{2\pi}{20}k}\right)^{20}}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{20}k}} e^{-jk\frac{2\pi}{20}16}$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2-1} \alpha^n = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2}}{1-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{C},\ N_1, N_2 \in \mathbb{N}$$

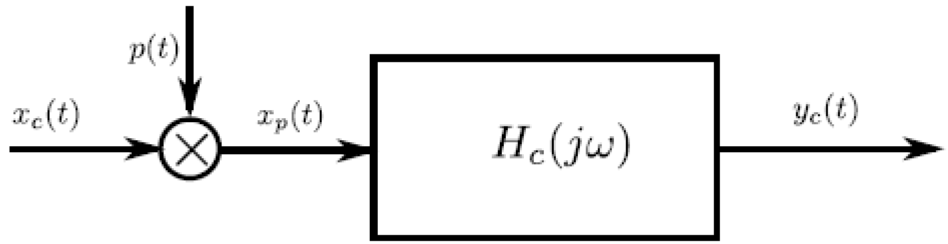
¿ $x[n] = y[n+4]$?

3. Considere el siguiente sistema: donde $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ y $H_c(j\omega)$ es un pasabajos ideal con



frecuencia de corte $\frac{\omega_s}{2}$ y ganancia T y donde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. En este sistema cuando la entrada vale $x_c(t) = \cos(2\pi 1000 t)$ la salida es $y_c(t) = x_c(t)$. Por otro lado, cuando $x_c(t) = \cos(2\pi 9000 t)$ la salida es $y_c(t) = \cos(2\pi 1000 t)$. Determine un valor de ω_s compatible con esta situación y dibuje los espectros de $x_p(t)$ para los dos casos, explicando claramente la situación en cada uno de ellos.

3. Considere el siguiente sistema: donde $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ y $H_c(j\omega)$ es un pasabajos ideal con



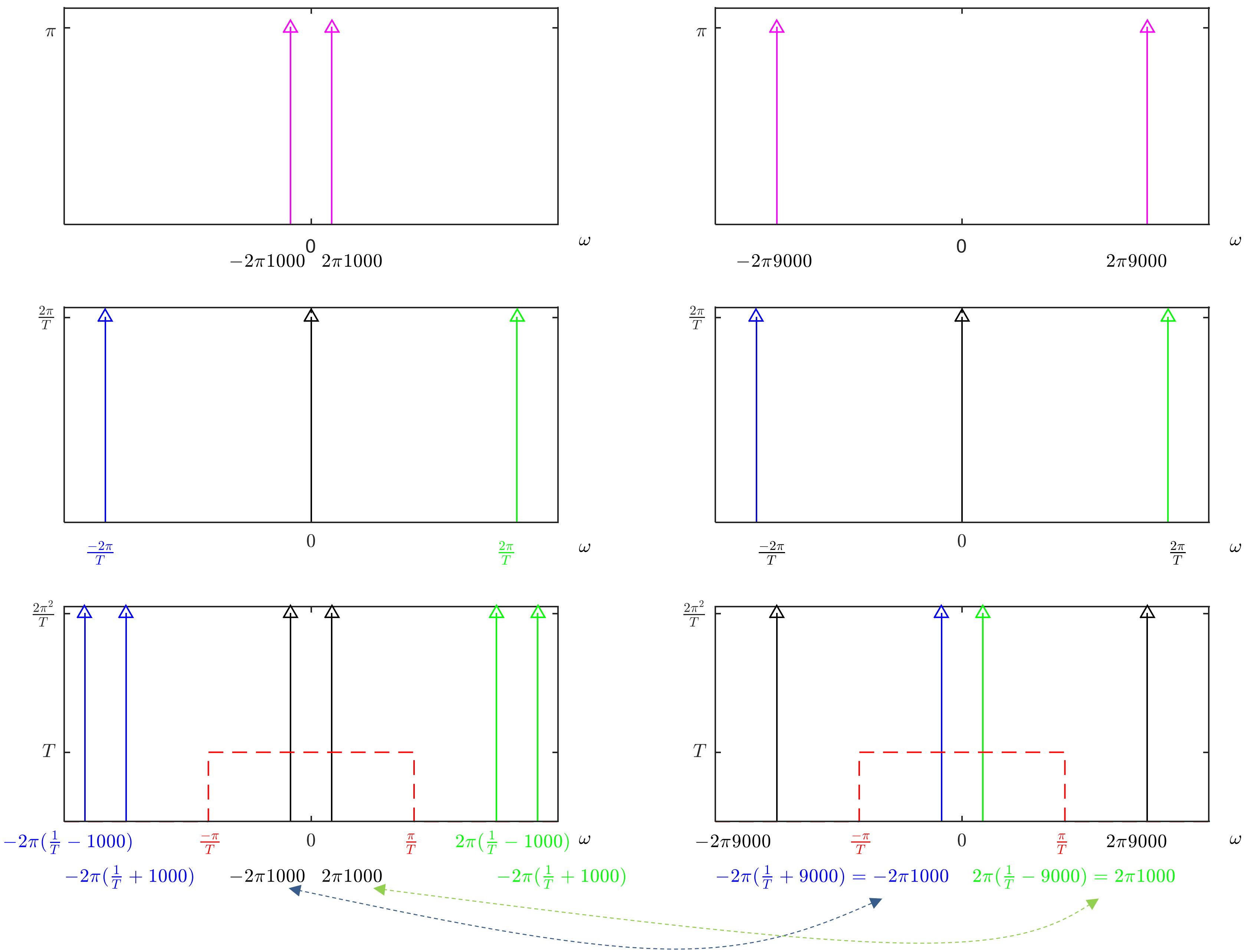
frecuencia de corte $\frac{\omega_s}{2}$ y ganancia T y donde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. En este sistema cuando la entrada vale $x_c(t) = \cos(2\pi 1000t)$ la salida es $y_c(t) = x_c(t)$. Por otro lado, cuando $x_c(t) = \cos(2\pi 9000t)$ la salida es $y_c(t) = \cos(2\pi 1000t)$. Determine un valor de ω_s compatible con esta situación y dibuje los espectros de $x_p(t)$ para los dos casos, explicando claramente la situación en cada uno de ellos.

$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ $\qquad$ $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$H_c(j\omega)$ $\qquad$ frecuencia de corte $\frac{\omega_s}{2}$

$x_c(t) = \cos(2\pi 1000t)$ la salida es $y_c(t) = x_c(t)$

$x_c(t) = \cos(2\pi 9000t)$ $\qquad$ $y_c(t) = \cos(2\pi 1000t)$



π
ω
0
$-2\pi 1000$
$2\pi 1000$
$-2\pi 9000$
$2\pi 9000$
$\frac{2\pi}{T}$
$\frac{-2\pi}{T}$
$\frac{2\pi^2}{T}$
T
$\frac{-\pi}{T}$
$\frac{\pi}{T}$
$-2\pi(\frac{1}{T} - 1000)$
$2\pi(\frac{1}{T} - 1000)$
$-2\pi(\frac{1}{T} + 1000)$
$-2\pi(\frac{1}{T} + 9000) = -2\pi 1000$
$2\pi(\frac{1}{T} - 9000) = 2\pi 1000$

14 de Mayo de 2018

1. Considere un sistema LTI de tiempo discreto tal que la relación entre la entrada y la salida del mismo se puede escribir como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k} \left\{ x[k] + \beta x[k-1] + \gamma x[k-2] \right\}$$

donde $|\alpha| < 1$ y donde β, γ son valores reales desconocidos.

a) Obtenga la respuesta al impulso del sistema y analice la estabilidad del mismo.

b) Determine los valores de β y γ tales que permitan que el sistema tenga las siguientes propiedades:

- Si $x[n] = (-1)^n$ para todo n entonces $y[n] = 0$ para todo n.
- Si $x[n] = 1$ para todo n entonces $y[n] = 1$ para todo n.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k}\{x[k] + \beta x[k-1] + \gamma x[k-2]\}$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k}\{\delta[k] + \beta\delta[k-1] + \gamma\delta[k-2]\} \qquad \leftarrow \qquad x[n] = \delta[k] \rightarrow y[n] = h[k]$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k}\delta[k] + \beta \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k}\delta[k-1] + \gamma \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k}\delta[k-2]$$

$$h[n] = 0 \quad n < 0$$

$$h[0] = \sum_{k=-\infty}^{0} \alpha^{0-k}\delta[k] + \beta \sum_{k=-\infty}^{0} \alpha^{0-k}\delta[k-1] + \gamma \sum_{k=-\infty}^{0} \alpha^{0-k}\delta[k-2] = 1$$

$$h[1] = \sum_{k=-\infty}^{1} \alpha^{1-k}\delta[k] + \beta \sum_{k=-\infty}^{1} \alpha^{1-k}\delta[k-1] + \gamma \sum_{k=-\infty}^{1} \alpha^{1-k}\delta[k-2] = \alpha^{1-0} + \beta\alpha^{1-1} = \alpha + \beta$$

$$h[2] = \sum_{k=-\infty}^{2} \alpha^{2-k}\delta[k] + \beta \sum_{k=-\infty}^{2} \alpha^{2-k}\delta[k-1] + \gamma \sum_{k=-\infty}^{2} \alpha^{2-k}\delta[k-2] = \alpha^{2-0} + \beta\alpha^{2-1} + \gamma\alpha^{2-2} = \alpha^2 + \beta\alpha + \gamma$$

$$h[3] = \sum_{k=-\infty}^{3} \alpha^{3-k}\delta[k] + \beta \sum_{k=-\infty}^{3} \alpha^{3-k}\delta[k-1] + \gamma \sum_{k=-\infty}^{3} \alpha^{3-k}\delta[k-2] = \alpha^{3-0} + \beta\alpha^{3-1} + \gamma\alpha^{3-2} = \alpha^3 + \beta\alpha^2 + \gamma\alpha$$

$$h[n] = \alpha^n + \beta\alpha^{n-1} + \gamma\alpha^{n-2} \qquad n \geq 2$$

$$h[n] = \alpha^n u[n] + \beta\alpha^{n-1}u[n-1] + \gamma\alpha^{n-2}u[n-2]$$

3. Considere el sistema de la Fig. 1 donde los conversores A/D y D/A son ideales. La señal a la entrada de dicho sistema $x_c(t)$ y la salida deseada $y_c(t)$ se muestran en la Fig. 2. Encuentre un valor de T

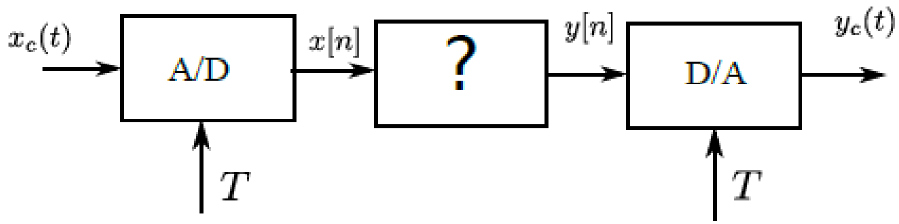


Figura 1

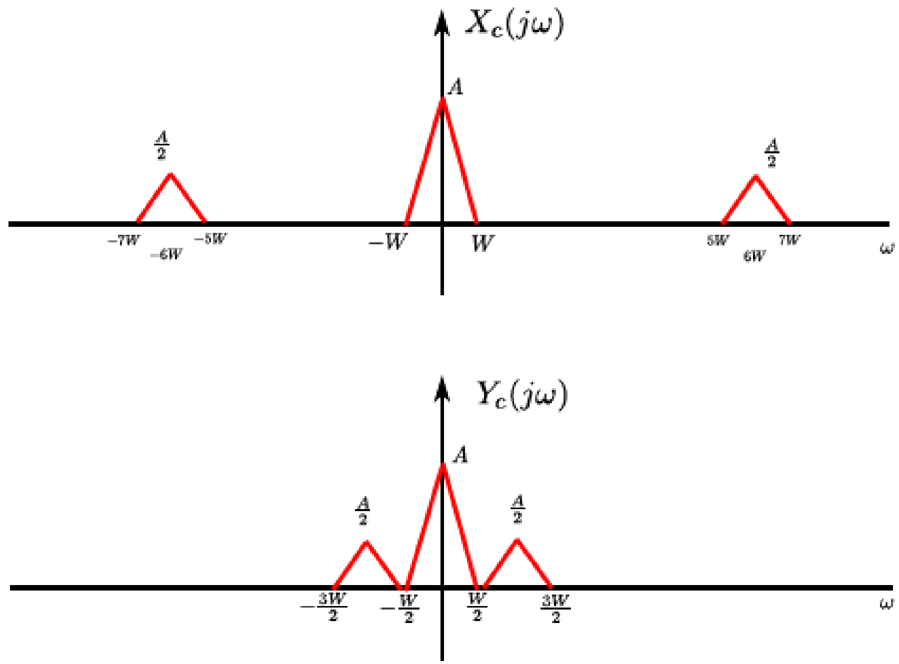
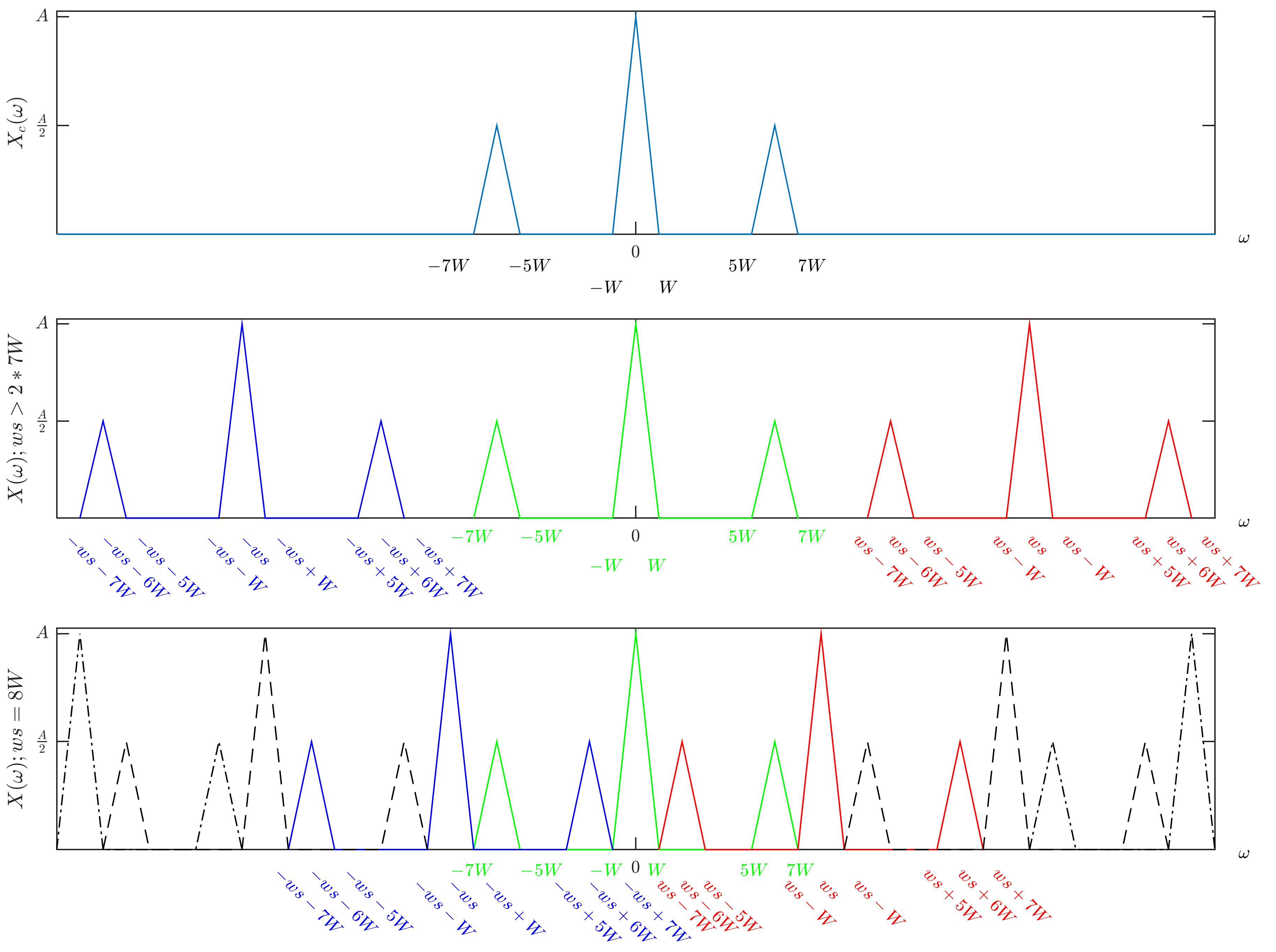
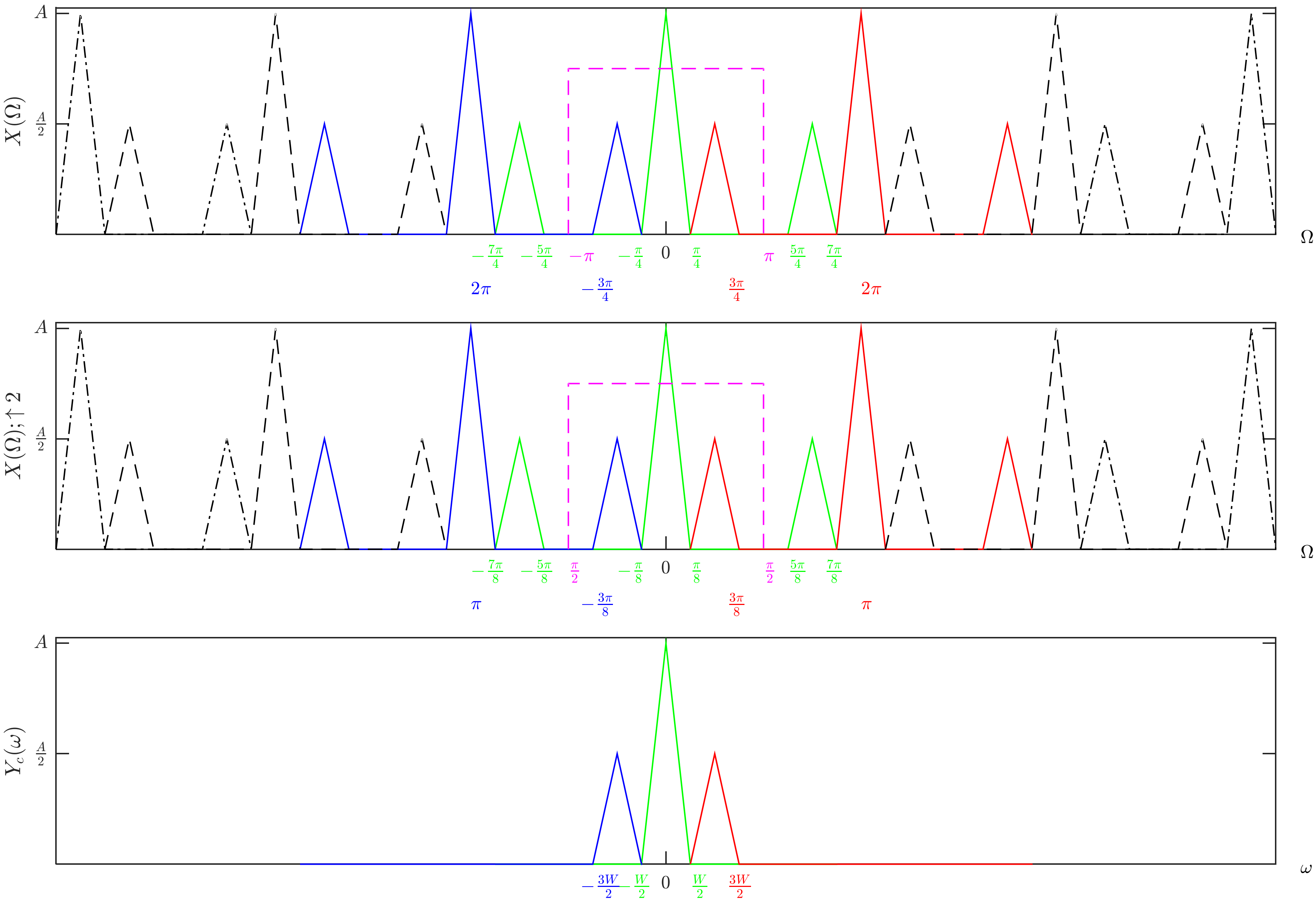


Figura 2

apropiado para lograr esto y diseñe el sistema que vincula $x[n]$ con $y[n]$. Ayuda: quizás un sistema LTI no sea suficiente...



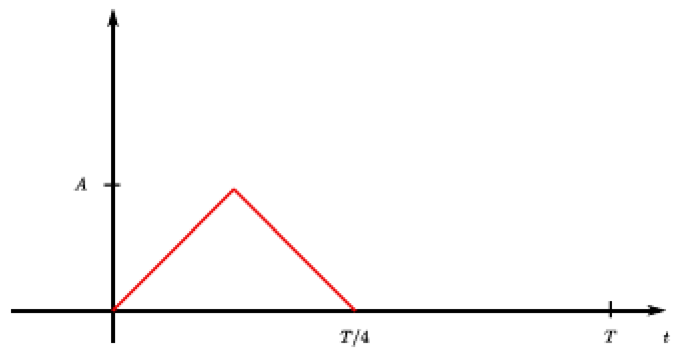
$X_c(\omega)$
A
$\frac{A}{2}$
ω
0
$-7W$
$-5W$
$5W$
$7W$
$-W$
W
$X(\omega); ws > 2 * 7W$
$-ws - 7W$
$-ws - 6W$
$-ws - 5W$
$-ws - W$
$-ws$
$-ws + W$
$-ws + 5W$
$-ws + 6W$
$-ws + 7W$
$ws - 7W$
$ws - 6W$
$ws - 5W$
$ws - W$
ws
$ws + 5W$
$ws + 6W$
$ws + 7W$
$X(\omega); ws = 8W$



A
$\frac{A}{2}$
$X(\Omega)$
Ω
$-\frac{7\pi}{4}$ $-\frac{5\pi}{4}$ $-\pi$ $-\frac{\pi}{4}$ 0 $\frac{\pi}{4}$ π $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{7\pi}{4}$
2π $-\frac{3\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$ 2π
A
$\frac{A}{2}$
$X(\Omega); \uparrow 2$
Ω
$-\frac{7\pi}{8}$ $-\frac{5\pi}{8}$ $\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{8}$ 0 $\frac{\pi}{8}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{8}$ $\frac{7\pi}{8}$
π $-\frac{3\pi}{8}$ $\frac{3\pi}{8}$ π
A
$\frac{A}{2}$
$Y_c(\omega)$
ω
$-\frac{3W}{2}$ $-\frac{W}{2}$ 0 $\frac{W}{2}$ $\frac{3W}{2}$

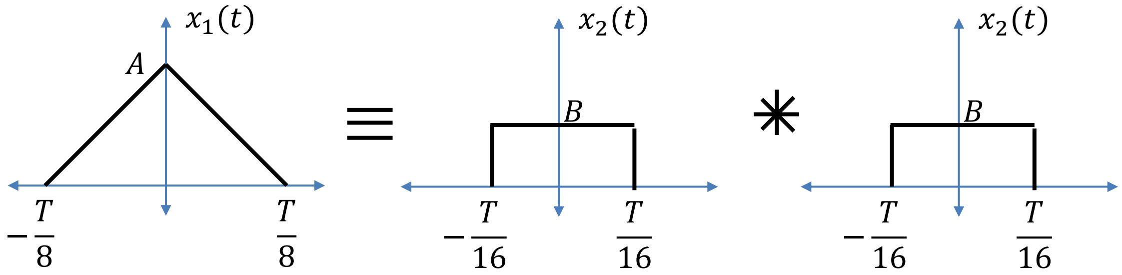
21 de Octubre de 2019

2. Considere la señal periódica $x(t)$ con período T de la figura.



   a) Encuentre los coeficientes de Fourier.
   b) Considere la señal $y(t)$ que se obtiene de pasar la señal $x(t)$ por un sistema con respuesta al impulso dada por $h(t) = u(t) - u(t - T)$. Encuentre los coeficientes de Fourier de la misma.

$$a_k = \frac{1}{T} X(\omega)\Big|_{\omega=\omega_0 k} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad x(t) = x_1\left(t - \frac{T}{8}\right) \qquad X(\omega) = X_1(\omega)e^{-j\omega\frac{T}{8}}$$



$$A = B\,B\,2\,\frac{T}{16} = B^2\frac{T}{8}$$

$$B = \sqrt{\frac{8A}{T}}$$

$$X_1(\omega) = X_2(\omega)X_2(\omega)$$

$u(t+T) - u(t-T)$	$\frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$

$$X_2(\omega) = B\,\frac{2sen(\omega\frac{T}{16})}{\omega}$$

$$X(\omega) = \left(2B\,\frac{sen(\omega\frac{T}{16})}{\omega}\right)^2 e^{-j\omega\frac{T}{8}}$$

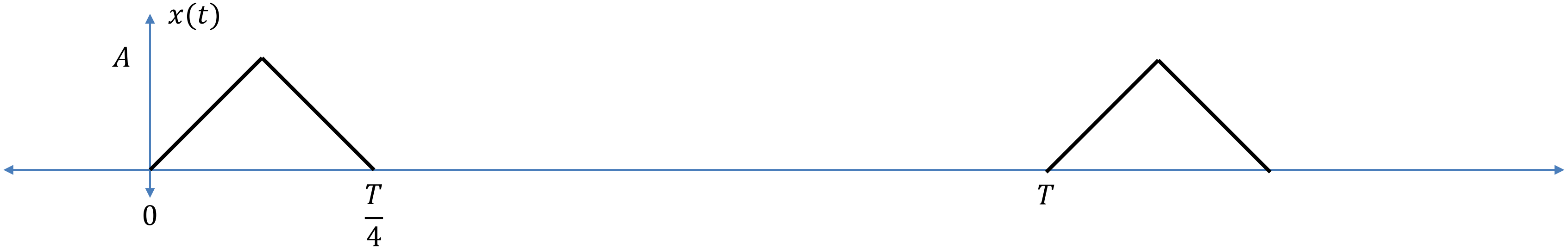
$$a_k = \frac{1}{T}\frac{8\,A\,T}{(k\pi)^2} sin^2\left(k\frac{\pi}{8}\right) e^{-jk\frac{\pi}{4}}$$

$$X\left(\frac{2\pi}{T}k\right) = \left(2\sqrt{\frac{8A}{T}}\,\frac{sen(k\frac{2\pi}{T}\frac{T}{16})}{\frac{2\pi}{T}k}\right)^2 e^{-jk\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8}}$$

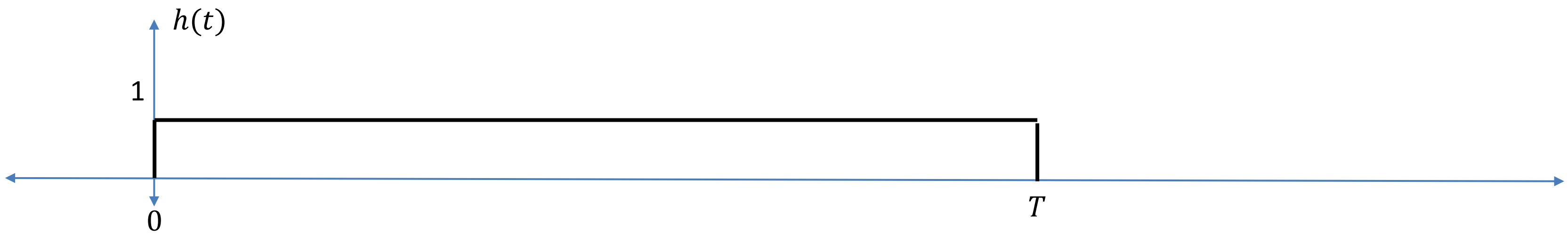
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\frac{A\,\frac{T}{4}}{2} = \frac{A}{8}$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$h(t) = u(t) - u(t - T)$$



$$\ast$$



$$\equiv$$

$$B = \frac{A\,\frac{T}{4}}{2}$$